7. Тихоновський добуток і тихоновська топологія

Нехай Γ — індексна множина, кожному елементу якої $\gamma \in \Gamma$ поставлено у відповідність деяку множину X_γ.

Означення 7.1. *Декартовим добутком* множин X_γ по $\gamma \in \Gamma$ називається множина $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, яка складається із усіх функцій $x : \Gamma \to \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, таких що $\forall \gamma \in \Gamma \; x(\gamma) \in X_\gamma$.

У частковому випадку, коли $\forall \gamma \in \Gamma \;\; X_\gamma = X$, добуток складається з усіх функцій $x : \Gamma \to X$ і декартовий добуток називається декартовим степенем X^Γ.

Приклад 7.1. *Простір Фреше* — добуток $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, де $X_n = \mathbb{R}$. Отже, простір Фреше є степенем $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R}^{\aleph_0}$, елементами якого є зліченні послідовності $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ дійсних чисел x_n.

Приклад 7.2. *Гільбертів куб* — добуток $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, де $X_n = I = [0,1]$, тобто це простір $I^{\aleph_0}$.

Приклад 7.3. *Тихоновський куб* — добуток $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, де $\#\Gamma = \nu$, а $X_\gamma = I = [0,1]$, тобто це простір I^ν.

Приклад 7.4. *Канторов дисконтинуум ваги* ν *—* добуток $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, де $\#\Gamma = \nu$, а $X_\gamma = D = \{0,1\}$ (проста двокрапка), тобто це простір D^ν.

Означення 7.2. Отображение $P_\alpha : \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \to X_\alpha$, що діє за правилом $P_\alpha(x) = x_\alpha \ \forall\alpha\in\Gamma$, називається *координатним проектором*.

Означення 7.3. Нехай $X_\gamma, \gamma\in\Gamma$ — топологічні простори. *Тихоновською топологією* на $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ називається найслабкіша з топологій, в якій усі координатні проектори $P_\alpha(x),\ \alpha\in\Gamma$ є неперервними.

Означення 7.4. Декартів добуток $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, наділений тихоновською топологією, називається *тихоновським добутком*.

Зауваження 7.1. Очевидно, що координатні проектори розділяють точки добутку, тому за теоремою 6.2 тихоновський добуток хаусдорфових просторів є віддільним за Хаусдорфом.

Означення 7.5. Нехай K — деякий скінчений набір індексів з Γ. Добуток $A = \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, де $A_\gamma = X_\gamma$, якщо $\gamma\notin K$, і $A_\gamma \subset X_\gamma$ при $\gamma\in K$ і A_γ — відкриті множини в топологіях τ_γ, називається *відкритою циліндричною множиною з основою* $\prod_{\gamma\in K} A_\gamma$.

Запишемо тихоновську топологію як топологію, що породжена сімейством відображень. Нехай $x \in \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, $K \subset \Gamma$ — скінчена множина індексів, $V_\gamma \subset X_\gamma, \gamma \in K$ — околи точок x_γ. Уведемо позначення

$$U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma \in K}}(x) = \left\{ y \in \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma : y_\alpha \in V_\alpha \ \forall \alpha \in K \right\}.$$

Зауваження 7.2. Множина $U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma \in K}}(x)$ є відкритим циліндричним околом точки x з основою $\prod_{\gamma \in K} V_\gamma$.

Теорема 7.1 (про базу околів точки в тихоновській топології). *Множини* $U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma \in K}}(x)$ *утворюють у тихоновській топології базу околів точки* $x \in \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$.

Доведення. Перевірте властивості бази.

Теорема 7.2 (критерій збіжності в тихоновському добутку). *Фільтр* $\mathfrak{F}$ *на* $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ *збігається в тихоновській топології до елемента* $x = \{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ *тоді і тільки тоді, коли* $x_\gamma = \lim_{\mathfrak{F}} P_\gamma \ \ \forall \gamma \in \Gamma$.

Доведення. *Необхідність.* Оскільки координатні проектори на $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ є неперервними і $x = \lim \mathfrak{F}$, то за теоремою 3.3 $\lim_{\mathfrak{F}} P_\gamma = P_\gamma(x) = x_\gamma$.

