2. Фільтри і бази фільтрів

Окрім збіжності напрямленостей, існує ще один вид узагальненої збіжності — збіжність фільтрів. Ця ідея базується на альтернативному означенні збіжної послідовності: послідовність x_n називається збіжною до точки x_0, якщо для будь-якого околу U цієї точки доповнення до прообразу $f^{-1}(U)$ є скінченною підмножиною з $\mathbb{N}$, де $f:\mathbb{N}\to X$ — відображення, що задає послідовність. Якщо множину $\mathbb{N}$ замінити абстрактною множиною *E*, в якому виділено сімейство підмножин $\mathfrak{F}$, що має певні загальні властивості, то можна дати розумне означення узагальненої збіжності.

Озн. 2.1. *Сімейство підмножин* $\mathfrak{F}$ *множини X називається **фільтром на X**, якщо:*

1. *Сімейство* $\mathfrak{F}$ *є непорожнім.*

2. $\varnothing\notin\mathfrak{F}$.

3. *Якщо* $A,B\in\mathfrak{F}$, *то* $A\bigcap B\in\mathfrak{F}$.

4. *Якщо* $A\in\mathfrak{F}$, $A\subset B\subset X$, то $B\in\mathfrak{F}$.

Наслідок 2.1. $X\in\mathfrak{F}$.

Наслідок 2.2. $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathfrak{F}\Rightarrow\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathfrak{F}$.

Наслідок 2.3. $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathfrak{F}\Rightarrow\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\neq\varnothing$.

Приклад 2.1. Система Ω_x усіх околів точки *x* в топологічному просторі *X* є фільтром.

Озн. 2.2. *Непорожнє сімейство підмножин $\mathfrak{D}$ множини X називається **базою фільтра**, якщо:*

a) $\varnothing \notin \mathfrak{D}$,

b) $\forall A, B \in \mathfrak{D}\ \exists C \in \mathfrak{D} : C \subset A \bigcap B$.

Озн. 2.3. *Нехай $\mathfrak{D}$ — база фільтра. **Фільтром, що породжений базою** $\mathfrak{D}$, називається сімейство $\mathfrak{F}$ усіх множин $A \subset X$, що містять як підмножину хоча б один елемент бази $\mathfrak{D}$.*

Задача 2.1. Довести, що фільтр, породжений базою, задовольняє умови 1–4 означення 2.1, тобто дійсно є фільтром.

Приклад 2.2. Якщо *X* — топологічний простір, $x_0 \in X$, $\mathfrak{D}$ — сукупність усіх відкритих множин, що містять x_0, то фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$, є фільтром $\mathfrak{M}_{x_0}$, що складається з усіх множин, що містять точку x_0.

Озн. 2.4. Нехай $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність елементів множини *X*. Тоді сімейство $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$ “хвостів” послідовності $\left\{x_n\right\}_{n=N}^{\infty}$ є базою фільтра. Фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, породжений базою $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$, називається ***фільтром, асоційованим з послідовністю*** $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 2.1. *Нехай X, Y — множини, $f : X \to Y$ — функція, $\mathfrak{D}$ — база фільтра в X. Тоді сімейство $f\left(\mathfrak{D}\right)$ усіх множин виду $f\left(A\right), A \in \mathfrak{D}$ є базою фільтра в Y.*

Доведення. Виконання аксіоми a) бази фільтра є очевидним. Нехай $f\left(A\right), f\left(B\right)$ — довільні елементи сімейства $f(\mathfrak{D})$, $A, B \in \mathfrak{D}$. За аксіомою b) існує таке $C \in \mathfrak{D}$, що $C \subset A \bigcap B$. Тоді $f(C) \subset f(A) \bigcap f(B)$. Отже аксіома b) виконується і для сімейства $f(\mathfrak{D})$.

Наслідок 2.4. $\mathfrak{F}$ — фільтр на *X*, то $f(\mathfrak{F})$ — база фільтра в *Y*.

Озн. 2.5. ***Образом фільтра*** $\mathfrak{F}$ *при відображенні* f *називається фільтр* $f[\mathfrak{F}]$, *породжений базою* $f(\mathfrak{F})$, *тобто*

$$A \in f[\mathfrak{F}] \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}.$$

Теорема 2.2. *Нехай* $\mathfrak{C} \subset 2^X$ *— непорожнє сімейство множин. Для того щоб існував фільтр* $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$ (*тобто такий, що усі елементи сімейства* $\mathfrak{C}$ *є елементами фільтра* $\mathfrak{F}$) *необхідно і достатньо, щоб* $\mathfrak{C}$ *було центрованим сімейством.*

Доведення. Необхідність. Якщо $\mathfrak{F}$ — фільтр і $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$, то будь-який скінчений набір $A_1, A_2, \ldots, A_n$ елементів сімейства $\mathfrak{C}$ буде складатися з елементів фільтра $\mathfrak{F}$. Отже, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \varnothing$.

Достатність. Нехай $\mathfrak{C}$ — центроване сімейство. Тоді сімейство $\mathfrak{D}$ усіх множин виду $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$, де $n \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{C}$ буде базою фільтра. Як фільтр $\mathfrak{F}$ треба взяти фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$.

Озн. 2.6. *Нехай* $\mathfrak{F}$ *— фільтр на X. Сімейство множин* $\mathfrak{D}$ *називається* ***базою фільтра*** $\mathfrak{F}$, *якщо* $\mathfrak{D}$ *— це база фільтра і фільтр, породжений базою* $\mathfrak{D}$, збігається з $\mathfrak{F}$.

Теорема 2.3. *Для того щоб* $\mathfrak{D}$ *було базою фільтра* $\mathfrak{F}$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалися дві умови:*

1. $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$,
2. $\forall A \in \mathfrak{F}\ \exists B \in \mathfrak{D} : B \subset A$.

Озн. 2.7. *Нехай* $\mathfrak{F}$ *— фільтр на X і* $A \subset X$. ***Слідом фільтра*** $\mathfrak{F}$ ***на*** A *називається сімейство підмножин* $\mathfrak{F}_A = \left\{ A \bigcap B : B \in \mathfrak{F} \right\}$.

Теорема 2.4. *Для того щоб сімейство* $\mathfrak{F}_A$ *було фільтром на A, необхідно і достатньо, щоб усі перетини* $A \bigcap B : B \in \mathfrak{F}$ *були непорожніми.*

Наслідок 2.5. $\mathfrak{F}_A$ *— фільтр, якщо* $A \in \mathfrak{F}$.

Література

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 99–102).
2. Кадец В.М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006. (с.481–484).