Перетятько Анастасія Сергіївна

Напіввизначена оптимізація для розв’язку загальних квадратичних задач

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

ДИСЕРТАЦІЯ
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук,
професор А.І.Косолап

Дніпропетровськ - 2014

Прикладні задачі квадратичної оптимізації

- Булева оптимізація
- Квадратична задача про призначення
- Задачі про упаковку
- Обчислювальна геометрія
- Задача локалізації датчиків у мережі
- Задачі теорії графів (задача про розфарбування, пошук мінімального та максимального розрізу графа, задача комівояжера, пошук найдовшого шляху, пошук *k* найкоротших шляхів та ін.).
- Упаковка контейнерів, організація пам'яті у вигляді кореневого дерева.
- Задачі теорії розкладів (мінімізація кількості невиконаних завдань, мінімізація максимальних витрат, розклад з обмеженими ресурсами, складання навчального розкладу).
- Кластеризація даних,
- та багато інших.

Загальні квадратичні задачі

На даний час існує безліч прикладних задач, які потребують розв'язку, але для яких відсутні ефективні алгоритми. Більшість таких задач є або можуть бути перетворені до загальної задачі квадратичної оптимізації.

$$\min\left\{ x^T Q x + d^T x \mid x^T A_i x + b_i^T x \le c_i,\ i = 1, \dots, m \right\}$$

де Q, A_i – симетричні матриці $(n \times n)$;

d, b_i, c_i – вектора розмірності m;

x – невідомий вектор евклідового простору.

Методи розв’язку квадратичних задач

$$\min\left\{ x^T Q x + d^T x \mid x^T A_i x + b_i^T x \le c_i,\ i = 1, \ldots, m \right\}$$

Для їх розв'язку використовують:

- Методи розгалужень та границь.
- Стохастичні алгоритми.
- Наближені алгоритми.
- Локальний пошук.
- Евристичні алгоритми.
- **Напіввизначене програмування.**
- Інші методи.

Напіввизначена релаксація

Основна цінність напіввизначеної оптимізації (SDP) полягає в тому, що вона дозволяє розв’язувати багатоекстремальні нелінійні задачі за допомогою опуклої напіввизначеної релаксації, яка використовує перетворення квадратичного виразу $x^T A x$ до скалярного добутку матриць $A x x^T$ або $A \cdot X$, де X – напіввизначена матриця рангу одиниця.

QP: $$\min\left\{ x^T Q x + d^T x \mid x^T A_i x + b_i^T x \le c_i,\ i = 1, \ldots, m \right\}$$

Складність цієї задачі залежить від матриць *Q*, A_i.

SDP: $$\min\left\{ Q' \cdot X \mid A_i' \cdot X \le c_i,\ i = 1, \ldots, m,\ X \succeq 0 \right\}$$

Ця задача перетворюється до канонічного виду задачі SDP

Історія розвитку SDP

Канонічний вид задачі SDP

$$\min\left\{ C \cdot X \;\middle|\; A_i \cdot X = b_i, \quad i = 1,\ldots,m, \quad X \succeq 0 \right\}$$

$$C \cdot X = tr(CX) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

- 1890 – лінійні матричні нерівності (LMI)
- 1963 – формулювання задачі SDP (Bellman, Fan)
- 1988 – перший метод – метод еліпсоїдів
- 90 рр. XX ст. – методи внутрішньої точки
- 2009 – напіввизначений симплекс-метод

Положення, які виносяться до захисту

- Обгрунтування напіввизначеного симплекс-методу для розв’язку задач напіввизначеної оптимізації, доведення його збіжності.
- Новий метод спряжених напрямків для визначення напіввизначеності матриць, який використовується на кожній ітерації напіввизначеного симплекс-методу.
- Вдосконалення напіввизначеної релаксації для розв’язку загальних квадратичних та булевих задач.

Положення, які виносяться до захисту

- Чисельна ефективність нового напіввизначеного симплекс-методу для розв’язку задач напіввизначеної оптимізації, яка отримана шляхом проведення порівняльних чисельних експериментів.
- Чисельна ефективність напіввизначеної релаксації для різних класів задач.
- Знаходження верхніх і нижніх оцінок розв’язків у загальних задачах квадратичної оптимізації.

Постановка прямої та двоїстої задачі SDP (*)

SDP: $\min\left\{ C\cdot X \,\middle|\, A_i \cdot X = b_i,\ \ i=1,\dots,m,\ \ X \succeq 0 \right\}$

SDD: $\max\left\{ b^T y \,\middle|\, \sum_i A_i^T \cdot y_i + Z = C,\ \ i=1,\dots,m,\ \ Z \succeq 0 \right\}$

- де *C* – симетрична матриця $(n\times n)$;
- A_i – симетричні матриці $(n\times n)$;
- *b* – вектор розмірності *m*;
- *X* – симетрична додатно напіввизначена матриця $(n\times n)$, яку потрібно визначити;

$$C\cdot X = tr(CX) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

- На відміну від ЛП, двоїста теорія SDP слабша.
- Проблема розв’язку задачі SDP: обмеження $X \succeq 0$.

*Helmberg C. Semidefinite Programming / C. Helmberg. – Berlin, 1999. – 20 p.

Критерії додатної напіввизначеності матриць* ($X \succeq 0$):

- $v^T X v \geq 0 \quad \forall v \in R^n$
- $\lambda_i(X) \geq 0 \quad \forall i$
- $\exists C \in R^n \quad X = C^T C$
- визначники всіх головних мінорів матриці X є невід'ємними (*критерій Гурвіца*)
- $X = \sum \alpha_i x_i x_i^T \succeq 0, \ \alpha \geq 0$

*Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир. – 1989. – 656 с.

Конус додатно визначених матриць

- $S_+^n = \left\{ X \in S^n \mid X \succeq 0 \right\}$ - замкнутий опуклий конус напіввизначених матриць,

де S_+^n - множина додатно напіввизначених матриць,

S^n - множина симетричних матриць.

$$\Rightarrow$$

задачі SDP є задачами опуклої оптимізації

Алгоритми та програмне забезпечення

- Прямо-двоїсті методи внутрішньої точки (SDPA, SDPT3, CSDP, DSDP, SeDuMi та ін.)
- Алгоритм розширеного лагранжиана (PENSDP)
- Метод розкладання на множники (SDPLR)
- Метод напівнескінченної релаксації
- **Напіввизначений симплекс-метод**

та інші.