Достатність. Покажемо, що будь-який окіл V точки x належить фільтру $\mathfrak{F}$. З огляду на те, що $\forall A \in \mathfrak{F}\ A \subset B \subset X \Rightarrow B \in \mathfrak{F}$, достатньо розглянути відкритий циліндричний окіл точки x, який міститься в V. Отже, розглянемо відкритий циліндричний окіл $U = \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$ точки x з основою $U = \prod\limits_{\gamma \in K} V_\gamma$, тобто $U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma \in K}}(x)$.

Оскільки $\forall \gamma_0 \in K$ множина V_{γ_0} є околом точки x_{γ_0} в просторі X_{γ_0} і $\lim\limits_{\mathfrak{F}} P_{\gamma_0} = x_{\gamma_0}$, то існує множина $A \in \mathfrak{F}$, така що $P_{\gamma_0}(A) \subset V_{\gamma_0}$, отже, $A \subset P_{\gamma_0}^{-1}\left(V_{\gamma_0}\right)$, тому $P_{\gamma_0}^{-1}\left(V_{\gamma_0}\right) \in \mathfrak{F}$. Таким чином, $\forall \gamma \in K\ \ P_\gamma^{-1}\left(V_\gamma\right) \in \mathfrak{F}$. Оскільки множина K є скінченою, $\bigcap\limits_{\gamma \in K} P_\gamma^{-1}\left(V_\gamma\right) \in \mathfrak{F}$.

Оскільки

$$\bigcap_{\gamma \in K} P_\gamma^{-1}\left(V_\gamma\right) \subset U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma \in K}}(x),$$

а $U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma \in K}}(x)$ утворюють в просторі $\prod\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ базу околів точки x (теорема 7.1), то

$$\bigcap_{\gamma \in K} P_\gamma^{-1}\left(U_\gamma\right) \subset U \quad \forall U \in \Omega_x.$$

Тому, за четвертою аксіомою фільтра $U \in \mathfrak{F}$.

Зауваження 7.3. Із теореми 7.1 випливає, що послідовність $x^{(n)} = \left\{ x_\gamma^{(n)} \right\}_{\gamma \in \Gamma}$ точок добутку $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ топологічних просторів збігається до точки x тоді і лише тоді, коли для кожного $\gamma \in \Gamma$ послідовність $\left\{ x_{\gamma_0}^{(n)} \right\}$ збігається в просторі X_{γ_0} до точки x_{γ_0}. Інакше кажучи, збіжність в тихоновській топології є покоординатною.

Теорема 7.3 (теорема Тихонова про добуток компактів). *Тихоновський добуток* $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ *будь-якого сімейства непорожніх топологічних просторів* $X_\gamma, \gamma \in \Gamma$ *є компактним тоді і лише тоді, коли усі* X_γ *є компактними.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай $X_\gamma, \gamma \in \Gamma$ — довільне сімейство непорожніх просторів і їх тихоновський добуток $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ є компактним. Оскільки кожна множина $X_\gamma, \gamma \in \Gamma$ є образом компактного простору $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, отриманим за допомогою неперервного відображення $P_\gamma : X \to X_\gamma$, то простори $X_\gamma, \gamma \in \Gamma$ є компактними (неперервний образ компактного простору є компактним простором).

Достатність. За критерієм компактності в термінах фільтрів, для того щоб простір був компактним, необхідно і достатньо, щоб кожний ультрафільтр на X збігався. Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр на $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$. Оскільки $X_\gamma, \gamma \in \Gamma$ —

компактні топологічні простори, то за критерієм компактності в термінах фільтрів $\forall\gamma\in\Gamma\,\exists y_\gamma=\lim\limits_{\mathfrak{A}}P_\gamma$. Оскільки P_γ — неперервні відображення, то за теоремою 7.2 $y=\left\{y_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma}=\lim\mathfrak{A}$.

Література

1. Кадец В.М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006 (с. 492–495).
2. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979 (с. 120–126, 230–234).