5. Зв'язок між фільтрами і напрямленостями

Фільтри і напрямленості в одній множині X приводять до еквівалентних теорій збіжності. З одного боку, як було показано раніше, кожній напрямленості $\{x_s; s \in S\}$ в множині X відповідає асоційований з нею фільтр в X. З іншого боку, має місце така теорема.

Теорема 5.1. *Нехай $\mathfrak{F}$ — довільний фільтр в множині X. Тоді в цій множині існує напрямленість $\{x_s; s \in S\}$ така, що асоційований з нею фільтр збігається з фільтром $\mathfrak{F}$.*

Доведення. Розглянемо множину усіх можливих пар $s = (x, M)$, де $M \in \mathfrak{F}$, а $x \in M$. Уведемо в множині таких пар S частковий передпорядок, поклавши $(x, M) \le (y, N)$, якщо $M \supset N$. Таким чином, S — напрямлена множина.

Задамо відображення $f : S \to X$, поклавши

$$f(s) = x \quad \forall s = (x, M) \in S.$$

Нехай $s = (x, M)$ — довільний елемент з S, а $\hat{M}_s = \{f(t); t \ge s\}$. За означенням фільтра $\hat{\mathfrak{F}}$, асоційованого з напрямленістю $f : S \to X$, система підмножин $\hat{M}_s$, де s пробігає усі значення в множині S, утворює базу $\hat{\beta}$ фільтра $\hat{\mathfrak{F}}$.

Покажемо, що фільтр $\hat{\mathfrak{F}}$, асоційований з побудованою напрямленістю $f : S \to X$, збігається з фільтром $\mathfrak{F}$, тобто

$$\hat{\mathfrak{F}} \le \mathfrak{F} \text{ і } \mathfrak{F} \le \hat{\mathfrak{F}}.$$

1). Для того щоб довести, що $\hat{\mathfrak{F}} \le \mathfrak{F}$, треба показати, що

$$\forall \hat{M}_s \in \hat{\beta}\ \ \exists M \in \mathfrak{F} : M \subset \hat{M}_s .$$

Насправді має місце більш сильний факт:

$$\forall \hat{M}_s \in \hat{\beta}\ \ \exists M \in \mathfrak{F} : M = \hat{M}_s .$$

Дійсно, нехай $y \in \hat{M}_s$, тобто

$$\exists t = (z, N) \ge (x, M) = s :\ \ y = f(t),$$

тоді

$$y = z \in N \subset M\ \ \Rightarrow \hat{M}_s \subset M .$$

Тепер візьмемо довільну точку $z \in M$ і покладемо $t^* = (z, M)$. Оскільки $t^* \ge s = (x, M)$, то $f(t^*) = z \in \hat{M}_s$, тобто $M \subseteq \hat{M}_s$. Таким чином, $M = \hat{M}_s$. Отже,

$$\forall \hat{M}_s \in \hat{\beta}\ \ \exists M \in \mathfrak{F} : M = \hat{M}_s .$$

2). Покажемо, що має місце і обернене твердження: $\mathfrak{F} \le \hat{\mathfrak{F}}$. Для цього пересвідчимось, що

$$\forall M \in \mathfrak{F}\ \ \exists \hat{M}_s \in \hat{\beta} : \hat{M}_s = M .$$

Нехай x^* — довільний елемент з M і $s^* = (x^*, M)$. Повторимо міркування, наведені вище.

Нехай $s^* = (x^*, M)$ — довільний елемент з S, а $y^* \in \hat{M}_{s^*}$, тобто

$$\exists t^* = (z^*, N) \ge (x^*, M) = s^* :\ \ y = f(t^*),$$

тоді

$$y^* = z^* \in N \subset M\ \Rightarrow \hat{M}_{s^*} \subset M .$$

Тепер візьмемо довільну точку $z^* \in M$ і покладемо $t^* = \left(z^*, M\right)$. Оскільки $t^* \geq s^* = \left(x, M\right)$, то $f\left(t^*\right) = z^* \in \hat{M}_{s^*}$, тобто $M \subseteq \hat{M}_{s^*}$. Отже,

$$\forall M \in \mathfrak{F} \;\; \exists \hat{M}_s \in \hat{\beta} : M = \hat{M}_s ..$$

