4. Метод скінчених елементів

План. *Варіаційне формулювання, елементний вклад, матриця жорсткості, вузловий вектор.*

Для того щоб відчути переваги і недоліки методу скінчених елементів, слід вийти за межі одновимірного випадку і розглянути двовимірний випадок.

Розглянемо двовимірну задачу сталої теплопровідності через брус квадратного перетину [6, с. 46].

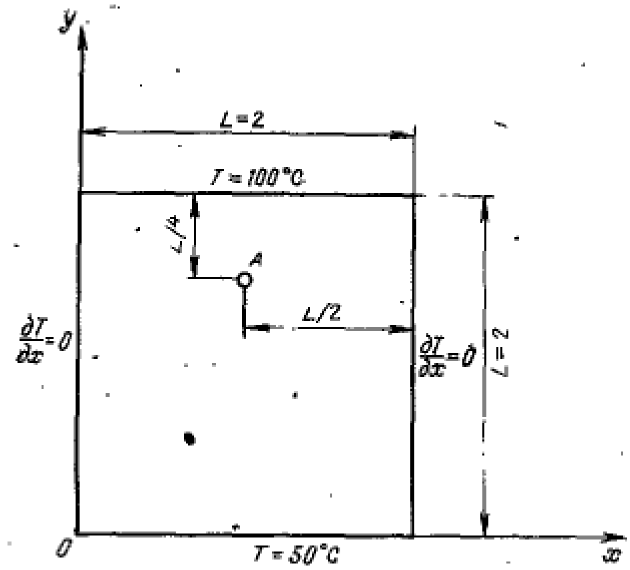

Рис. 4.1. Двовимірну задачу теплопровідності через брус квадратного перетину

Застосуємо варіаційне формулювання методу скінчених елементів. Будемо вважати, що коефіцієнти теплопровідності дорівнюють одиниці і внутрішніх джерел тепла немає. У такому випадку перенос тепла в брусі квадратного перетину описується рівнянням Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \ , \ (x, y) \in \Omega \,, \tag{4.1}$$

крайовими умовами Діріхлє

$$T = 50, \quad y = 0, \tag{4.2}$$

$$T = 100, \ y = L \tag{4.3}$$

і Неймана

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \ x = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \ x = L. \tag{4.5}$$

Замінимо задачу (2.1)–(2.3) її варіаційним формулюванням. З теорії варіаційного числення відомо, що рішення $T(x, y)$ задачі (4.1)–(4.5) мінімізує функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy \,, \tag{4.6}$$

де $u(x, y)$ належить множині допустимих пробних функцій. В нашому випадку допустимою пробною є функція, що визначена на області Ω, має кусково-неперервні перші похідні і задовольняє крайові умови Діріхлє (4.2)–(4.3). Крайові умови Неймана (4.4)–(4.5) виконуються автоматично і тому називаються *природними*.

Розіб'ємо область Ω на l трикутників. Це процес називається *триангуляцією*. Це дозволяє розв'язувати задачі в областях із складною геометрією і тому є стандартом. Можна використовувати й інші геометричні фігури, наприклад прямокутники. Геометрична фігура, що є частиною розбиття області, називається *скінченим елементом* (рис. 4.2). Позначимо загальну кількість вузлів як *n* (в даному випадку *n* = 16).

