

Лекція 10. Основні ітераційні методи

Опишемо п'ять основних ітераційних методів: Річардсона (RF), Якобі (J), Гаусса-Зейделя (GS), послідовної верхньої релаксації (SOR) і симетричної верхньої релаксації (SSOR), вважаючи, що матриця A є симетричною і додатно визначеною.

Для оцінки швидкості збіжності будемо використовувати модельну задачу Діріхле.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad 0 < x, y < 1,$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial S, \quad S = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

Її скінченно-різницева апроксимація має вигляд:

$$4x_{ij} - x_{i+1j} - x_{i-1j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1} = -h^2 f(x_i, y_j).$$

Метод Річардсона

$$x^{(n+1)} = (I - A)x^{(n)} + b.$$

Матриця переходу методу Річардсона має вигляд $G = I - A$. Матриця розщеплення Q , тобто така, що $G = I - Q^{-1}A$, очевидно, є одиничною. Оскільки матриця A є симетричною і додатно визначеною, то метод Річардсона є симетризованим, а його матрицею симетризації є матриця $W = I$ оскільки $W(I - G)W^{-1}$.

Якщо λ_i — власні числа матриці A , то власні числа матриці $G = I - A$ дорівнюють $1 - \lambda_i$. Отже,

$$S(I) = \max \{ |1 - m(A)|, |1 - M(A)| \}.$$

Таким чином, метод Річардсона збігається тоді і лише тоді, коли

$$M(A) < 2.$$

Будь-який оптимальний екстрапольований метод на основі методу Річардсона завжди є збіжним. Цей метод можна записати як

$$x^{(n+1)} = (I - \bar{\gamma})Ax^{(n)} + \bar{\gamma}b,$$

де $\bar{\gamma} = \frac{2}{2 - M(G) - m(G)} = \frac{2}{M(G) + m(G)}$. Спектральний радіус відповідної матриці $G_{[\bar{\gamma}]} = I - \bar{\gamma}A$ дорівнює

$$S(I - \bar{\gamma}A) = \frac{M(A) - m(A)}{M(A) + m(A)} = \frac{\text{cond}A - 1}{\text{cond}A + 1}.$$

Отже, швидкість збіжності екстрапольованого методу Річардсона дорівнює

$$R_{\infty}(I - \bar{\gamma}A) = -\ln \frac{\text{cond}A - 1}{\text{cond}A + 1} \sim \frac{2}{\text{cond}A}.$$

Для модельної задачі

$$R_{\infty}(I - \bar{\gamma}A) \sim \frac{1}{2} \pi^2 h^2, \quad h \rightarrow 0.$$

Метод Якобі

Припустимо, що матрицю A можна розбити на блоки:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{q1} & A_{q2} & \dots & A_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_q \end{pmatrix},$$

де матриця A_{ij} — блок розміром $n_i \times n_j$ і $n_1 + n_2 + \dots + n_q = N$.

Відповідно, X_i і F_i — часткові вектори, що містять n_i компонентів.

Подамо матрицю A у вигляді

$$A = D - C_L - C_U,$$

де

$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{qq} \end{pmatrix}, \quad C_U = - \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ 0 & 0 & \dots & A_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_L = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{q1} & A_{q2} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Такий розклад використовується в методах Якобі, Гаусса-Зейделя, SOR і SSOR. Зокрема, в матричних позначеннях метод Якобі має вигляд

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + k,$$

де B — матриця переходу Якобі:

$$B = D^{-1}(C_L + C_U) = I - D^{-1}A,$$

$$\text{де } x^{(n)} = \begin{pmatrix} X_1^{(n)} \\ X_2^{(n)} \\ \dots \\ X_q^{(n)} \end{pmatrix}, \quad k = D^{-1} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}F_1 \\ A_{22}^{-1}F_2 \\ \dots \\ A_{qq}^{-1}F_q \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця A є симетричною і додатно визначеною, матриця D також є симетричною і додатно визначеною, і метод Якобі є симетризованим з $W = D^{1/2}$.

