6. Топологія, що породжена сімейством відображень

Нехай на множині X задано сімейство відображень F, де відображення $f \in F$ діють у топологічні простори $f(X)$, які можуть бути різними. Для будь-якої точки $x \in X$, будь-якого скінченного сімейства відображень $\{f_k\}_{k=1}^n \subset F$ і відкритих околів V_k точок $f_k(x)$ в просторі $f_k(X)$ визначимо множини

$$U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x) = \bigcap_{k=1}^n f_k^{-1}(V_k).$$

Як відомо, якщо для кожної точки $x \in X$ задане непорожнє сімейство підмножин U_x, що має такі властивості:

1) якщо $U \in U_x$, то $x \in U$;
2) якщо $U_1, U_2 \in U$, то існує таке $U_3 \in U_x$, що $U_3 \subset U_1 \bigcap U_2$;
3) якщо $U \in U_x$ і $y \in U$, то існує така множина $V \in U_y$, що $V \subset U$,

то існує топологія τ на X, для якої сімейства U_x будуть базами околів відповідних точок.

Таким чином, на X існує топологія, для якої множини $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ утворюють базу околів точки x при всіх точках $x \in X$. Позначимо цю топологію як $\sigma(X,F)$. Зокрема, околами точок $x \in X$ в топології $\sigma(X,F)$ будуть всі множини $f^{-1}(V)$, де $f \in F$, а V — окіл точки

$f(x)$ в топологічному просторі $f(X)$. Отже, усі відображення сімейства F є неперервними в топології $\sigma(X,F)$.

Теорема 6.1. $\sigma(X,F)$ *— найслабкіша топологія серед усіх топологій на* X*, в яких усі відображення сімейства* F *є неперервними.*

Доведення. Нехай τ — довільна топологія, в якій усі відображення сімейства F є неперервними. Доведемо, що будь-яка множина $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ є околом точки x в топології τ. Звідси випливатиме, що $\tau \succ \sigma(X,F)$. За умовою, усі відображення $f_k : X \to f_k(X)$ є неперервними в топології τ. Отже, $f_k^{-1}(V_k)$ — це відкриті околи точки x в топології τ. Відкритим околом буде і скінченний перетин $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ таких множин.

Означення 6.1. *Топологія* $\sigma(X,F)$ *називається топологією, породженою сімейством відображень* F*, або слабкішою топологією, в якій усі відображення сімейства* F *є неперервними.*

Означення 6.2. *Сімейство відображень* F *розділяє точки множини* X*, якщо* $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ $\exists f \in F : f(x_1) \neq f(x_2)$.

Теорема 6.2. *Нехай усі простори* $f(X)$, $f \in F$ *є хаусдорфовими. Для того щоб топологія* $\sigma(X,F)$ *була віддільною за Хаусдорфом необхідно і достатньо, щоб сімейство відображень* F *розділяла точки множини* X*.*

Доведення. Достатність. Припустимо, що сімейство відображень F розділяє точки множини X. Тоді

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2\ \ \exists f \in F : f(x_1) \neq f(x_2).$$

Оскільки $f(X)$ — хаусдорфів простір, існують околи V_1, V_2 точок $f(x_1)$ і $f(x_2)$ відповідно. Множини $f^{-1}(V_1)$ і $f^{-1}(V_2)$ є шуканими околами в топології $\sigma(X,F)$, що розділяють точки x_1 і x_2.

Необхідність. Нехай сімейство відображень F не розділяє точок множини X. Тоді

$$\exists x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2\ \ \forall f \in F : f(x_1) = f(x_2).$$

Візьмемо довільний окіл $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x_1)$ точки x_1 в топології $\sigma(X,F)$. Оскільки $f_k(x_1) = f_k(x_2)$ для всіх $k = 1, 2, ..., n$, то й точка x_2 лежить в околі $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x_1)$. Отже, в топології $\sigma(X,F)$ не виконується навіть аксіома про віддільність, а не лише властивість Хаусдорфа.

Теорема 6.3. *Для того щоб фільтр* $\mathfrak{F}$ *на* X *збігався в топології* $\sigma(X,F)$ *до елемента x, необхідно і достатньо, щоб умова* $\lim\limits_{\mathfrak{F}} f = f(x)$ *для всіх* $f \in F$.

Необхідність. З огляду на неперервність усіх $f \in F$ в $\sigma(X, F)$ необхідність випливає з теореми 3.3.

Достатність. Нехай $\lim\limits_{\mathfrak{F}} f = f(x)$ для всіх $f \in F$. Доведемо, що будь-який окіл $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ є елементом фільтра $\mathfrak{F}$. За умовою, $\lim\limits_{\mathfrak{F}} f_k = f_k(x)$, отже $f_k^{-1}(V_k) \in \mathfrak{F}$ для усіх $k = 1, 2, ..., n$. Оскільки фільтр є замкненим відносно скінченого перетину елементів

$$U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x) = \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(V_k) \in \mathfrak{F}.$$

Література

1. Кадец В.М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006. (с.492–495).