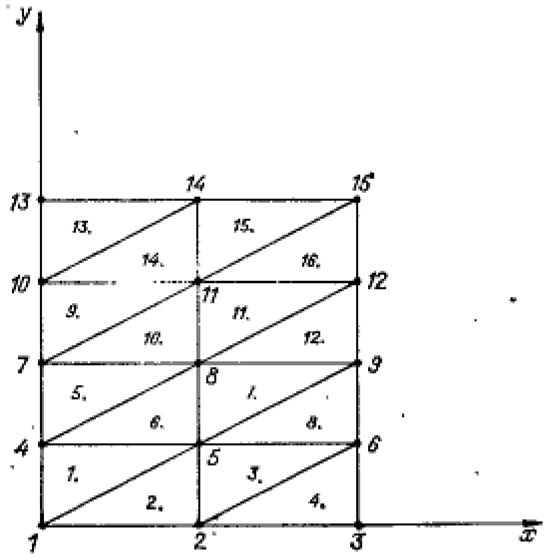

Рис. 4.2. Розбиття області на 16 трикутників

Нагадаємо, що основна ідея методу скінчених елементів полягає у подання розв'язку у будь-якій точці через значення у вузлах скінченого елемента, якому належить ця точка. Розглянемо окремий елемент e_i (рис. 4.3).

Ураховуючи розбиття області на скінчені елементи і неперервність функцій, можна записати функціонал (4.6) як

$$J = \sum_{i=1}^{l} J_i, \tag{4.7}$$

де $J_i(u)$ — вклад i-го елемента, що визначається рівністю

$$J_i = \frac{1}{2}\iint_{e_i}\left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2\right)dxdy \tag{4.8}$$

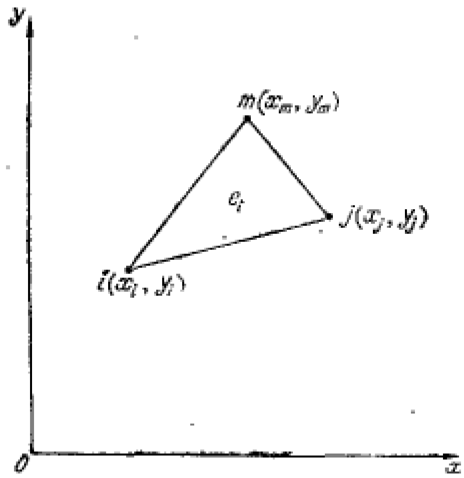

Рис. 4.3. Розбиття області на 16 трикутних скінчених елементів

Пронумеруємо вузли i, j та m елемента e_i проти годинникової стрілки і виберемо лінійне подання пробної функції $u(x, y)$ всередині елемента

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \tag{4.9}$$

Тоді у вузлах базисна функція $u(x, y)$ набуде значення

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \tag{4.10}$$

$$u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \tag{4.11}$$

$$u_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m, \tag{4.13}$$

Розв'яжемо систему рівнянь (4.10)–(4.13) відносно коефіцієнтів α_1, α_2 і α_3. Визначник матриці системи (4.10)–(4.13) дорівнює подвоєній площі трикутника (доведіть!). Отже, якщо трикутник невироджений, то система (4.10)–(4.13) завжди має єдиний розв'язок:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta}\left(a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m\right), \tag{4.14}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\Delta}\left(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m\right), \tag{4.15}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\Delta}\left(c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m\right), \tag{4.16}$$

де $a_i = x_j y_m - x_m y_j$, $b_i = y_j - y_m$, $c_i = x_m - x_j$ (доведіть),

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix},$$

а $a_j, a_m, b_j, b_m, c_j, c_m$ можна визначити шляхом циклічної перестановки індексів, тобто якщо сталі a_i, b_i і c_i визначаються через координати *j*-го та *m*-го вузлів, то сталі a_j, b_j і c_j — через координати *m*-го та *i*-го вузлів і $a_ь$, $b_ь$ і $c_ь$ — через координати *i*-го та *j*-го вузлів.

Підставляючи (4.14–(4.16) в (4.9), отримуємо вираз пробної функції через її значення у вузлах.

$$u_i(x,y) = \frac{1}{2\Delta}\Big(\left(a_i + b_i x + c_i y\right)u_i + \left(a_j + b_j x + c_j y\right)u_j + \\ + \left(a_m + b_m x + c_m y\right)u_m\Big) \tag{4.17}$$

Перепишемо це у більш компактному вигляді.

$$u_e = \vec{N}_e^T \vec{u}_e,$$

де $\vec{N}_e^T = \left(N_i, N_j, N_m\right)$, $\vec{u}_e = \left(u_i, u_j, u_m\right)$, $N_i = a_i + b_i x + c_i y$, $N_j = a_j + b_j x + c_j y$, $N_m = a_m + b_m x + c_m y$.

