1. Напрямленості та їх границі

Як добре відомо, в основі усіх основних понять і конструкцій математичного аналізу (неперервності, диференційовністі, інтегрованісті, сумування рядів тощо) лежить концепція збіжності. В основному курсі функціонального аналізу ми показали, що за допомогою цієї концепції в топологічних просторах, що задовольняють першу аксіому зліченості, можна навіть задавати топологію.

Концепція збіжності містить в собі два поняття: послідовність і границю. Спочатку в математиці розглядалися лише послідовності дійсних чисел. Згодом теорію розповсюдили на послідовності точок в метричному просторі, і, нарешті, узагальнили для послідовності точок в довільному топологічному просторі.

Прагнення вийти за межі просторів, що задовольняють першу аксіому зліченості, в 1920-х роках привело до узагальнення поняття границі звичайних послідовностей на узагальнену послідовність (збіжність за Муром–Смітом) і появи теорії напрямленостей. В 1930-х роках французький математик А.Картан розробив загальну теорію збіжності, яка заснована на поняттях фільтра, ультрафільтра та їх границь. Ця теорія є універсальною. Вона заміняє теорію Мура–Сміта і суттєво спрощує загальну теорію збіжності.

Для того щоб глибше зрозуміти зміст цих теорій, доцільно детально їх розглянути та порівняти.

Нагадаємо деякі означення із теорії множин.

Озн. 1.1. *Нехай A — довільна множина. Позначимо як* $A \times A$ *сукупність усіх упорядкованих пар* (*a*, *b*)*, де* $a, b \in A$. *Говорять, що в множині A задано* ***бінарне відношення*** *R, якщо в* $A \times A$ *виділено довільну підмножину R. Елемент a перебуває у відношенні R з елементом b, якщо пара* (*a*, *b*)*, належить R.*

Приклад 1.1. Бінарним відношенням є, наприклад, тотожність. Множиною R у цьому випадку є діагональ $(a,a) \in A \times A$.

Озн. 1.2. *Бінарне відношення, задане в множині A, називається відношенням* ***часткового передупорядкування****, якщо воно є рефлексивним і транзитивним, тобто*

1) $(a,a) \in R$ *— рефлексивність,*

2) $(a,b) \in R, (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ *— транзитивність.*

Озн. 1.3. *Бінарне відношення, задане в множині A, називається відношенням* ***часткового упорядкування****, якщо воно є рефлексивним, транзитивним і антисиметричним, тобто*

1) $(a,a) \in R$ *— рефлексивність,*

2) $(a,b) \in R, (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ *— транзитивність,*

3) $(a,b) \in R, (b,a) \in R \Rightarrow a = b$ *— антисиметричність.*

Озн. 1.4. *Множина A із заданим на ньому відношенням часткового упорядкування (передупорядкування) називається* ***частково упорядкованою (передупорядкованою) множиною****.*

В частково упорядкованих множинах за традицією відношення xRy позначають як $x \le y$ або $y \ge x$.

Озн. 1.5. *Частково упорядкована множина S називається* ***фільтрівною вправо****, або* ***напрямленням за зростанням****, або просто* ***напрямленою множиною****, якщо*

$$\forall s_1, s_2 \in S \; \exists s \in S : s \ge s_1, \, s \ge s_2.$$

Приклад 1.2. Множина натуральних чисел із природним упорядкуванням є напрямленою.

Приклад 1.3. Нехай x — фіксована точка топологічного простору X, а Ω_x — сукупність усіх околів цієї точки. Введемо в множині Ω_x відношення упорядкування за оберненим включенням:

$$V \subset U \Rightarrow V \geq U.$$

Оскільки

$$\forall U_1, U_2 \in \Omega_x \quad U_1 \bigcap U_2 \geq U_1, U_1 \bigcap U_2 \geq U_2,$$

то множина Ω_x є ***напрямленою множиною*** усіх околів точки x в просторі X.

Розглянемо довільну множину X і деяку послідовність його елементів x_n. Послідовність x_n можна трактувати як відображення

$$f : \mathbb{N} \to X,$$

де $x_n = f(n)$.