Метод Якобі є збіжним тоді і лише тоді, коли $S(B) < 1$.

Як і для методу Річардсона, екстрапольований метод Якобі

$$x^{(n+1)} = \bar{\gamma} \left(Bx^{(n)} + k - x^{(n)} \right) + x^{(n)}.$$

Переходячи до елементних позначень, метод Якобі можна переписати як

$$A_{ii}X_i^{(n+1)} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q A_{ij}X_j^{(n)} + F_i, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Якщо матриця A_{ii} має розмір 1×1 , такий метод називаються *точковим* методом Якобі, а в іншому випадку — *блочним* методом Якобі.

Отже, на кожному ітераційному кроці необхідно розв'язувати СЛАР

$$A_{ii}X_i^{(n+1)} = y_i.$$

При розв'язуванні розріджених СЛАР матриці A_{ii} часто мають структуру, що дозволяє застосовувати прямі методи. Наприклад, при розв'язанні крайових задач виникають трьохдіагональні матриці.

Для модельної задачі

$$R_\infty(B) \sim \pi^2 h^2 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Метод Гаусса-Зейделя

$$A_{ii}X_i^{(n+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}X_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^q A_{ij}X_j^{(n)} + F_i, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Як і в методі Гаусса-Якобі, при розв'язуванні розріджених СЛАР матриці A_{ii} розв'язуються підсистеми.

В матричних позначеннях метод Гаусса -Зейделя записується так:

$$x^{(n)} = \mathcal{L}x^{(n)} + k,$$

де $\mathcal{L} = (I - L)^{-1}U$, $k = (I - L)^{-1}D^{-1}b$, $L = D^{-1}C_L$, $U = D^{-1}C_U$.

Матриця \mathcal{L} називається матрицею *переходу Гаусса-Зейделя*. Оскільки матриці A і D є симетричними і додатно визначеними, то метод Гаусса-Зейделя є збіжним.

З іншого боку, матриця $D - C_L$ не симетричною і додатно визначеною. Тому в загальному випадку метод Гаусса-Зейделя не є симетризується і не допускає екстраполяцію (за винятком окремих випадків).

Для модельної задачі швидкість збіжності методу Гаусса-Зейделя дорівнює

$$R_\infty(B) \sim \pi^2 h^2 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Метод послідовної верхньої релаксації

$$A_{ii} X_i^{(n+1)} = \omega \left(-\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^q A_{ij} X_j^{(n)} + F_i \right) + (1-\omega) A_{ii} X_i^{(n)},$$

$$i = 1, 2, \dots, q.$$

Коефіцієнт ω називається *коефіцієнтом релаксації*. Якщо $\omega=1$, метод SOR збігається з методом Гаусса-Зейделя. Якщо $\omega < 1$ отримуємо метод нижньої релаксації, якщо $\omega > 1$ — верхньої. На кожному кроці треба розв'язувати допоміжну СЛАР простої структури.

В матричних позначеннях метод SOR зводиться до вигляду

$$Dx^{(n+1)} = \omega(C_L x^{(n+1)} + C_U x^{(n)} + b) + (1-\omega) Dx^{(n)}.$$

Цей вираз можна переписати як

$$x^{(n+1)} = \mathcal{L}_\omega x^{(n)} + k_\omega^{(F)},$$

де

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1} (\omega U + (1-\omega) I),$$

$$k_\omega^{(F)} = (I - \omega L)^{-1} \omega D^{-1} b.$$

Матриця розщеплення методу SOR має вигляд $(\omega^{-1} D - C_L)$ і не є симетричною додатно визначеною.

Для модельної задачі швидкість збіжності методу SOR дорівнює $R_\infty(\mathcal{L}) \sim 2\sqrt{2}\pi h$ при $h \rightarrow 0$.

