4. Ультрафільтри. Критерій компактності

Лема 4.1. *Нехай* $\mathfrak{M}$ *— лінійно упорядковане непорожнє сімейство фільтрів, заданих на множині X, тобто для довільних* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$ *або* $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$*, або* $\mathfrak{F}_2 \supset \mathfrak{F}_1$*. Тоді об'єднання* $\mathfrak{F}$ *усіх фільтрів сімейства* $\mathfrak{M}$ *теж буде фільтром на X.*

Доведення. Перевіримо виконання аксіом фільтра для сімейства множин $\mathfrak{M}$. Аксіоми 1 і 2 є очевидними, тому перевіримо дві останніх.

3). Нехай $A, B \in \mathfrak{F}$. Тоді існують такі $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$, що $A \in \mathfrak{F}_1$, $B \in \mathfrak{F}_2$. За умовою, один з фільтрів $\mathfrak{F}_1$ *і* $\mathfrak{F}_2$ мажорує інший. Нехай $\mathfrak{F}_2 \supset \mathfrak{F}_1$. Тоді обидві множини $A, B \in \mathfrak{F}_2$. Оскільки $\mathfrak{F}_2$ — фільтр, то $A \bigcap B \in \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}$.

4). Нехай $A \in \mathfrak{F}$, $A \subset B \subset X$. Тоді існує такий $\mathfrak{F}_1 \in \mathfrak{M}$, такий що $A \in \mathfrak{F}_1$. Оскільки $\mathfrak{F}_1$ — фільтр, то $B \in \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$. □

Означення 4.1. ***Ультрафільтром*** *на X називається максимальний за включенням фільтр на X, інакше кажучи, фільтр* $\mathfrak{A}$ *на X називається ультрафільтром, якщо будь-який фільтр* $\mathfrak{F}$ *на X, що мажорує* $\mathfrak{A}$*, збігається з* $\mathfrak{A}$.

Теорема 4.1. *Для будь-якого фільтра* $\mathfrak{F}$ *на X існує ультрафільтр, що його мажорує.*

Доведення. Витікає з леми Цорна. □

Лема 4.2. *Нехай* $\mathfrak{A}$ *— ультрафільтр,* $A \subset X$ *і всі елементи ультрафільтра перетинаються з A. Тоді* $A \in \mathfrak{A}$.

Доведення. Легко бачити, що додавши до сімейства множин $\mathfrak{A}$ як елемент множину *A*, ми отримаємо центровану систему множин. За теоремою 2.2 існує фільтр $\mathfrak{F}$, що містить усі елементи цього центрованого сімейства. Отже, $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр, тобто $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$. З іншого боку, за побудовою $A \in \mathfrak{F}$. Таким чином, $A \in \mathfrak{A}$.

Теорема 4.2 (критерій ультрафільтра). *Для того щоб фільтр $\mathfrak{A}$ на X був ультрафільтром, необхідно і достатньо, щоб для довільної множини $A \subset X$ або сама множина A, або $X \setminus A$ належало фільтру $\mathfrak{A}$.*

Доведення. Необхідність. Нехай $\mathfrak{A}$ — *ультрафільтр і* $X \setminus A \notin \mathfrak{A}$. Тоді жодна множина $B \in \mathfrak{A}$ не міститься цілком в $X \setminus A$, тобто будь-яке $B \in \mathfrak{A}$ перетинається з A. Отже, за лемою 4.2 $A \in \mathfrak{A}$.

Достатність. Припустимо, що $\mathfrak{A}$ — *не ультрафільтр.* Тоді існує фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$ і множина $A \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$. За побудовою, $A \notin \mathfrak{A}$. З іншого боку, $X \setminus A$ не перетинається з A, $A \in \mathfrak{F}$, отже, $X \setminus A \notin \mathfrak{F}$, а отже, і меншому фільтру $\mathfrak{A}$.□

Наслідок 4.1. *Образ ультрафільтра є ультрафільтром.*

Доведення. Нехай $f : X \to Y$ і $\mathfrak{A}$ — *ультрафільтр на X.* Розглянемо довільну множину $A \subset Y$. Тоді або $f^{-1}(A)$, або $f^{-1}(Y \setminus A) = Y \setminus f^{-1}(A)$ належить $\mathfrak{A}$, отже, або $A \in f[\mathfrak{A}]$, або $Y \setminus A \in f[\mathfrak{A}]$.□

Лема 4.3. *Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр на хаусдорфовому топологічному просторі X і $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{A})$. Тоді $x = \lim \mathfrak{A}$. Зокрема, ультрафільтр не може мати більше однієї граничної точки.*

Доведення. Нехай $U \in \Omega_x$. Тоді за означенням граничної точки окіл U перетинається зо всіма елементами ультрафільтра $\mathfrak{A}$. За лемою 4.2 $U \subset \mathfrak{A}$.□

Теорема 4.3 (критерій компактності в термінах ультрафільтрів). *Для хаусдорфового топологічного простору X нижченаведені умови є еквівалентними:*

X — *компакт*.

Кожний ультрафільтр на X має граничну точку.

Кожний ультрафільтр на X має границю.

Доведення. 1 $\Rightarrow$ 2. Фільтр $\mathfrak{F}$ — центроване сімейство множин. Тим більше, центрованим буде сімейство замикань елементів фільтра. Отже, перетин $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$ цих замикань не є порожнім.

2 $\Rightarrow$ 1. Нехай $\mathfrak{C}$ — довільна центрована система множин замкнених підмножин простору X. За теоремою 2 лекції 2 існує фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$. Тоді $\bigcap_{A\in\mathfrak{C}} \overline{A} \supset \bigcap_{A\in\mathfrak{F}} \overline{A} = \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$.

2 $\Rightarrow$ 3. За умовою 2, кожний ультрафільтр має граничну точку, а за лемою 4.3 ця точка буде границею ультрафільтра.

3 $\Rightarrow$ 2. Розглянемо довільний фільтр $\mathfrak{F}$ на X і виберемо (теорема 4.1) ультрафільтр $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}$. За умовою 3 ультрафільтр $\mathfrak{A}$ має границю $x \in X$. Згідно твердження 3) теореми 3.3 точка x є граничною точкою фільтра $\mathfrak{F}$.□

Наслідок 4.2. *Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр на E, X — топологічний простір і образ функції $f: E \to X$ лежить в деякому компакті $K \subset X$. Тоді існує $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f$.*

Доведення. Розглянемо f як функцію, що діє з E в K. Оскільки (наслідок 4.1) $f[\mathfrak{A}]$ ультрафільтр на компакті K, існує $\lim f[\mathfrak{A}]$. Отже, за означенням, $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f = \lim f[\mathfrak{A}]$.

Література

1. Кадец В.М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006 (с.484–490).