Диференціюючи (4.17), отримуємо

$$\frac{\partial u_e}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta}\left(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m\right), \qquad (4.18)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta}\left(c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m\right). \qquad (4.19)$$

Підставляючи (4.19) в (4.8), можемо оцінити елементний вклад.

$$J_i = \frac{1}{8\Delta^2}\iint_{e_i}\left(\left(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m\right)^2 + \left(c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m\right)^2\right)dxdy\ .(4.20)$$

Оскільки підінтегральний вираз від x та y не залежать і

$$\iint_{e_i} dxdy = \Delta\,, \qquad (4.21)$$

елементний вклад можна переписати як

$$J_i = \frac{1}{8\Delta}\left(\left(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m\right)^2 + \left(c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m\right)^2\right). \ (4.22)$$

Цей вираз можна отримати для кожного елемента. Підставляючи елементі (4.22) вклади в (4.7), можемо перетворити функціонал J на функцію, що залежить від вузлових значень пробної функції..

$$J = J\left(u_1, u_2, ..., u_n\right)\ . \qquad (4.23)$$

Умови мінімуму J можна записати як

$$\frac{\partial J}{\partial T_p} = \sum_{i=1}^{l}\frac{\partial J_i}{\partial u_p} = 0, \quad p = 1, 2, ..., n \qquad (4.24)$$

Легко бачити, що ненульовий вклад в (4.24) дають лише елементи, що містять вузол p, адже в усіх інших випадках функція J_i не залежить від значення у вузлі p.

Слід пам'ятати, що i, j і m — це локальні позначення вузлів елемента e_i. В глобальній нумерації вузлів вони можуть мати інші номери, скажімо, p, q і r відповідно (див. наприклад рис. 4.2). Отже, в глобальній системі нумерації вузлів маємо

$$\frac{\partial J_i}{\partial u_p} = \frac{1}{4\Delta}\Big(b_p\left(b_p u_p + b_q u_q + b_r u_r\right) + c_p\left(c_p u_p + c_q u_q + c_r u_r\right)\Big). \quad (4.25)$$

Об'єднання елементних рівнянь, що задається рівністю (4.24), називається *об'єднанням по вузлах*.

Наведемо співвідношення між глобальними і локальними номерами в нашій задачі [6, с. 52], а також координати вузлів і характерні параметри [6, 53].

Таблиця 4.1. Глобальні і локальні номери вузлів.

Соотношение между глобальными и локальными номерами узлов

Элемент	Глобальный номер узла			Элемент	Глобальный номер узла		
	i	*j*	*m*		*i*	*j*	*m*
1	4	1	5	9	10	7	11
2	2	5	1	10	8	11	7
3	5	2	6	11	11	8	12
4	3	6	2	12	9	12	8
5	7	4	8	13	13	10	14
6	5	8	4	14	11	14	10
7	8	5	9	15	14	11	15
8	6	9	5	16	12	15	11

Таблиця 4.2. Координати вузлів

Координаты узлов

Узел	Координаты		Узел	Координаты		Узел	Координаты	
	x	*y*		*x*	*y*		*x*	*y*
1	0	0	6	2	0,5	11	1	1,5
2	1	0	7	0	1	12	2	1,5
3	2	0	8	1	1	13	0	2
4	0	0,5	9	2	1	14	1	2
5	1	0,5	10	0	1,5	15	2	2

Таблиця 4.3. Характерні параметри елементів.