Пошук ефективних методів розв’язку задач SDP продовжується.

Прямо-двоїстий метод внутрішньої точки (Nesterov, Nemirovsky, Alizadeh)

SDP: $$\min\left\{\; C\cdot X \;\middle|\; A_i\cdot X = b_i,\;\; i=1,\ldots,m,\;\; X\succeq 0 \;\right\}$$

SDD: $$\max\left\{\; b^T y \;\middle|\; \sum_i A_i^T\cdot y_i + Z = C,\;\; i=1,\ldots,m,\;\; Z\succeq 0 \;\right\}$$

З умови рівності цільових функцій прямої та двоїстої задачі отримуємо систему нелінійних рівнянь, яку розв’язуємо методом Ньютона:

$$\begin{cases} A_i \bullet X = b_i, i=1,\ldots,m, \\ \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + Z = C, \\ XZ = \mu I. \end{cases} \qquad (1)$$

Нелінійна система (1) має $n(n+1)+m$ змінних та $m+n(n+1)/2+n^2$ рівнянь.

Результатом розв`язку системи (1) може бути несиметрична матриця *X*.

$$H_P(XZ) = \frac{1}{2}[PXZP^{-1} + P^{-T}Z^T X^T P^T] = \mu I, \qquad (2)$$

$$P = (X^{1/2}(X^{1/2}ZX^{1/2})^{-1/2}X^{1/2})^{-1/2} \qquad (3)$$

Напіввизначений симплекс-метод для розв'язання задач SDP

$$\text{SDP}: \quad \min\left\{ C\cdot X \;\middle|\; A_i\cdot X = b_i,\ \ i=1,\dots,m,\ \ X \succeq 0 \right\}$$

- 1) представимо розв'язок задачі SDP у вигляді (*Xj* - початковий набір матриць ранга одиниця, що визначає багатогранний конус підмножини S_+^n):

$$X = \sum \alpha_j X_j = \sum \alpha_j x_j x_j^T \qquad (1)$$

- 2) отримаємо задачу ЛП відносно вектора α:

$$\min\{\sum_j \alpha_j C\cdot X_j \mid \sum_j \alpha_j A_i\cdot X_j = b_i, i=1,\dots,m, \alpha \ge 0\} \qquad (2)$$

Теорема 1. *Якщо багатогранний конус, що визначається Xj, містить розв'язок задачі SDP, то оптимальне значення α задачі ЛП (2) визначить розв'язок задачі SDP.*

Інакше потрібно розширити багатогранний конус.

Напіввизначений симплекс-метод для розв'язання задач SDP

- 3)перевіримо оптимальність знайденого *X*: додамо новий стовпчик у задачу ЛП (розширимо багатогранний конус), для оцінки оптимальності буде використовуватися знак виразу (критерій симплекс-методу):

$$(C-\sum_i C\cdot x_i x_i^T \sum_{j=1}^{m} b_{ij}^{-1} A_j)\cdot x_k x_k^T, \qquad (1)$$

- 4)для знаходження $x_k x_k^T$, розв'яжемо задачу квадратичної оптимізації (знайдемо мінімільне значення виразу):

$$\min\{x^T Qx \,|\, \|x\|^2 = 1\}, \qquad (2)$$

де

$$Q = C-\sum_j C\cdot x_i x_i^T \sum_{j=1}^{m} b_{ij}^{-1} A_j. \qquad (3)$$

- Якщо $x^T Qx < 0$, то $C\cdot X$ можна зменшити.

Збіжність напіввизначеного симплекс-методу

- ***Теорема 2.*** *Якщо існує розв'язок задачі*

$$\min\{C \cdot X \mid A_i \cdot X = b_i, X \succeq 0, i = 1, \ldots, m\}, \qquad (1)$$

з меншим значенням цільової функції, ніж у точці $\sum_j \alpha_j^* X_j$ *,*
де α^* *– розв'язок задачі*

$$\min\{\sum_j \alpha_j C \cdot X_j \mid \sum_j \alpha_j A_i \cdot X_j = b_i, i = 1, \ldots, m, \alpha \geq 0\}, \qquad (2)$$

то тоді існує матриця X_k *рангу одиниця, така, що для розширеної задачі (2) справедлива нерівність*

$$C \cdot \left(\sum_j \alpha_j X_j + \alpha_k X_k\right) < C \cdot \sum_j \alpha_j^* X_j \qquad (3)$$

Збіжність напіввизначеного симплекс-методу

- ***Теорема 3.*** *Гранична точка послідовності* $\{x^k\}$ *належить* ε*-околу точки мінімуму* x^* *неперервної функції* $f(x)$ *на компактній допустимій множині, якщо* $f(x)$ *– обмежена на цій множині і для довільного* $\varepsilon > 0$ *(*ε *– точність обчислень), значення* $f(x)$ *спадає, а поза* ε*-околем точки* x^* *справедлива нерівність*

$$f(x^{k+1}) < f(x^k) - \delta, \ \delta > \varepsilon, \ \forall k$$

Збіжність напіввизначеного симплекс-методу

- **Теорема 4.** Нехай знайдений розв'язок задачі

$$\min\{\sum_j \alpha_j C \cdot X_j \mid \sum_j \alpha_j A_i \cdot X_j = b_i, i = 1,\dots,m, \alpha \geq 0\}, \qquad (1)$$

який визначає матрицю X^k і для якого виконується умова $C \cdot X^k - C \cdot X^* > \varepsilon > 0$

та $B(\varepsilon)$ – ε-окіл розв'язку X^*задачі

$$\min\{C \cdot X \mid A_i \cdot X = b_i, X \succeq 0, i = 1,\dots,m\}, \qquad (2)$$

Тоді гранична точка X^∞, яка визначається послідовністю розв'язків задач (1)

$$X^\infty \in B(\varepsilon).$$

Переваги напіввизначеного симплекс-методу

- 1. Розмірність задачі, яка розв’язується напіввизначеним симплекс-методом, дорівнює $3n\text{-}1+k$, де k - число ітерацій метода. Розмірність задачі, яка розв’язується методом внутрішньої точки, дорівнює $m+(n+1)n$.
- 2. Число обмежень задачі при розв’язку симплекс-методом дорівнює m. Число обмежень задачі при розв’язку методом внутрішньої точки дорівнює $m+n(n+1)/2+n^2$.
- 3. Область задач, які можуть бути розв’язані напіввизначеним симплекс-методом, є ширшою, так як не потребується рівність цільових функцій прямої та двоїстої задач.
- 4. Збіжність методів внутрішньої точки залежить від вибору початкової точки при розв’язку задачі. Симплекс-метод є нечутливим до вибору початкової точки.

