3. Границі і граничні точки фільтрів

Озн. 3.1. *Нехай на множині X задані фільтри* $\mathfrak{F}_1$ *і* $\mathfrak{F}_2$. *Говорять, що* $\mathfrak{F}_1$ *мажорує* $\mathfrak{F}_2$, *якщо* $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$, *тобто кожний елемент фільтра* $\mathfrak{F}_2$ *одночасно є елементом фільтра* $\mathfrak{F}_1$.

Приклад 3.1. Нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність в *X*, а $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ — її підпослідовність. Тоді фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$, асоційований з підпослідовністю, мажорує фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, асоційований з самою послідовністю. Дійсно, нехай $A\in\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$. Тоді існує таке $N\in\mathbb{N}$, що $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}\subset A$. Але тоді й $\{x_{n_k}\}_{k=N}^{\infty}\subset A$, тобто $A\in\mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$.

Озн. 3.2. *Нехай X — топологічний простір,* $\mathfrak{F}$ *— фільтр на X. Точка* $x\in X$ *називається* ***границею фільтра*** $\mathfrak{F}$ (цей факт позначається як $x=\lim\mathfrak{F}$), якщо $\mathfrak{F}$ *мажорує фільтр околів точки x. Іншими словами,* $x=\lim\mathfrak{F}$, *якщо кожний окіл точки x належить фільтру* $\mathfrak{F}$.

Озн. 3.3. *Точка* $x\in X$ *називається* ***граничною точкою фільтра*** $\mathfrak{F}$, *якщо кожний окіл точки x перетинається з усіма елементами фільтра* $\mathfrak{F}$. *Множина усіх граничних точок фільтра називається* $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$.

Приклад 3.2. Нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність в топологічному просторі *X. Тоді* $x=\lim\mathfrak{F}_{\{x_n\}}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, а

$x \in \mathrm{LIM}\left(\mathfrak{F}_{\{x_n\}}\right)$ збігається з множиною граничних точок послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Теорема 3.1. *Нехай* $\mathfrak{F}$ *— фільтр на топологічному просторі X,* $\mathfrak{D}$ *— деяка база фільтра* $\mathfrak{F}$*. Тоді*

1) $x = \lim \mathfrak{F} \Leftrightarrow \forall U \in \Omega_x\ \exists A \in \mathfrak{D} : A \subset U$;
2) $x = \lim \mathfrak{F} \Rightarrow x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$. *Якщо до того ж X — хаусдорфів простір, то у фільтра* $\mathfrak{F}$ *немає інших граничних точок. Зокрема, якщо у фільтра в хаусдорфовому просторі є границя, то ця границя є єдиною;*
3) *множина* $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$ *збігається з перетином замикань усіх елементів фільтра* $\mathfrak{F}$.

Доведення.

1). $x = \lim \mathfrak{F} \Leftrightarrow \forall U \in \Omega_x : U \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{F}\ \exists A \in \mathfrak{D} : A \subset U$.

2). $x = \lim \mathfrak{F}$, $U \in \Omega_x \Rightarrow U \in \mathfrak{F} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall A \in \mathfrak{F}\ A \bigcap U \neq \varnothing \Rightarrow x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$.

$x = \lim \mathfrak{F}$, $y \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$, $U \in \Omega_x$, $V \in \Omega_y \Rightarrow U \in \mathfrak{F}$;

$x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}) \Rightarrow \forall U \in \mathfrak{F}, V \in \Omega_y : U \bigcap V \neq \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow x = y$ (оскільки простір хаусдорфів).

3). За означенням,

$x = \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}) \Leftrightarrow \forall A \in \mathfrak{F}, U \in \Omega_x : A \bigcap U \neq \varnothing \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A}\ \forall A \in \mathfrak{F}$. □

Теорема 3.2. *Нехай* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ *— фільтр на топологічному просторі X і* $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. *Тоді*

1) $x = \lim \mathfrak{F}_1 \Rightarrow x = \lim \mathfrak{F}_2$;

2) $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_2) \Rightarrow x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_1)$;

3) $x = \lim \mathfrak{F}_2 \Rightarrow x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_1)$.

Доведення.

1). $\mathfrak{F}_1$ мажорує фільтр $\mathfrak{M}_x$ околів точки x, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathfrak{M}_x \subset \mathfrak{F}_2$.

2). Оскільки при збільшенні кількості множин їх перетин зменшується,

$$\mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_2) = \bigcap_{A \in \mathfrak{F}_2} \overline{A} \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{F}_1} \overline{A} = \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_1).$$

3). $x = \lim \mathfrak{F}_2 \Rightarrow x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_2) \Rightarrow x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}_1)$. □

Озн. 3.4. *Нехай* X *— множина,* Y *— топологічний простір,* $\mathfrak{F}$ *— фільтр на* X*. Точка* $y \in Y$ *називається* ***границею функції*** $f : X \to Y$ ***по фільтру*** $\mathfrak{F}$ (*цей факт позначається як* $y = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$), *якщо* $y = \lim f[\mathfrak{F}]$. *Іншими словами,* $y = \lim f[\mathfrak{F}]$, *якщо для довільного околу* U *точки y існує такий елемент* $A \in \mathfrak{F}$, *що* $f(A) \subset U$.

Озн. 3.5. *Точка* $y \in Y$ *називається* ***граничною точкою функції*** $f : X \to Y$ ***по фільтру*** $\mathfrak{F}$, *якщо* $y \in \mathrm{LIM}(f[\mathfrak{F}])$, *тобто якщо довільний окіл точки y перетинається з образами усіх елементів фільтра* $\mathfrak{F}$.

Приклад 3.3. Нехай X — топологічний простір, $f:\mathbb{N}\to X$ и $\mathfrak{F}$— фільтр Фреше на $\mathbb{N}$. Тоді $\lim\limits_{\mathfrak{F}} f = \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$.

Теорема 3.3. *Нехай X і Y — топологічні простори,* $\mathfrak{F}$ — *фільтр на X,* $x = \lim \mathfrak{F}$ *і* $f: X \to Y$ *— неперервна функція. Тоді* $f(x) = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$.

Доведення. Нехай U — довільний окіл точки $f(x)$. Тоді існує окіл V точки x, для якого $f(V)\subset U$. Умова $x = \lim \mathfrak{F}$ означає, що $V \in \mathfrak{F}$. Інакше кажучи, для довільного околу U точки $f(x)$ ми знайшли шуканий елемент $V \in \mathfrak{F}$: $f(V)\subset U$. □

Література

2. Кадец В.М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006. (с.484–488).