Характерные параметры элементов

Элемент	Параметры					
	b_i	b_j	b_m	c_i	c_j	c_m
1	−0,5	0	0,5	1	−1	0
2	0,5	0	−0,5	−1	1	0
3	−0,5	0	0,5	1	−1	0
4	0,5	0	−0,5	−1	1	0
5	−0,5	0	0,5	1	−1	0
6	0,5	0	−0,5	−1	1	0
7	−0,5	0	0,5	1	−1	0
8	0,5	0	−0,5	−1	1	0
9	−0,5	0	0,5	1	−1	0
10	0,5	0	−0,5	−1	1	0
11	−0,5	0	0,5	1	−1	0
12	0,5	0	−0,5	−1	1	0
13	−0,5	0	0,5	1	−1	0
14	0,5	0	−0,5	−1	1	0
15	−0,5	0	0,5	1	−1	0
16	0,5	0	−0,5	−1	1	0

Розглянемо для ілюстрації обчислення для елемента 5 з вершинами $i = 7$, $j = 4$ і $m = 8$ і площею $\Delta_5 = 0,25$. Його вклад дорівнює

$$J_5 = \frac{1}{8\Delta_5}\left(\left(-\frac{1}{2}u_7 + 0u_4 + \frac{1}{2}u_8\right)^2 + \left(1u_7 - 1u_4 + 0u_8\right)^2\right). \quad (4.26)$$

Елемент 5 дає вклад лише в ті рівняння системи, які містять значення u_7, u_4 і u_8.

Отже,

$$\frac{\partial J_5}{\partial u_7}=\frac{1}{4\Delta}\left(-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}u_7+0u_4+\frac{1}{2}u_8\right)+1\left(1u_7-1u_4+0u_8\right)\right),\quad (4.27)$$

$$\frac{\partial J_5}{\partial u_4}=\frac{1}{4\Delta}\left(0\left(-\frac{1}{2}u_7+0u_4+\frac{1}{2}u_8\right)-1\left(1u_7-1u_4+0u_8\right)\right),\quad (4.28)$$

$$\frac{\partial J_5}{\partial u_8}=\frac{1}{4\Delta}\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}u_7+0u_4+\frac{1}{2}u_8\right)+0\left(1u_7-1u_4+0u_8\right)\right),\quad (4.29)$$

Рівняння (4.27)–(4.29) можна записати в *елементному матричному вигляді*

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial J_5}{\partial u_7}\\ \dfrac{\partial J_5}{\partial u_4}\\ \dfrac{\partial J_5}{\partial u_8}\end{pmatrix}=\frac{1}{16\Delta}\begin{pmatrix}5 & -4 & -1\\ -4 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_7\\ u_4\\ u_8\end{pmatrix}.\quad (4.30)$$

Переходячи до загального вигляду, матричне рівняння можна записати у формі

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial J_e}{\partial u_i}\\ \dfrac{\partial J_e}{\partial u_j}\\ \dfrac{\partial J_e}{\partial u_m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{ii}^e & k_{ij}^e & k_{im}^e\\ k_{ji}^e & k_{jj}^e & k_{im}^e\\ k_{mi}^e & k_{mj}^e & k_{mm}^e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_i\\ u_j\\ u_m\end{pmatrix},\quad (4.31)$$

або

$$\frac{\partial J_e}{\partial u_e}=K_e U_e.\quad (4.32)$$

Матриця

$$\begin{pmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e & k_{im}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e & k_{im}^e \\ k_{mi}^e & k_{mj}^e & k_{mm}^e \end{pmatrix}$$

називається *матрицею жорсткості* елемента *e*, а U_e *називається вузловим вектором*

Об'єднання по вузлах

Для об'єднання по вузлах використовується рівняння (4.24). Наприклад, для вузла 7 відповідним об'єднанням є співвідношення

$$\frac{\partial J}{\partial u_7} = \sum_{i=1}^{16} \frac{\partial J_i}{\partial u_7} \tag{4.33}$$