Методи знаходження власного вектора, що відповідає мінімальному власному числу симетричної матриці

$$\min\{x^T Qx \,|\, \|x\|^2 = 1\}$$

- Ступеневий метод (оберненої ітерації)
- Метод Релея
- Ступеневий + метод Релея
- Метод Франка-Вулфа
- Метод QR
- Метод спряжених напрямків.
- **Метод спряжених напрямків з параметром.**

Метод спряжених напрямків для визначення напіввизначеності матриці

$$\min\{x^T Qx \,|\, \|x\|^2 = 1\} \qquad (1)$$

$$\min\{x^T Qx + r(\|x\|^2 - 1) \,|\, \|x\|^2 = 1\} \qquad (2)$$

$$Q^* = Q + rI \succeq 0 \quad \Longrightarrow \quad \min\{x^T Q^* x \,|\, \|x\|^2 = 1\} \qquad (3)$$

$$\max\{\|x\|^2 \,|\, x^T Q^* x = 1\} \qquad (4)$$

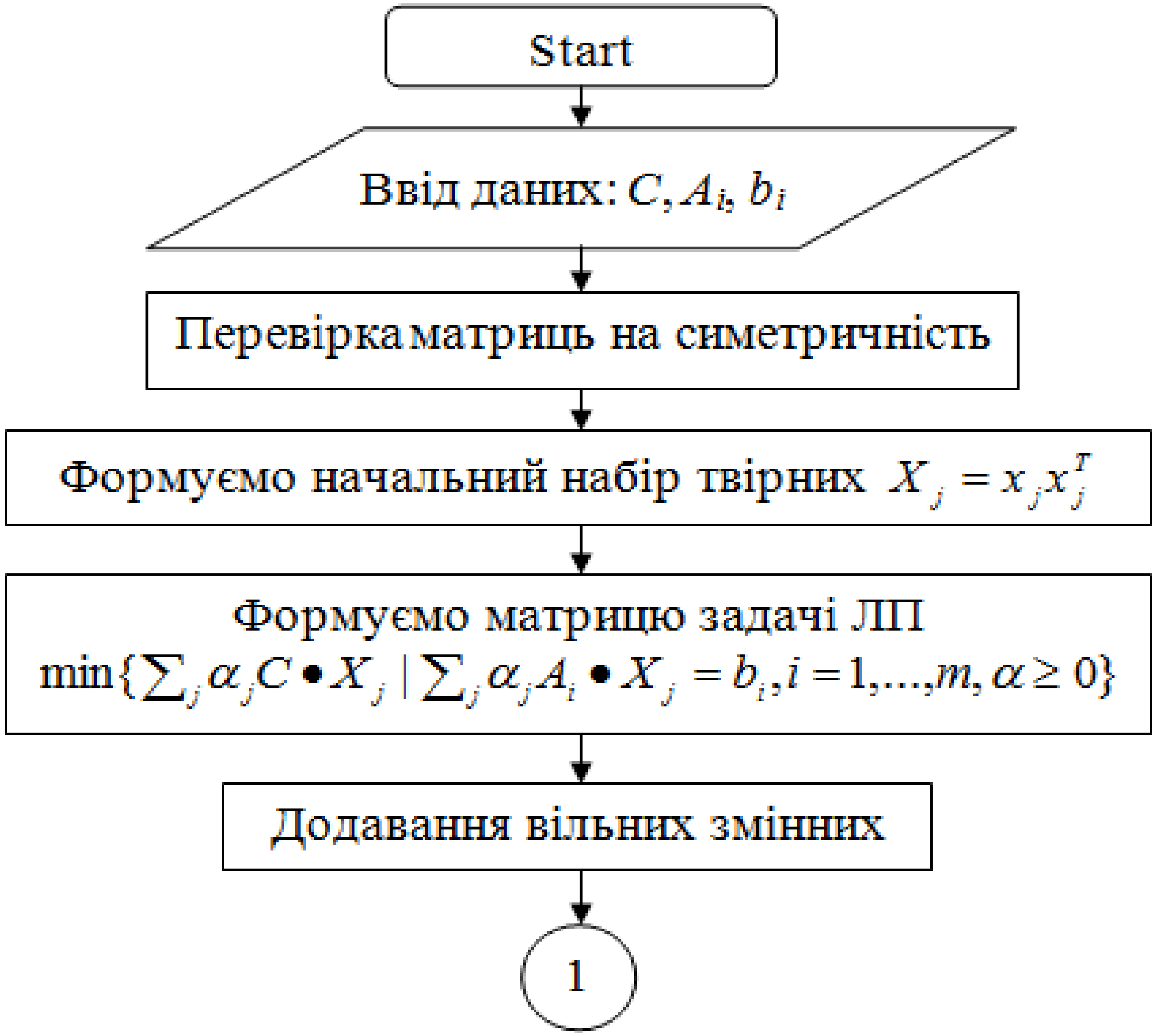
$$\max\{\,(x^k)^T x \,|\, x^T Q^* x = 1,\;\; k = 0, 1, \dots\} \qquad (5)$$

