Лекція 8. Векторні та матричні норми

Ми будемо розглядати кілька різних векторних і матричних норм. Зокрема, будуть використовуватися такі векторні норми:

$$\|x\|_2 \equiv \sqrt{(x,x)} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

$$\|x\|_\infty \equiv \max_{i=1,2,..,n} |x_i|, \tag{2}$$

$$\|x\|_L \equiv \|Lx\|_2 \tag{3}$$

і відповідні їм матричні норми

$$\|A\|_2 \equiv \sqrt{S(AA^H)} \equiv \sqrt{\max_{i=1,2,\dots,n} |\lambda_i|}, \tag{4}$$

$$\|A\|_\infty \equiv \max_{i=1,2,\dots,n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right), \tag{5}$$

$$\|A\|_L \equiv \|LAL^{-1}\|_L. \tag{6}$$

Тут L може бути будь-якою невиродженою матрицею, $S(A) = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} |\lambda_i|$ - спектральний радіус матриці A, λ_i, $i = 1,2,\dots,n$ - власні числа матриці A, A^H - спряжено транспонована до A матриця (у випадку дійсних чисел $A^H \equiv A^T$).

Для $\alpha = 2, \infty, L$ можна показати, що

$$\|Ax\|_\alpha \le \|A\|_\alpha \|x\|_\alpha, \tag{7}$$

$$\|A\|_\alpha = \sup_{v \ne 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}. \tag{8}$$

Крім того, важливою властивістю матричних норм є нерівність

$$S(A) \le \|A\|_\alpha, \ \alpha = 2, \infty, L. \tag{9}$$

Якщо A - симетрична матриця, то

$$\|A\|_2 = S(A) \tag{10}$$

Аналогічно, якщо LAL^{-1} є симетричною матрицею, то

$$\|A\|_L = S(A) \tag{11}$$

Послідовність векторів $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$ збігається до вектора x тоді і лише тоді, коли

$$\lim_{k\to\infty} \left\| x^{(k)} - x \right\|_\alpha = 0 \tag{12}$$

для деякої векторної норми $\|\cdot\|_\alpha$.

Аналогічно, послідовність матриць $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots$ збігається до матриці A тоді і лише тоді, коли

$$\lim_{k\to\infty} \left\| A^{(k)} - A \right\|_\alpha = 0 \tag{13}$$

для деякої матричної норми $\|\cdot\|_\alpha$.

Можна показати, що

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \tag{14}$$

і

$$\lim_{k\to\infty} A^k x = 0 \tag{15}$$

для всіх векторів v тоді і лише тоді, коли

$$S(A) < 1. \tag{16}$$

Для будь-яких невироджених матриць A і L визначимо $L-$**число обумовленості** $\chi_L(A)$ матриці A:

$$\chi_L(A) \equiv \|A\|_L \left\| A^{-1} \right\|_L. \tag{17}$$

Тоді **спектральне число обумовленості** $\chi(A)$ відповідає окремому випадку $L \equiv I$, тобто

$$\chi(A) \equiv \chi_i(A) \equiv \|A\|_2 \left\| A^{-1} \right\|_2. \tag{18}$$

Якщо A - симетрична додатно визначена матриця, то

$$\chi(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}, \tag{19}$$

де $\lambda_{\min}(A) = \min\limits_{i=1,2,...,n} \lambda_i(A)$, $\lambda_{\max}(A) = \max\limits_{i=1,2,...,n} \lambda_i(A)$.

Теорема 8.1. В скінченновимірних нормованих просторах всі норми є еквівалентними.

Доведення. Нехай E — n-вимірний дійсний нормований простір з нормою $\|x\|$. Виберемо в E деякий базис $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ і покажемо, що норма $\|x\|$ є еквівалентною евклідовій нормі

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2},$$

де $x_1, x_2, ..., x_n$ — координати вектора x по базису $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Перш за все зауважимо, що

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|e_k\| \le \|x\|_2 \sum_{k=1}^{n} \|e_k\| = C_2 \|x\|_2,$$

де $c_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|e_k\|$.

Для оцінки норми $\|x\|$ зверху введемо функцію $f(x) = \|x\|$, що залежить від n змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ простору R^n. Оскільки це норма, вона є неперервною функцією на R^n. Отже, вона є неперервною, зокрема, на одиничній сфері $S_1 = \{x \in R^n : \|x\|_2 = 1\}$. Норма є невід'ємною функцією, яка обертається в нуль лише на нульовому елементі. Це означає, що на одиничній сфері $f(x) > 0$. Оскільки сфера S_1 — компакт, то за теоремою Вейєрштрасса вона досягає на ній свій мінімум, тобто

$$\exists x_0 \in S_1 : f(x_0) = \min_{x \in S_1} f(x) > 0.$$

Таким чином,

$$\forall x \in S_1 \quad \|x\| \ge C_1,$$

де $C_1 = f\left(x_0\right)$. Тоді, з цього випливає, що $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \geq C_1$. З цього випливає, що

$$\forall x \neq 0 \quad \|x\| = \left\|\|x\|_2 \frac{\|x\|}{\|x\|_2}\right\| = \|x\|_2 \left\|\frac{\|x\|}{\|x\|_2}\right\| \geq C_1 \|x\|_2 .$$

Для $x = 0$ нерівність $\|x\| \geq c_1 \|x_2\|$ є очевидною. Таким чином, норми $\|x\|$ і $\|x\|_*$ є еквівалентними нормі $\|x\|_2$. Отже вони є еквівалентними і одна одній:

$$C_3 \|x\| \leq C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_* \leq C_2 \|x\|_2 \leq C_4 \|x\|. \quad \blacksquare$$

Означення. В нормованому просторі E норма $\|x\|$ називається підпорядкованою нормі $\|x\|_*$, якщо $\|x\| \leq \|x\|_*$.

Теорема 8.2. Доведіть, що дві норми є еквівалентними тоді і лише тоді, коли із збіжності послідовності за однією із норм випливає збіжність за іншою нормою.

Доведення. Необхідність. Нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається за нормою $\|x\|_1$, яка еквівалентною нормі $\|x\|_2$, тобто $\exists C_1, C_2 > 0 : C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \;\; \forall x \in E$. Тоді, як легко бачити, вона збігається і за нормою $\|x\|_2$ за теоремою про мажоруючу послідовність..

Достатність. Нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається за нормами $\|x\|_1$ і $\|x\|_2$. Позначимо через I тотожній оператор, що діє із $\left(E, \|x\|_1\right)$ і $\left(E, \|x\|_2\right)$, тобто $x = Ix$. Цей оператор є лінійним і неперервним, отже він є обмеженим. Таким чином, існує константа $C_2 > 0$, така що $\|Ix\|_2 = \|x\|_2 \le C_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in \left(E, \|x\|_1\right)$.

Аналогічно, розглядаючи тотожне відображення простору $\left(E, \|x\|_2\right)$ на простір $\left(E, \|x\|_1\right)$, отримуємо оцінку

$$\|Ix\|_1 = \|x\|_1 \le C \|x\|_2 \quad \forall x \in \left(E, \|x\|_2\right).$$

Поклавши $C_1 = \dfrac{1}{C}$, приходимо до нерівності

$$C_1 \|x\|_2 \le \|x\|_1 .$$

Отже,

$$C_1 \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le C_2 \|x\|_2 ,$$

тобто норми є еквівалентними. ■

Література

1. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. — М.: Мир, 1986. 446 с.

2. Вулих Б.З. Введение в функционаьный анализ. — М.: Наука, 1967.