Як бачимо з рис. 4.2, для вузла 7 внесок дають лише елементи 5, 9 і 10, тому

$$\frac{\partial J}{\partial u_7} = \frac{\partial J_5}{\partial u_7} + \frac{\partial J_9}{\partial u_7} + \frac{\partial J_{10}}{\partial u_7} \tag{4.34}$$

Внески елементів 5, 9 і 10 можна обчислити, як показано вище:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial J_5}{\partial u_7} \\ \dfrac{\partial J_5}{\partial u_4} \\ \dfrac{\partial J_5}{\partial u_8} \end{pmatrix} = \frac{1}{16\Delta} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ -4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_7 \\ u_4 \\ u_8 \end{pmatrix}. \tag{4.35}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial J_9}{\partial u_7} \\ \dfrac{\partial J_9}{\partial u_4} \\ \dfrac{\partial J_9}{\partial u_8} \end{pmatrix} = \frac{1}{16\Delta}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ -4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{10} \\ u_7 \\ u_{11} \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial J_{10}}{\partial u_8} \\ \dfrac{\partial J_{10}}{\partial u_{11}} \\ \dfrac{\partial J_{10}}{\partial u_7} \end{pmatrix} = \frac{1}{16\Delta}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ -4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_8 \\ u_{11} \\ u_7 \end{pmatrix}. \tag{4.37}$$

Звідси випливає, що

$$\frac{\partial J}{\partial u_7} = \frac{\partial J_5}{\partial u_7} + \frac{\partial J_9}{\partial u_7} + \frac{\partial J_{10}}{\partial u_7} =$$

$$= \frac{1}{16\Delta}\left\{ \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_7 \\ u_4 \\ u_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{10} \\ u_7 \\ u_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_8 \\ u_{11} \\ u_7 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

Об’єднуючи подібні члени, маємо

$$\frac{\partial J}{\partial u_7} = \frac{1}{16\Delta}\left(-4u_4 + 10u_7 - 2u_8 - 4u_{10}\right) = 0 .$$

Значення $\dfrac{\partial J}{\partial u_7}$ можна подати у вигляді скалярного добутку вектору розміру 16, додавши до ненульових компонентів, що відповідають вузлам, які дають вклад в елемент, нулі, що відповідають вузлам, які не дають такого вкладу. Наприклад,

$$\frac{\partial J}{\partial u_7}=\frac{1}{16\Delta}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \underbrace{-4}_{4} & 0 & 0 & \underbrace{10}_{7} & \underbrace{-2}_{8} & 0 & \underbrace{-4}_{10} & \underbrace{0}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}T=0,$$

де $T=(T_1,...,T_{16})^T$ — вузловий вектор системи. В результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень функції T, права частина якої враховує крайові умови.

Можна сформулювати загальне правило формування матриці K глобальної системи відносно невідомих значень розв'язку у вузлах:

$$Ku=0\,. \tag{4.38}$$

В загальному випадку компонента з номером γ у системі (4.38) є вузловим рівнянням

$$\frac{\partial J}{\partial u_\gamma}=\begin{pmatrix}K_{\gamma 1} & K_{\gamma 2} & \ldots & K_{\gamma\delta} & \ldots & K_{\gamma 15}\end{pmatrix}u=0 \tag{4.39}$$

Отже, задача зводиться до обчислення рядків $\dfrac{\partial J}{\partial u_\gamma}$ для $\gamma=1,...,15$. Аналізуючи викладки, наведені вище, бачимо, що

$$K_{\gamma\delta}=\sum_{e=1}^{l}k_{\gamma\delta}^{e}\,. \tag{4.40}$$

Ненульовий внесок в суму (4.40) дають лише елементи, сусідні із вузлом γ.

Об'єднання по елементах

Альтернативна стратегія об'єднання по елементах полягає у розширенні матриць жорсткості та послідовному їх додавання до глобальної матриці. Подробиці див. в [1].

Література

1. Норри Д., Фриз де Ж. Введение в метод конечных элементов. — М.: Мир, 1981.