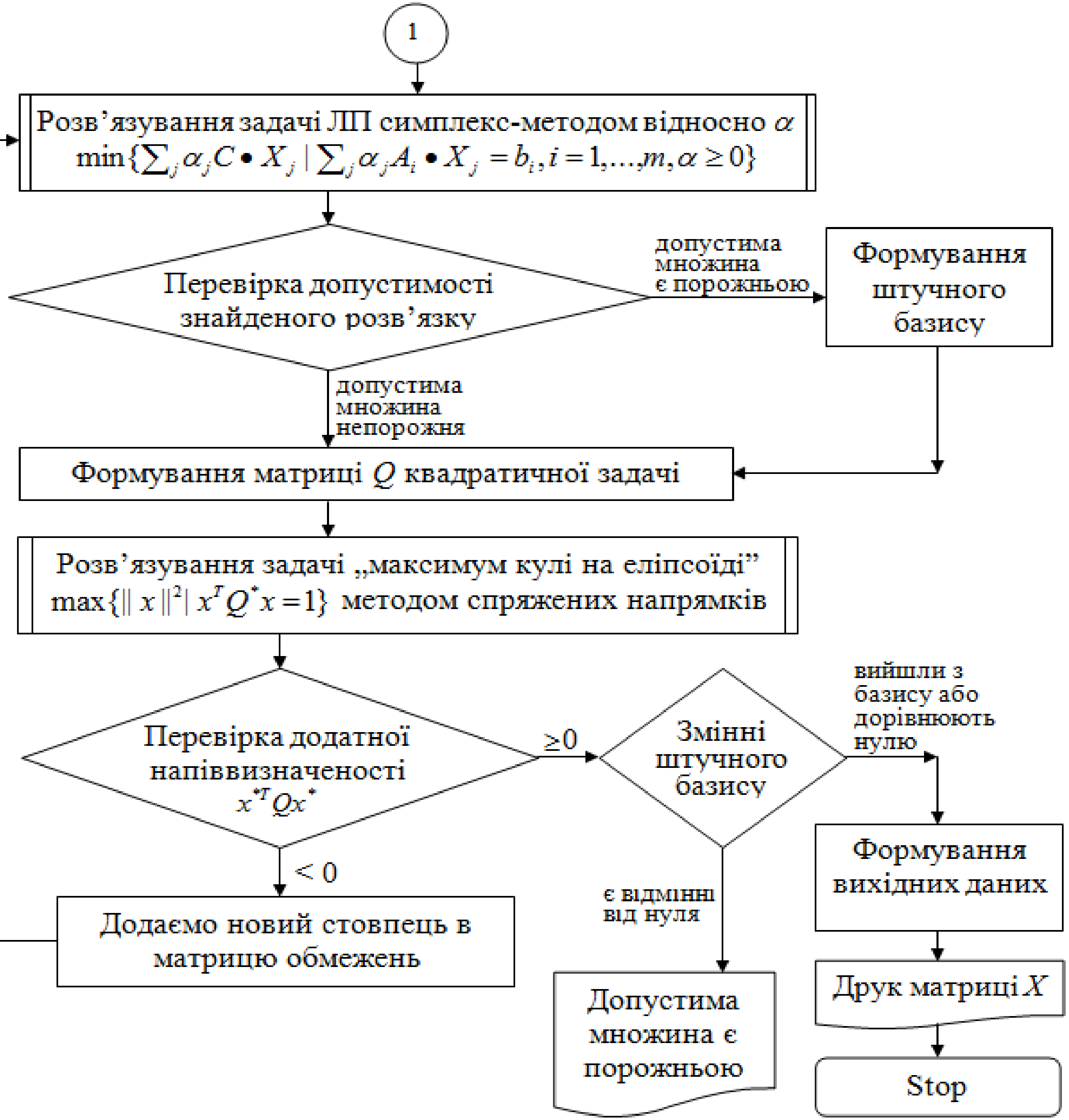
$$x^k = \frac{(Q^*)^{-k} x^0}{\sqrt{x^0 (Q^*)^{-(2k-1)} x^0}} \qquad (6)$$

$$z^{k+1} = x^{k+1} - \alpha x^k, \qquad \alpha = \beta \frac{(x^k)^T Q^* x^{k+1}}{(x^k)^T Q^* x^k}, \qquad z^{k+1} = x^{k+1} \qquad (7)$$