Метод симетричної послідовної верхньої релаксації

$$A_{ii}X_i^{(n+\frac{1}{2})} = \omega \left(-\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}X_j^{(n+\frac{1}{2})} - \sum_{j=i+1}^q A_{ij}X_j^{(n)} + F_i \right) + (1-\omega)A_{ii}X_i^{(n)},$$

$$i = 1, 2, \dots, q.$$

$$A_{ii}X_i^{(n+1)} = \omega \left(-\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}X_j^{(n+\frac{1}{2})} - \sum_{j=i+1}^q A_{ij}X_j^{(n+1)} + F_i \right) + (1-\omega)A_{ii}X_i^{(n+\frac{1}{2})},$$

$$i = q, q-1, \dots, 1.$$

Спочатку послідовно обчислюються вектори $X_1^{(n+\frac{1}{2})}, X_2^{(n+\frac{1}{2})}, \dots, X_q^{(n+\frac{1}{2})}$ за методом SOR, а потім — $X_q^{(n+1)}, X_{q-1}^{(n+1)}, \dots, X_1^{(n+1)}$ за зворотнім методом SOR. На кожному кроці треба розв'язувати допоміжну СЛАР простої структури.

У матричному вигляді це можна записати так:

$$Dx^{(n+\frac{1}{2})} = \omega \left(C_L x^{(n+\frac{1}{2})} + C_U x^{(n)} + b \right) + (1-\omega)Dx^{(n)},$$

$$Dx^{(n+1)} = \omega \left(C_L x^{(n+\frac{1}{2})} + C_U x^{(n+1)} + b \right) + (1-\omega)Dx^{(n+\frac{1}{2})}.$$

Це еквівалентно

$$x^{(n+\frac{1}{2})} = \mathcal{L}_\omega x^{(n)} + k_\omega^{(F)},$$

$$x^{(n+1)} = \mathcal{U}_\omega x^{(n+\frac{1}{2})} + k_\omega^{(B)},$$

де

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1} (\omega U + (1 - \omega) I),$$

$$k_\omega^{(F)} = (I - \omega L)^{-1} \omega D^{-1} b.$$

$$\mathcal{U}_\omega = (I - \omega U)^{-1} (\omega L + (1 - \omega) I),$$

$$k_\omega^{(B)} = (I - \omega U)^{-1} \omega D^{-1} b.$$

Об'єднуючи, маємо

$$x^{(n+1)} = \mathcal{S}_\omega x^{(n)} + k_\omega,$$

$$\mathcal{S}_\omega = \mathcal{U}_\omega \mathcal{L}_\omega,$$

$$k_\omega = \omega(2 - \omega)(I - \omega U)^{-1} (I - \omega L)^{-1} D^{-1} b.$$

Матриця розщеплення для методу SSOR має вигляд

$$Q = \frac{\omega}{2 - \omega} \left(\frac{1}{\omega} D - C_L \right) D^{-1} \left(\frac{1}{\omega} D - C_U \right).$$

Оскільки $\left(\frac{1}{\omega} D - C_L \right)^T = \frac{1}{\omega} D - C_U$, матриця Q є

симетрично додатно визначеною. Отже, метод SSOR є таким, що симетризується. Можливі матриці симетризації:

$W = A^{\frac{1}{2}}$ або $W = S^{-1} \left(\frac{1}{\omega} D - C_U \right)$, де S — будь-яка матриця,

така що $S^T S = D$, або $W = D^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\omega} D - C_U \right)$. Звідси випливає,

що метод SSOR допускає екстраполяцію, до того ж екстрапольований метод SSOR збігається вдвічі швидше, ніж звичайний SSOR.

Метод SSOR збігається для будь-якого значення $0 < \omega < 2$.

Для модельної задачі швидкість збіжності методу SSOR дорівнює $R_\infty(\mathcal{L}) \sim \sqrt{2\pi}h$ при $h \rightarrow 0$.

Література

1. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. — М.: Мир, 1986. 446 с.