3. Метод зважених нев'язок

План. *Основи, пробні функції, варіанти методу, приклад.*

В основі будь-якого варіанту методу зважених нев'язок (МЗН) лежить припущення, що, розв'язок задачі можна подати в аналітичному вигляді

$$u_M\left(x,y,z,t\right)=u_0\left(x,y,z,t\right)+\sum_{k=1}^{M}a_k\left(t\right)\varphi_k\left(x,y,z\right), \qquad (3.1)$$

де функція $u_0\left(x,y,z,t\right)$ вибирається так, щоб задовольнити крайові та початкові умови. Функції $\varphi_k\left(x,y,z\right)$ називаються *пробними функціями*, а розв'язок $u_M\left(x,y,z,t\right)$ у формі (3.1) — *пробним розв'язком*. Пробні функції вважаються заданими заздалегідь. Наприклад, для одновимірних задач пробні функції, як правило, вибираються у вигляді поліномів або тригонометричних функцій:

$$\varphi_k\left(x\right)=x^{k-1},\ \ \varphi_k\left(x\right)=\sin k\pi x.$$

Метою розв'язання задачі є визначення невідомих коефіцієнтів $a_k\left(t\right)$ за допомогою розв'язання відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Запишемо рівняння в операторному вигляді

$$\mathcal{L}\left(T\right)=0. \qquad (3.2)$$

Якщо підставити в це рівняння наближений розв'язок (3.1), то замість точного збігу отримаємо рівняння

$$\mathcal{L}\left(u_M\right)=R\left(x,y,z,t\right), \qquad (3.3)$$

де $R\left(x,y,z,t\right)$ — неперервна функція, яка називається *нев'язкою рівняння*. Якщо $M\to\infty$, то за рахунок вибору коефіцієнтів $a_k\left(t\right)$ нев'язку можна зробити скільки завгодно малою.

Для визначення коефіцієнтів $a_k(t)$ будемо вимагати, що інтеграл зваженої нев'язки по всій області, де визначений шуканий розв'язок, дорівнював нулю:

$$\iiint\limits_{\Omega} W_m(x,y,z)\,R(x,y,z,t)\,dxdydz = 0\,. \tag{3.4}$$

В рівнянні (3.4) функції $W_m(x,y,z)$ називаються *ваговими*. Якщо покласти $m = 1,2,...,M$, то отримаємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $a_k(t)$. Для нестаціонарної задачі ця система буде системою звичайних диференційних рівнянь, а для стаціонарної — системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Залежно від вибору вагових функцій $W_m(x,y,z)$ метод зважених нев'язок поділяється на чотири категорії.

Метод підобластей. Розділимо область Ω на M підобластей D_m, які можуть перекриватися, і покладемо

$$W_m = \begin{cases} 1, (x,y,z) \in D_m, \\ 0, (x,y,z) \notin D_m. \end{cases} \tag{3.5}$$

Метод коллокацій.

$$W_m(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_m)\,, \tag{3.6}$$

де δ — дельта-функція Дірака і $\vec{x} = (x,y,z)$. Зважаючи на означення дельта-функції Дірака: $\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x) = \varphi(x_0)$ і підставляючи (3.6) в рівняння (3.3) , отримуємо систему рівнянь

$$R(\vec{x}_m) = 0. \tag{3.7}$$

Інакше кажучи, в наперед заданих *точках коллокації* $\vec{x}_m$ нев'язка повинна дорівнювати нулю.