$$|\, x^{k+1} - x^k \,| \le \varepsilon$$

Напіввизначений симплекс-метод



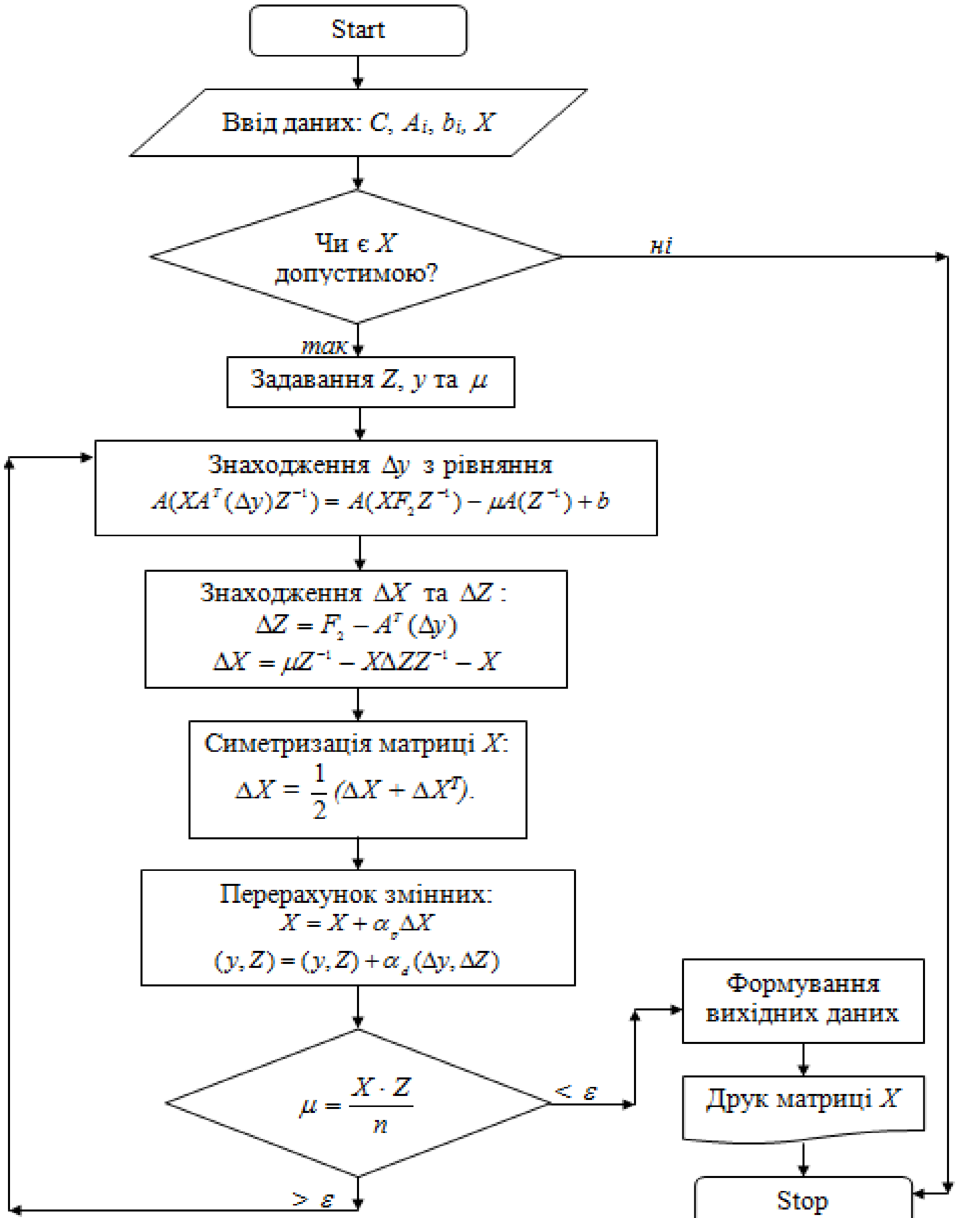

1
Розв'язування задачі ЛП симплекс-методом відносно α
$\min\{\sum_j \alpha_j C \bullet X_j \mid \sum_j \alpha_j A_i \bullet X_j = b_i, i = 1,\dots,m, \alpha \geq 0\}$
Перевірка допустимості знайденого розв'язку
допустима множина є порожньою
Формування штучного базису
допустима множина непорожня
Формування матриці Q квадратичної задачі
Розв'язування задачі „максимум кулі на еліпсоїді"
$\max\{\|x\|^2 \mid x^T Q^* x = 1\}$ методом спряжених напрямків
Перевірка додатної напіввизначеності $x^{*T} Q x^*$
≥0
Змінні штучного базису
вийшли з базису або дорівнюють нулю
< 0
Додаємо новий стовпець в матрицю обмежень
є відмінні від нуля
Формування вихідних даних
Друк матриці X
Допустима множина є порожньою
Stop

Реалізація методу внутрішньої точки

$$A_i \bullet X = b_i, i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i A_i + Z = C,$$

$$XZ = \mu I.$$



Аналіз чисельних результатів

n	m	Критерій	Симплекс-метод	CSDP	PENSDP	SDPA	SDPT3	SEDUMI
10	10	розв'язок	-198,97	-199,03	-199,03	-199,03	-199,03	-199,03
		час	6,45e-02	6,65e-03	2e-02	**4,51e-03**	1,3	8e-01
11	14	розв'язок	-74,97	-75,02	-75,02	-75,02	-75,02	-75,02
		час	2,29e-01	9,24e-03	4e-02	**8,51e-03**	1,2	8,3e-01
20	3	розв'язок	-873,3804	-873,3806	-873,3806	-873,3806	-873,3806	-873,3806
		час	3,93e-02	**1,073e-02**	4e-02	1,26e-01	1,5	8,6e-01
30	1	розв'язок	-5852,52	-5852,52	-5852,52	-5852,52	-5852,52	-5852,52
		час	2,23e-02	**1,41e-02**	5e-02	9,84e-03	1,3	6,9e-01
50	2	розв'язок	-3675,12	-3675,12	-3675,12	-3675,12	-3675,12	-3675,12
		час	1,71e-01	5,06e-02	**1,4e-01**	5,57e-02	1,7	1,06
100	2	розв'язок	-57408,05259	-57408,053	-57408,053	-57408,053	-57408,053	-57408,053
		час	5,6e-01	3,31e-01	6,2e-01	**2,53e-01**	3,1	3,63
25	4	розв'язок	-112232,2602	-112232,26	-112232,26	-112232,26	-112232,26	-112232,26
		час	1,48e-01	1,49e-02	8e-02	**1,38e-02**	1,5	9e-01
13	6	розв'язок	-9,194	-8,99	-9	-8,99	-8,99	-8,99
		час	**5,79e-03**	1,83e-02	3e-02	3,3e-02	1,6	7,7e-01

Напіввизначена релаксація для розв`язку загальних квадратичних задач (*)

$$\min\left\{ x^T Qx + d^T x \mid x^T A_i x + b_i^T x \le c_i,\ i = 1, \ldots, m \right\} \qquad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$\min\left\{ \tilde{Q} \cdot Y \mid \tilde{A}_i \cdot Y \le 0,\ i = 1,\ldots,m,\ Y \succeq 0,\ rank(Y) = 1 \right\} \qquad (2)$$

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d^T}{2} \\ \frac{d}{2} & Q \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_i = \begin{pmatrix} -c_i & \frac{b_i^T}{2} \\ \frac{b_i}{2} & A_i \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix}$$

*Luo Z.-Q. Semidefinite Relaxation of Quadratic Optimization Problems / Zhi-Quan Luo and others. – 2010. – 14 p.

Нижні та верхні оцінки в QCQP

- Напіввизначений симплекс-метод – нижня оцінка.
- Прямо-двоїстий метод внутрішньої точки – верхня оцінка.
- Перетворення обмежень в задачі SDP приводить до покращення нижньої та верхньої оцінок.