Якщо замінити множину $\mathbb{N}$ довільною напрямленою множиною S, отримаємо означення узагальненої послідовності, або напрямленості.

Озн. 1.6. *Будь-яке відображення напрямленої множини називається* ***напрямленістю****, або* ***узагальненою послідовністю****, або* ***сіткою****. До того ж, якщо $f : S \to X$ — напрямленість, то напрямлена множина S називається* ***областю визначеності напрямленості*** *f, а множина $f(S)$ —* ***областю її значень****.*

Зауваження 1.1. Будь-яка послідовність елементів простору X є напрямленістю в X з областю визначення $\mathbb{N}$.

Для зручності значення f_s напрямленості $f : S \to X$ на елементі $s \in S$ часто позначають як x_s, а саму напрямленість f подають як множину $\{x_s; s \in S\}$.

Приклад 1.4. Нехай Ω_x — напрямлена множина усіх околів точки *x* простору *X*. Вибираючи по одній точці x_U з кожного околу $U \subset \Omega_x$, ми отримуємо напрямленість $\{x_U; U \in \Omega_x\}$.

Озн. 1.7. *Говорять, що напрямленість* $f: S \to X$ *починаючи з деякого місця* ***належить,*** *або* ***майже вся лежить*** *в підмножині* $A \subset X$, *якщо існує* $s_0 \in S$, *таке що* $\forall s \geq s_0 \ \ x_s \in A$.

Озн. 1.8. *Якщо* $\forall s \in A \ \ \exists t \geq s: \ \ x_t \in A$, *то говорять, що напрямленість* $f: S \to X$ *є* ***частою*** *в підмножині* $A \subset X$ ***(часто буває в А)***.

Зауваження 1.2. Якщо напрямленість $f: S \to X$ є частою в *A*, то вона не може майже вся лежати в доповненні $X \setminus A$. І навпаки, якщо напрямленість майже вся лежить в доповненні $X \setminus A$, то воне не може бути частою в *A*.

Озн. 1.9. *Напрямленість* $f: S \to X$ *в топологічному просторі* X *називається* ***збіжною*** *до точки* $x_0 \in X$, *якщо вона майже вся лежить в будь-якому околі точки* x_0, *тобто якщо для довільного околу U цієї точки знайдеться елемент* $s_U \in S$, *такий що* $\forall s \geq s_U \ x_s \in U$. *Точка* $x_0 = \lim\limits_S x_s$ *називається границею напрямленості* $f: S \to X$.

Приклад. 1.5. Кожна збіжна послідовність в просторі X є збіжною напрямленістю в *X,* границя якої є границею послідовності.

Приклад 1.6. Нехай $\{x_U; U \in \Omega_x\}$ — напрямленість в просторі *X.* Легко бачити, що ця напрямленість збігається до точки *x*. Дійсно, нехай U_0 — довільний окіл точки *x*. Тоді $\forall U \geq U_0 \ \ x \in U \subset U_0$, тобто ця напрямленість майже вся лежить в довільному околі точки *x*.

Напрямленість, як і послідовність, в загальних топологічних просторах може мати різні границі. В хаусдорфових просторах вона має одну границю.

Озн. 1.10. *Напрямленість* $g: T \to X$ *називається* ***піднапрямленістю*** *напрямленості* $f: S \to X$*, якщо існує відображення* $h: T \to S$*, таке що* $g = f \circ h$ *і* $\forall s_0 \in S\ \exists t_0 \in T$ *таке що* $\forall t \geq t_0\ h(t) \geq s_0$.

Зауваження 1.3. На відміну від означення звичайної підпослідовності, означення піднапрямленості допускає, щоб область визначення піднапрямленості не була частиною області визначення напрямленості.

Озн. 1.11. *Частково упорядкована множина X є* ***конфінальною*** *своїй підмножині A, якщо в X не існує жодного елемента, що є наступним за усіма елементами множини A.*

Приклад 1.7. Інтервал $0 < t < 1$ є конфінальним множині $\left\{ \frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N} \right\}$.