Таким чином, $\mathfrak{F} = \hat{\mathfrak{F}}$. □

Теорема 5.2. *Нехай* $\xi = \left\{x_s ; s \in S\right\}$ *— напрямленість в топологічному просторі X, а* $\mathfrak{F}$ *— асоційований з нею фільтр. Тоді кожна границя (відповідно, гранична точка) напрямленості* ξ *є границею (відповідно, граничною точкою) фільтра* $\mathfrak{F}$*, і навпаки.*

Доведення. Необхідність. Нехай $x_0 = \lim\limits_S x_s$. Покажемо, що фільтр $\mathfrak{F}$ мажорує фільтр $\mathfrak{F}_{x_0}$ околів точки x_0, тобто $x_0 = \lim \mathfrak{F}$. Нехай U_0 — довільний елемент $\mathfrak{F}_{x_0}$, тобто деякий окіл точки x_0 в просторі *X*. Тоді

$$x_0 = \lim_S x_s \Rightarrow \exists s_0 \in S : M_{s_0} = \left\{x_s ; s \geq s_0\right\} \subset U_0 .$$

Оскільки M_{s_0} — елемент бази фільтра, асоційованого з напрямленістю ξ, то $M_{s_0} \subset U_0 \Rightarrow U_0 \in \mathfrak{F}$. Отже,

$$\mathfrak{F} \supset \mathfrak{F}_{x_0} \Rightarrow x_0 = \lim \mathfrak{F} .$$

Достатність. Нехай $x_0 = \lim \mathfrak{F}$. Отже, будь-який окіл U_0 точки x_0 є елементом фільтра $\mathfrak{F}$. За означенням, множини $M_s = \left\{x_t ; t \geq s\right\}$ утворюють базу фільтра $\mathfrak{F}$, тому $\exists M_{s_0} \subset U_0$. Отже, для будь-якого околу U_0 точки x_0

існує $s_0 \in S$, такий що усі члени напрямленості ξ при $s \geq s_0$ лежать в U_0, тобто $x_0 = \lim\limits_S x_s$. □

Означення 5.1. *Напрямленість $\{x_s; s \in S\}$ в множині X називається* ***універсальною****, якщо для будь-якої підмножини $M \subset X$ вона або майже вся лежить в M, або майже вся лежить в $X \setminus M$.*

Теорема 5.3. *Напрямленість в X є універсальною тоді і лише тоді, коли асоційований з нею фільтр є ультрафільтром.*

Доведення. Необхідність. Нехай $\xi = \{x_s; s \in S\}$ — універсальна напрямленість в X, $\mathfrak{F}$ — асоційований з нею фільтр, а M — довільна підмножина з X. Покажемо, що або M, або $X \setminus M$ належать фільтру $\mathfrak{F}$, звідки випливає, що $\mathfrak{F}$ — ультрафільтр (теорема 4.2).

Оскільки $\xi = \{x_s; s \in S\}$ — універсальна напрямленість в X, то вона майже вся лежить або в M, або в $X \setminus M$, тобто існує індекс $s_0 \in S$, такий що множина $M_{s_0} = \{x_s : s \geq s_0\}$ цілком міститься або в M, або в $X \setminus M$. Але оскільки M_{s_0} належить базі фільтра $\mathfrak{F}$, то або M, або $X \setminus M$ містить M_{s_0}, тобто є елементом фільтра $\mathfrak{F}$.

Достатність. Нехай $\mathfrak{F}$ — ультрафільтр, а M — довільна підмножина з X. Доведемо, що $\xi = \{x_s; s \in S\}$ майже вся лежить або в M, або в $X \setminus M$. Оскільки або M, або $X \setminus M$ є елементом фільтра $\mathfrak{F}$, то одна з цих множин повинна цілком містити деяку множину з бази фільтра $\mathfrak{F}$, тобто деяку множину M_{s_0}. Це значить, що $\xi = \{x_s; s \in S\}$ майже вся лежить або в M, або в $X \setminus M$. Отже, ξ — універсальна напрямленість в X.

Література

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 101–113).