Розв’язок загальних квадратичних задач

Назва задачі	Розмірність перетвореної задачі	Отримана нижня оцінка	Отримана верхня оцінка	Оптимальний розв’язок
fp_2_1	6*7	-18,86	-16,5	-17
fp_2_2	7*9	**-213**	**-213**	-213
fp_2_4	7*12	-23.71	**-11**	-11
fp_3_3	7*13	-438	**-310**	-310
fp_3_4	3*6	-5	**-4**	-4
e_1	3*4	**-3**	**-3**	-3
f_a	3*5	-5,98	**-1,083**	-1,083
f_b	2*3	-8,572	**-8,5**	-8,5
f_c	5*11	**-13**	**-13**	-13
f_f	2*6	**-2,828**	**-2,828**	-2,828
s_1	3*5	0	**0,74**	0,74
s_1b	3*5	0	**0,74**	0,74

Розв’язок загальних квадратичних задач

Назва задачі	Розмірність перетвореної задачі	Отримана нижня оцінка	Отримана верхня оцінка	Оптимальний розв’язок
s_1c	3*5	0,69	**0,74**	0,74
s_1d	3*5	0,4	**0,74**	0,74
s_2	3*4	-0,75	**-0,5**	-0,5
s_2b	3*4	-1,5	**-0,5**	-0,5
s_2c	3*4	-0,54	**-0,5**	-0,5
s_2d	3*4	-0,938	**-0,5**	-0,5
g01	13*22	**-15**	**-15**	-15
g04	5*11	-32232	**-30665**	-30665
g07	10*18	24,3064	**24,3062**	24,3062
g11	3*4	**0,75**	**0,75**	0,75
g15	3*2	943,985	-	961,715
g18	10*23	**-0,866**	**-0,866**	-0,866

Розв'язок задачі максимізації норми вектора на перетині еліпсоїдів

$$\min\left\{ x^T Q x + p^T x \mid x^T A_i x + b_i^T x \le c_i,\ i = 1,\dots,m \right\} \qquad (1)$$

$$\max\left\{ \begin{array}{ll} \|\tilde{x}\|^2 & \mid\ \tilde{x}^T Q\tilde{x} + p^T\tilde{x} + s + (r-1)(\|\tilde{x}\|^2) \le d \\ & \quad \tilde{x}^T A_i\tilde{x} + b_i^T\tilde{x} - c_i + r\|\tilde{x}\|^2 \le d,\ i = 1,\dots,m \end{array} \right\} \qquad (2)$$

$$\min\left\{ \begin{array}{ll} -\|\tilde{x}\|^2 & \mid\ \tilde{x}^T Q\tilde{x} + p^T\tilde{x} + s + (r-1)(\|\tilde{x}\|^2) - d \le 0 \\ & \quad \tilde{x}^T A_i\tilde{x} + b_i^T\tilde{x} - c_i + r\|\tilde{x}\|^2 - d \le 0,\ i = 1,\dots,m \end{array} \right\} \qquad (3)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix}$$

Розв’язок задачі максимізації норми вектора на перетині еліпсоїдів

Назва задачі	Отримана нижня оцінка методом максимізації норми вектора на перетині еліпсоїдів	Отримана нижня оцінка за допомогою напіввизначеної релаксації
fp_3_4	-5,08	-5
f_b	-8,537	-8,572
s_2	-0,735	-0,75
s_2d	-0,828	-0,938

Розв'язок булевих задач

$$\min\{x^T Q_0 x + q_0^T x \mid x^T Q_i x + q_i^T x \le r_i, i = 1,\dots,m, x = 0 \vee 1, x \in E^n\} \qquad (1)$$

$$\min\left\{ x^T Q_0 x + q_0^T x \,\middle|\, \begin{array}{l} x^T Q_i x + q_i^T x \le r_i, i = 1,\dots,m, \\ x_i(x_i - 1) = 0, i = 1,\dots,m, x \in E^n \end{array} \right\} \qquad (2)$$

$$\min\left\{ x^T Q_0 x + q_0^T x \,\middle|\, \begin{array}{l} x^T Q_i x + q_i^T x \le r_i, i = 1,\dots,m, \\ x^T Q_i x + q_i^T x = r_i, i = m+1,\dots,p, x \in E^n \end{array} \right\} \qquad (3)$$

$$x^T Q_i x + q_i^T x - r_i = \begin{pmatrix} -r_i & \frac{q_i^T}{2} \\ \frac{q_i}{2} & Q_i \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix} = \overline{A}_i \bullet X, \;\; i = 0,1,\dots,p. \qquad (4)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Задача про рюкзак

$$\max\{p^T x \mid a^T x \le b, x = 0 \vee 1\} \qquad (1)$$

Верхня оцінка розв'язку цієї задачі, отримана за допомогою напіввизначеної релаксації, уточнювалася за допомогою розв'язання наступної задачі:

$$\min\{\| x - x^0 \|^2 \mid a^T x = b, x_i(x_i - 1) = 0, i = 1, \dots, n\} \qquad (2)$$

Задача	Розмірність задачі	Отримана верхня оцінка	Отримана нижня оцінка	Оптимальний розв'язок
1	8	294,988	280	280
2	7	107,5393	107	107
3	6	159,997	150	150
4	7	127,0274	127	127
5	8	1189,51	900	900

Задача кластеризації даних

Маємо : вершини $\{a^1,\ldots,a^m\}$

Знайти: підмножину S, яка включає k вершин, таких що сумарна вага дуг підграфу, породженого S, є максимальною.

$$\max\left\{ \frac{1}{2}x^T W x \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = k,\ \ x = 0 \vee 1 \right\} \qquad (1)$$

$$z = x + 1, \quad X = (z-1)(z-1)^T \qquad (2)$$

$$\max\left\{ \frac{1}{2}(z-1)^T W (z-1) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} z_i = k+m, \\ (z_i-1)(z_i-2) = 0, \quad i = 1,\ldots,m \end{array} \right\} \qquad (3)$$

$$\min\left\{ -(z-1)^T W (z-1) \;\middle|\; \begin{array}{l} (z_i-1)(z_i-2) = 0,\ i = 1,\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} z_i = k+m \end{array} \right\} \qquad (4)$$

$$\min\left\{ -\mathrm{W} \bullet Z \mid A_i \bullet Z = 0,\ i = 1,\ldots,m+1,\ Z \succeq 0 \right\} \qquad (5)$$

Задача кластеризації даних

Маємо вершини: $a_1(0,0)$, $a_2(0,3)$, $a_3(2,2)$, $a_4(3,0)$, $a_5(4,4)$.