Метод найменших квадратів.

$$W_m\left(x,y,z\right)=\frac{\partial R}{\partial a_m} \tag{3.8}$$

Із рівняння (3.3) випливає, що

$$R\left(a_1,a_2,...,a_N,x,y,z\right)=\mathcal{L}\left(u_0\right)+\sum_{m=1}^{M}a_m\mathcal{L}\left(\varphi_m\right).$$

Позначимо середньоквадратичну нев'язку як

$$s\left(a_1,a_2,...,a_M,x,y,z\right)=\iiint\limits_{\Omega}R^2\left(a_1,a_2,...,a_m,x,y,x\right)dxdydz.$$

Умова мінімуму середньоквадратичної нев'язки задається рівнянням Ейлера

$$\frac{\partial s}{\partial a_k}=2\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial a_k}R\left(a_1,a_2,...,a_m,x,y,x\right)dxdydz=0.$$

Відповідна система рівнянь означає, що середньоквадратична нев'язка повинна бути мінімальною.

Метод Гальоркіна.

$$W_m\left(x,y,z\right)=\varphi_m\left(x,y,z\right). \tag{3.9}$$

Інакше кажучи, вагові функції вибираються з того ж сімейства, що ї пробні. Якщо пробні функції утворюють повну систему (наприклад, $1,x,x^2,...,x^M$), то рівняння (3.3) означає, що нев'язка ортогональна кожному елементу повної системи:

$$\iiint\limits_{\Omega}\varphi_m\left(x,y,z\right)R\left(x,y,z,t\right)dxdydz=0.$$

З цього випливає, що при $M\to\infty$ наближений розв'язок прямує до точного розв'язку.

Приклад 3.1 (див. Флетчер, с. 140). Побудуємо розв'язок звичайного диференційного рівняння

$$\frac{dT}{dx}-T=0 \quad \text{при } 0\le x\le 1 \tag{3.10}$$

з крайовою умовою

$$T=1 \ \text{ при } x=0.$$

Точний розв’язок задачі:

$$T(x) = e^x.$$

Подамо наближений розв’язок у вигляді (3.1), використавши як пробні функції повну систему поліномів:

$$u_M(x) = 1 + \sum_{k=1}^{M} a_k x^k. \tag{3.11}$$

Підставляючи подання (3.11) в рівняння (3.10), отримуємо нев’язку рівняння

$$R = -1 + \sum_{k=1}^{M} a_k \left(kx^{k-1} - x^k\right). \tag{3.12}$$

За аналогією з рівнянням (3.4), маємо

$$\int_0^1 W_m(x) R(x)\, dx = 0. \tag{3.13}$$

Застосуємо метод Гальоркіна і покладемо

$$W_m(x) = x^{m-1}, \quad m = 1, 2, ..., M.$$

Обчислюючи інтеграл при кожному m, отримуємо систему рівнянь

$$Sw = g, \tag{3.14}$$

де $w = \left(a_1, a_2, ..., a_M\right)^T$, $g = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{M}\right)$ і

$$s_{mk} = \frac{k}{k+m-1} - \frac{1}{k+m}.$$

Якщо задати $M = 3$, то рівняння (3.14) набуде вигляду

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{11}{20} \\ \frac{1}{12} & \frac{3}{10} & \frac{13}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Розв'язуючи це рівняння, отримуємо

$$a_1 = 1,0141, \quad a_2 = 0,4225, \quad a_3 = 0,2817.$$

Підставляючи коефіцієнти в подання наближеного розв'язку (3.11), отримуємо

$$y = 1 + 1,0141x + 0,4224x^2 + 0,2817x^3 .$$

Метод скінчених елементів.

Як правило, метод скінчених елементів (МСЕ) використовується як різновид методу Гальоркіна. Порівняно з методом Гальоркіна МСЕ має дві особливості.

1). Наближений розв'язок (3.1) записується як комбінація вузлових значень невідомої функції:

$$u_N(x, y, z) = \sum_{k=1}^{N} u_k \varphi_k(x, y, z) \qquad (3.16)$$

Співвідношення (3.16) інтерпретується як інтерполяція локального розв'язку у вузловій точці u_k. Функції $\varphi_k(x, y, z)$ називаються *пробними*, або *інтерполяційними*.