Якщо $T \subset S$, а h — відображення вкладення, то друга умова еквівалентна конфінальності *T* в *S*. І навпаки, для будь-якої конфінальної частини T з S і будь-якої напрямленості $f: S \to X$ звуження f на T є піднапрямленістю напрямленості *f*.

Теорема Бірхгофа. *Нехай A — деяка підмножина довільного топологічного простору X. Тоді* $x \in \overline{A}$ *тоді і лише тоді, коли існує напрямленість в A, що збігається до точки x.*

Доведення. Необхідність. Нехай $x \in \overline{A}$ і Ω_x — напрямлена множина усіх околів точки *x*. Оскільки

$$\forall U \in \Omega_x \quad A \bigcap U \neq \varnothing,$$

то, вибираючи по одній точці $x_U \in A \bigcap U$, отримуємо напрямленість $\{x_U; U \in \Omega_x\}$ в *A*, що збігається до точки *x*.

Достатність. Нехай $\{x_s; s \in S\}$ — напрямленість в *A*, що збігається в *X* до точки *x*. Тоді за означенням границі напрямленості

$$\forall U \in \Omega_x \ \ \exists s_0 \in S: \ x_s \in U \ \ \forall s \geq s_0 .$$

Отже,

$$A \bigcap U \neq \varnothing \ \Rightarrow \ x_0 \in \overline{A} . \square$$

Нагадаємо, що в просторах із першою аксіомою зліченності неперервність відображення f в довільній точці x_0 була еквівалентною умові, що з $x_n \to x_0$ випливає $f(x_n) \to f(x_0)$. Перехід від послідовностей до напрямленостей дозволяє відмовитись від цієї умови.

Теорема (критерій неперервності). *Відображення* $f: X \to Y$ *є неперервним в точці* x_0 *тоді і лише тоді, коли для будь-якої напрямленості* $\{x_s; s \in S\}$*, що збігається до точки* $x_0 \in X$ *напрямленість* $\{f(x_s); s \in S\}$ *збігається то точки* $f(x_0) \in Y$.

Доведення. *Необхідність*. Нехай $f: X \to Y$ є неперервною в точці x_0 і $\{x_s; s \in S\}$ — деяка напрямленість в *X*, що збігається до точки x_0. Нехай також V_0 — довільний окіл точки $f(x_0)$ в *Y*. Тоді достатньо пересвідчитись, що напрямленість $\{f(x_s); s \in S\}$ майже вся лежить в V_0. Справді, оскільки відображення f є неперервним в точці x_0, існує окіл U_0 точки x_0, такий що $f(U_0) \subset V_0$. Оскільки напрямленість $\{x_s; s \in S\}$ збігається до x_0, то знайдеться індекс $s_0 \in S$ такий, що при всіх $s \geq s_0$

$x_s \in U_0$. Отже, для всіх $s \geq s_0$ $f\left(x_s\right) \in V_0$, а це значить, що майже вся напрямленість $\left\{f\left(x_s\right); s \in S\right\}$ лежить в V_0.

Достатність. Припустимо, що умови теореми виконуються, але відображення f не є неперервним в точці x_0. Тоді існує такий окіл V_0 точки $f\left(x_0\right)$, що в будь-якому околі U точки x_0 знайдеться точка x_U, образ $f\left(x_U\right)$ якої належить $Y \setminus V_0$. Розглянемо напрямленість $\left\{x_U; U \in \Omega_{x_0}\right\}$, де Ω_{x_0} — напрямлена множина усіх околів точки x_0. Очевидно, що ця напрямленість збігається до точки x_0. Проте напрямленість $\left\{f\left(x_U\right); U \in \Omega_{x_0}\right\}$ не може збігатися до точки $f\left(x_0\right)$, оскільки в такому випадку вона майже вся лежала б в околі V_0. Отримане протиріччя доводить достатність. $\square$

Література

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 91–98).
2. Келли Дж. Общая топология. — М.: Наука, 1966 (с. 91–118).