Знайти: підмножину S, яка включає 3 вершини, таких що сумарна вага дуг підграфу, породженого S, є максимальною.

Задача *k-klustering* у вигляді задачі булевої оптимізації:

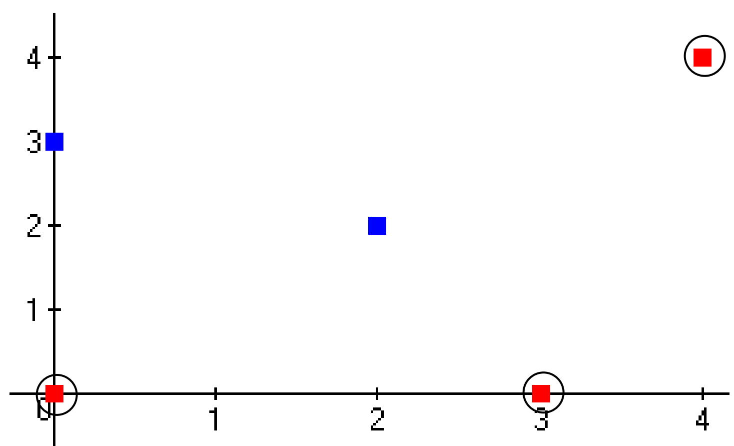
(1)

Задача *k-klustering* у вигляді задачі напіввизначеної оптимізації:

$$\min\left\{-\mathrm{W}\cdot Z \;\middle|\; A_i\cdot Z=0,\ i=1,\ldots,6,\ Z\succeq 0\right\} \tag{2}$$

$$Z=\begin{pmatrix}1\\ z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ z\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & z^T\\ z & zz^T\end{pmatrix}$$

$$z=\begin{pmatrix}1.6335\\ 1.5956\\ 1.4690\\ 1.6151\\ 1.6869\end{pmatrix} \qquad x=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$



Задача розміщення датчиків у мережі (*)

Маємо: вершини $a^1, \dots, a^m \in R^d$; датчики $x^1, \dots, x^k \in R^d$

$$\begin{cases} \left\| a^i - x^j \right\|^2 = d_{ij}^2 & \forall (i,j) \in N_a \\ \left\| x^i - x^j \right\|^2 = \bar{d}_{ij}^2 & \forall (i,j) \in N_x \end{cases} \qquad (1)$$

$$\min \left\{ \|u\|^2 + \|v\|^2 \;\middle|\; \begin{array}{ll} \left\| a^i - x^j \right\|^2 = d_{ij}^2 + u_{ij}, & \forall (i,j),\ i = 1,\dots,m,\ \ j = 1,..,k \\ \left\| x^i - x^j \right\|^2 = \bar{d}_{ij}^2 + v_{ij}, & i < j,\ i = 1,\dots,k,\ \ j = 2,\dots,k \end{array} \right\} \qquad (2)$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^k & u_1 & \dots & u_p & v_1 & \dots & v_l \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_n^1 & \dots & x_n^k & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$X_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad X_3 = X_2^T X_2$$

Man-Cho A. Theory of Semidefinite Programming for Sensor Network Localization / A. Man-Cho, Y. Ye. – ACM-SIAM Symposium on Descrete Algorithms, 2004. – 16 p.

