5. Спектральний метод

План. *Загальне формулювання, рівняння дифузії*

Спектральний метод використовує наближення у формі Гальоркіна

$$u_M(x,y,z,t) = u_0(x,y,z,t) + \sum_{k=1}^{M} a_k(t)\varphi_k(x,y,z), \qquad (5.1)$$

$$\iiint_{\Omega} W_m(x,y,z)\,R(x,y,z,t)\,dxdydz = 0\,. \qquad (5.2)$$

але на відміну від методу Гальоркіна система пробних функцій повинна бути не лише повною, а й ортогональною.

$$\iiint_{\Omega} \varphi_i(x,y,z)\,\varphi_j(x,y,z)\,dxdydz \begin{cases} \neq 0 \text{ } при \text{ } i = j, \\ = 0 \text{ } при \text{ } i \neq j. \end{cases} \qquad (5.3)$$

Прикладами ортогональних систем функцій є тригонометричні функції (ряди Фур'є), а також деякі спеціальні функції (Лежандра, Чебишова тощо). Це дозволяє спростити структуру рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів $a_k(t)$.

Рівняння дифузії з умовами Діріхле [1, стор. 195]

Розглянемо рівняння дифузії

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \text{ на відрізку } [0,1]$$

з крайовими умовами

$$c(0,t) = 0,\ \ c(1,t) = 1 \qquad (5.4)$$

і початковою умовою

$$c(x,0) = \sin \pi x + x\,.$$

Точним розв'язком цієї задачі є функція

$$c(x,t) = \sin(\pi x)\,e^{-D\pi^2 t} + x\,. \qquad (5.5)$$

Подамо наближений розв'язок у вигляді

$$u_M\left(x\right)=\sin\left(\pi x\right)+x+\sum_{k=1}^{M}a_k\left(t\right)\sin\left(k\pi x\right). \qquad (5.6)$$

Обчислимо нев'язку:'

$$R\left(x\right)=\sum_{k=1}^{M}\left[\frac{da_k\left(t\right)}{dt}+D\left(k\pi\right)^2 a_k\left(t\right)\right]\sin\left(k\pi x\right)+D\pi^2\sin\left(\pi x\right).$$

Обчислимо інтеграл (5.2) з ваговою функцією $W_m\left(x\right)=\sin\left(m\pi x\right)$:

$$\int_0^1\sin\left(m\pi x\right)R\left(x\right)dx=0.$$

Маємо:

$$\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{da_k\left(t\right)}{dt}+D\left(k\pi^2\right)a_k\left(t\right)\right)\int_0^1\sin\left(m\pi x\right)\sin\left(k\pi x\right)dx+$$

$$+D\pi^2\int_0^1\sin\left(m\pi x\right)\sin\left(\pi x\right)dx=0.$$

Перший інтеграл не дорівнює нулю, лише якщо $k=m$, а другий не дорівнює нулю, лише якщо $m=1$. Отже, отримуємо систему рівнянь

$$\frac{da_k\left(t\right)}{dt}+D\left(m\pi\right)^2 a_m\left(t\right)+r_m=0,\quad m=1,2,\ldots,M, \qquad (5.7)$$

де

$$r_m=\begin{cases}D\pi^2, & \text{якщо } m=1,\\ 0, & \text{якщо } m\neq 1.\end{cases} \qquad (5.8)$$

Розв'язок цієї системи можна записати безпосередньо:

$$a_1\left(t\right)=e^{-D\pi^2 t}-1,\ a_m=0,\ m=2,\ldots,M.$$

Таким чином, з подання (5.6) маємо, що

$$u_M\left(x\right)=\sin\left(\pi x\right)e^{-D\pi^2 t}+x.$$

Зауваження. Ми отримали точний розв'язок лише завдяки тому, що відповідним чином задали початкову і крайові умови. В усіх інших випадках ми отримаємо наближений розв'язок.

Рівняння дифузії з умовами Неймана [1, стор. 198]

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \text{ на відрізку } [0,1]$$

з крайовими умовами

$$\frac{\partial c}{\partial x}(0,t) = -2,\ \ c(1,t) = 1 \tag{5.9}$$

і початковою умовою

$$c(x,0) = 3 - 2x - 2x^2 + 2x^3. \tag{5.10}$$

Запишемо наближений розв'язок цієї задачі у загальному вигляді

$$u_M(x,t) = b_0(t) + \sum_{k=1}^{M}\left(a_k(t)\sin(2k\pi x) + b_k(t)\cos(2k\pi x)\right). \tag{5.11}$$

Для того щоб розв'язок (5.11) задовольняв крайові умови (5.9), коефіцієнти повинні бути пов'язані співвідношеннями

$$\sum_{k=1}^{M} a_k(2\pi k) = -2,\quad \sum_{k=1}^{M} b_k = 1. \tag{5.12}$$

Вираз (5.12) дозволяє виключити коефіцієнти a_M і b_M з виразу (5.11).

$$u_M(x,t)=\cos(2M\pi x)-\frac{2}{2\pi M}\sin(2M\pi x)+$$
$$+\sum_{k=1}^{M-1}a_k(t)\left(\sin(2k\pi x)-\frac{k}{M}\sin(2M\pi x)\right)$$
$$+\sum_{k=0}^{M-1}b_k(t)\left(\cos(2k\pi x)-\cos(2M\pi x)\right).$$

Отже, для реалізації спектрального методу ми маємо взяти два набори вагових функцій для пошуку коефіцієнтів a_k і b_k .

$$W_m(x)=\sin(2m\pi x)-\frac{m}{M}\sin(2M\pi x),\ 1\le m\le M-1,$$
$$W_m(x)=\cos(2m\pi x)-\cos(2M\pi x),\qquad 0\le m\le M-1.$$

Це приводить нас до системи звичайних диференційних рівнянь при $1\le m\le M-1$.

$$\frac{da_m}{dt}+\left(D(2\pi m)^2\right)a_m+\frac{m}{M}\sum_{k=1}^{M-1}\frac{k}{M}\left(\frac{da_k}{dt}+D(2\pi M)^2 a_k\right)=-2D(2\pi m)$$

$$\frac{db_m}{dt}+\left(D(2\pi m)^2\right)b_m+\sum_{k=1}^{M-1}\left(\frac{db_k}{dt}+D(2\pi M)^2 b_k\right)=D(2\pi m)^2,$$
$$2\frac{db_0}{dt}=\sum_{k=1}^{M-1}\left(\frac{db_k}{dt}+D(2\pi M)^2 b_k\right)=D(2\pi M)^2.$$

Для розв’язання цієї системи можна застосувати звичайні методи. Незважаючи на досить великий обсяг обчислювальної роботи, спектральний метод Гальоркіна дає надзвичайно точні результати при досить невеликій кількості невідомих a_k .

Література

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т. Т.1. — М.: Мир, 1991.