2). Пробні функції вибираються практично виключно з сімейства кусково-лінійних поліномів невисокого порядку і визначаються на невеликій кількості сусідніх елементів. Це дозволяє отримати розріджені матриці.

Помилки, що виникають при застосуванні МСЕ, розділяються на помилки інтерполяції і нев'язку. Вони можуть бути адитивними, але в загальному випадку це не обов'язково.

Приклад 3.2. Розв'яжемо задачу з прикладу 3.1 методом МКЕ. Виберемо пробні функції у формі "шапочки".

$$\varphi_k = 0, \qquad \textit{якщо } x < x_{k-1}$$

$$\varphi_k = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, \qquad \textit{якщо } x_{k-1} \le x \le x_k \qquad (A), \qquad (3.17)$$

$$\varphi_k = 1, \qquad \textit{якщо } x = x_k ,$$

$$\varphi_k = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}, \qquad \text{якщо } x_k \le x \le x_{k+1}, \qquad (B),$$
$$\varphi_k = 0, \qquad \text{якщо } x > x_{k+1}. \qquad (3.18)$$

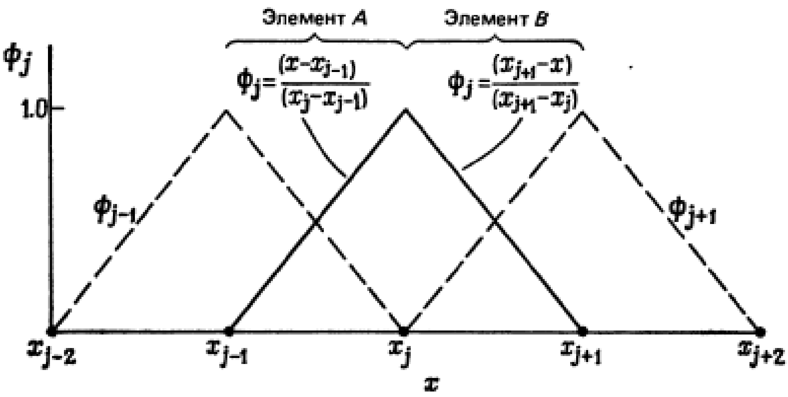

Рис. 3.1. Одновимірні лінійні пробні функції
(Флетчер, с. 160)

Як бачимо, пробна функція φ_k відрізняється від нуля лише на проміжку (x_{k-1}, x_{k+1}), який називається *скінченим елементом*. Це означає, що наближений розв'язок має вигляд

$T(x) = T_{k-1}\varphi_{k-1} + T_k\varphi_k$ *всередині елемента A*,

$T(x) = T_k\varphi_k + T_{k+1}\varphi_{k+1}$ *всередині елемента B*.

Всередині елемента *A* функція φ_k задається формулою (3.17), а функція φ_{k-1} має вигляд

$$\varphi_{k-1} = \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k}.$$

Всередині елемента *B* функція φ_k задається формулою (3.18), а функція φ_{k-1} має вигляд

$$\varphi_{k+1} = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

Метод скінчених елементів є набагато кориснішим для розв'язання багатовимірних задач в областях з нерегулярною межею. Такі області можна триангулювати або розбивати на елементи іншої структури, а потім за тим же принципом здійснювати інтерполяцію. До того ж триангуляцию можна робити нерегулярною, згущуючи сітку в потрібних місцях із складними геометричними або фізичними умовами. Ці тонкощі ми розглянемо на прикладі варіаційного формулювання методу скінчених елементів у наступній лекції.

Література

1. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. — М.: Мир, 1984
2. Деклу Ж. Метод конечных элементов. — М.: Мир, 1976
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике — М.: Мир, 1975.
4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. — М.: Мир, 1986
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов — М.: Мир, 1979.
6. Норри Д., Фриз де Ж. Введение в метод конечных элементов. — М.: Мир, 1981.
7. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т. Т.1. — М.: Мир, 1991.