Задача розміщення датчиків у мережі

$a_1(1, 0)$

$a_2(2, 1)$

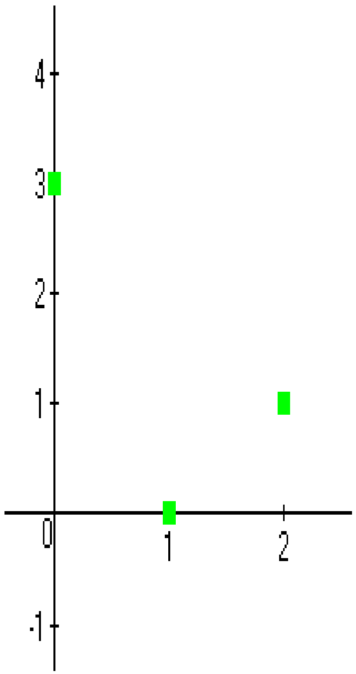
$a_3(0, 3)$

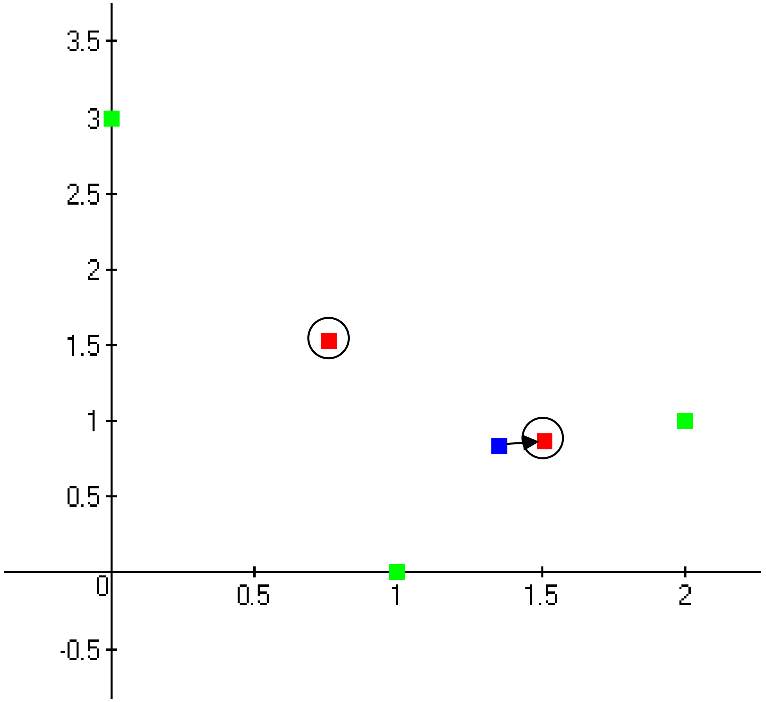
$d_{11} = d_{21} = d_{31} = d_{12} = 1$

$\bar{d}_{12} = 1$

$x_1 - ?$

$x_2 - ?$





Наукова новизна одержаних результатів

- Для розв'язку задач напіввизначеної оптимізації обґрунтовано напіввизначений симплекс-метод, який використовує симплекс-метод для розв'язку задач лінійної оптимізації, досліджено та обґрунтовано його збіжність, проведено порівняння його ефективності з іншими методами для розв'язку задач напіввизначеної оптимізації.
- Запропоновано новий метод спряжених напрямків для визначення напіввизначеності матриць, який використовується на кожній ітерації напіввизначеного симплекс-методу, порівняльні чисельні експерименти показали більш швидку збіжність нового методу.
- Вдосконалена напіввизначена релаксація для розв'язку загальних квадратичних та комбінаторних задач, задачі максимізації норми вектора на перетині еліпсоїдів.
- Уперше застосовано новий напіввизначений симплекс-метод для розв'язку задач напіввизначеної оптимізації, які отримуються шляхом релаксації багатоекстремальних задач.
- Визначена ефективність напіввизначеної релаксації для різних класів задач.
- Запропоновано методику знаходження верхніх і нижніх оцінок розв'язків у загальних задачах квадратичної оптимізації.

Практичне значення одержаних результатів

- Результати дисертації мають практичну цінність. Новий напіввизначений симплекс-метод може бути використаний для розв’язання загальних квадратичних задач оптимізації за допомогою напіввизначеної релаксації. Розроблене програмне забезпечення для розв’язку задач напіввизначеної оптимізації реалізує два найбільш популярних та ефективних алгоритми (внутрішньої точки, напіввизначений симплекс-метод), ефективність яких перевірена за допомогою чисельних експериментів над задачами різної розмірності.

Апробація результатів дисертації

- Результати дисертаційної роботи пройшли апробацію на міжнародних конференціях «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (Дніпропетровськ, 2009 р.), «Моделирование и исследование устойчивости динамических систем» (Київ, 2010 р.), «Математичне та імітаційне моделювання систем» (Чернігів, 2011, 2013), «Вычислительная и прикладная математика» (Київ, 2011 р., 2014 р.), «Информатика и системные науки» (Полтава, 2012 р., 2014 р.), «Контроль і управління в складних системах» (Вінниця, 2012 р.), «Хімія та сучасні технології» (Дніпропетровськ, 2013 р.), «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях» (Харків, 2013 р.), «Комп’ютерні науки та інженерія» (Львів, 2013 р.), «Актуальні проблеми современной науки»(Росія, Уфа, 13-14 грудня 2013г.).

Основні публікації

1 стаття у Міжнародному науково-технічному журналі «Проблемы управления и информатики», який введений в базу даних Scopus:

- Косолап А. И. Численная эффективность методов полуопределенной оптимизации / А. И. Косолап, А. С. Перетятько // Проблемы управления и информатики. – 2014. – № 2. – С. 56-64.

1 стаття в іноземному періодичному виданні:

- Peretiatko A. S. Using semidefinite simplex method for solving semidefinite problems / A. S. Peretiatko // Theoretical & Applied Science. – 2013. – № 12 (8). – P. 5-8.

6 статей у фахових виданнях згідно з переліком:

- Косолап А. І. Напіввизначена оптимізація для моделювання складних систем / А. І. Косолап, А. С. Перетятько // Математичні машини і системи. – 2012. – № 1. – С. 174-179.

Основні публікації

- Косолап А. И. Верхние и нижние оценки решений в общих задачах квадратичной оптимизации / А. И. Косолап, А.С. Перетятько // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» – 2013.- Вип. 23, № 1089. - С. 96-102.
- Косолап А. И. Полуопределенное программирование для решения задач комбинаторной оптимизации / А. И. Косолап, А. С. Перетятько // Вісник Запорізького національного університету. – 2013. – № 2. – С.
- Косолап А. И. Полуопределенный симплекс-метод / А. И. Косолап, А. С. Перетятько // Вісник Черкаського університету. Серія «Прикладная математика. Інформатика». – 2013. – № 18 (271). – С. 50-56.
- Косолап А. И. Сопряженные направления в задачах на собственные значения симметричных матриц / А. И. Косолап, А. С. Перетятько // Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій. – Дніпропетровськ: Ліра, 2013. – вип.21. – С. 114-122.
- Косолап А.И. Полуопределенная оптимизация в задаче расположения датчиков в сети / Косолап А.И., Перетятько А.С. // Математические машины и системы. – 2014. – № 2. – С. 105 – 112.

Дякую за увагу!

Мета дослідження

- пошук ефективного методу для розв’язку задач напіввизначеної оптимізації та застосування напіввизначеної релаксації для розв’язку прикладних задач SDP

Задачі дослідження

- удосконалити напіввизначений симплекс-метод для розв’язання задач SDP, що ґрунтується на симплекс-методі для розв’язання задач лінійної оптимізації, дослідити його збіжність, визначити його ефективність;
- застосувати та удосконалити напіввизначену релаксацію для розв’язання багатоекстремальних задач: квадратичних, комбінаторних та максимуму норми вектора на перетині еліпсоїдів;
- розглянути сфери застосування напіввизначеної оптимізації: технічні, економічні, обчислювальна геометрія;
- провести чисельні експерименти для перевірки ефективності застосування напіввизначеної релаксації для розв’язання різних класів задач, які зводяться до загальної задачі квадратичної оптимізації.

Об’єкт дослідження

- методи та задачі напіввизначеної оптимізації

Предмет дослідження

- напіввизначена релаксація загальних квадратичних задач та застосування напіввизначеного симплекс-методу для розв’язання релаксованих задач

Методи дослідження

- При розв’язанні поставлених задач використовувалася багатовимірна евклідова геометрія, опуклий аналіз, теорія та чисельні методи оптимізації