ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПАРАБОЛІЧНИМИ РІВНЯННЯМИ З НЕОБМЕЖЕНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Горбонос Світлана Олексіївна

Дніпропетровськ

2014

Об'єкт дослідження

Лінійно-квадратична задача оптимального керування параболічними рівняннями з необмеженими коефіцієнтами в головній частині оператора.

Предмет дослідження

Апроксимація розв'язків задач керування параболічними рівняннями з необмеженими коефіцієнтами та необхідні умови оптимальності для такого класу задач.

Мета дослідження

Дослідження задач оптимального керування лінійними параболічними рівняннями з необмеженими коефіцієнтами в головній частині їх еліптичного оператора, отримання достатніх умов розв'язності, а також побудова необхідних умов оптимальності.

Огляд літератури

1. **Fannjiang M. A.** Diffusion in turbulence / M. A. Fannjiang, G. C. Papanicolaou // Probab.Theory and Related Fields, — 1996. — Vol.105. — P. 279-334.
2. **Kogut P. I.** On attainability of optimal solutions for linear elliptic equations with unbounded coefficients /P. I. Kogut, O. P. Kupenko// Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2012. — Вип.4. — №8. — С.63-82.
3. **Kogut P. I.** On Approximation of an Optimal Boundary Control Problem for Linear Elliptic Equation with Unbounded Coefficients / P. I. Kogut // Discrete and Continuous Dynamical Systems, — 2014. — Vol.34(5). — P. 2105-2133.
4. **Horsin T.** Optimal L^2-Control Problem in Coefficients for a Linear Elliptic Equation. I. Existence result / T. Horsin, P. I. Kogut //it appears in Mathematical Control and Related Fields, 2015. (see arXiv:1306.2513)

Задача оптимального керування (ЗОК)

$$y_t - div(\nabla y + A(x)\nabla y) = f \quad \text{на} \quad \Omega \times [0, T] \tag{1}$$

$$y = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times [0, T], \quad \partial y / \partial \nu_A = u \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times [0, T], \tag{2}$$

$$y(t_0, x) = y_0 \ \in L^2(\Omega) \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{3}$$

$$I(u, y) = \|y - y_d\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))} \to \inf, \tag{4}$$

де $T > 0$ — задана величина, Ω — відкрита, обмежена множина простору $\mathbb{R}^N$, а її межа $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Тут $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$ і $A(x) \in L^2(\Omega; \mathbb{S}^N)$ — кососиметрична матриця.

Означення слабкого розв'язку

Розв'язком задачі (1)-(3) для $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$ і заданих $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ і $A(x) \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ будемо називати функцію $y(t,x) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, якщо $y_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ і

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega y_t \varphi \, dx\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\nabla\varphi, \nabla y + A\nabla y)_{\mathbb{R}^N} \, dx\, dt = \\ = \int\limits_0^T \langle f, \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \, dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma_2} u\varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} \, dt \quad (5)$$

для будь-якого $\varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ і виконується рівність

$$y(t_0,x) = y_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{на} \quad \Omega. \quad (6)$$

Означення 2

Будемо казати, що елемент $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ належить до множини D, якщо для $\forall \varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$

$$\left| \int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt \right| \le c(y)\left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx\,dt \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Для $\forall y \in D, \forall \varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ введемо форму

$$[y,\varphi] = \int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt \quad (8)$$

Означимо для $\{\varphi_\varepsilon\} \subset C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ білінійну форму $[y,\varphi]$ за правилом

$$[y,\varphi] = \lim_{\varepsilon\to\infty}[y,\varphi_\varepsilon], \text{ де } \varphi_\varepsilon \to \varphi \text{ в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \quad (9)$$

y слабкий розв'язок задачі (1)-(3) тоді і тільки тоді, коли $y \in D$ і для $\forall \varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ має місце рівність

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla y)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt + [y,\varphi] = -\int_0^T \int_\Omega y_t \varphi\, dx\, dt + \\ + \int_0^T \langle f,\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} u\varphi\, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt. \quad (10)$$

Енергетична рівність:

$$\|y\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + [y,y] + \frac{1}{2}\|y(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \\ + \int_0^T \langle f,y\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} uy\, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt. \quad (11)$$

Множина допустимих пар

$$\Xi = \left\{(u, y) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times D : I(u, y) < \infty, \text{ має місце } (5)\right\}$$

Теорема 1

Нехай для задачі (1)-(4) множина Ξ непорожня. Тоді для кожного $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ і $A(x) \in L^2(\Omega; \mathbb{S}^N)$ існує єдиний оптимальний розв'язок $(u, y) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times D$ задачі (1)-(4).

Означення 3

Надалі наближення $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Omega;\mathbb{S}^N)$ матриці $A \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ з властивістю $A_k \to A$ сильно в $L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ будемо називати L^∞-апроксимацією матриці A.

$$y_t - div(\nabla y + A_k \nabla y) = f \quad \text{на} \quad \Omega \times [0,T], \tag{12}$$

$$y = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \quad \partial y/\partial \nu_{A_k} = u \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times [0,T], \tag{13}$$

$$y(t_0, x) = y_0 \ \in L^2(\Omega) \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{14}$$

$$I_k(u,y) := I(u,y) \to \inf$$

$$\forall (u,y) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{15}$$

Твердження 2

Нехай $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$, $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $A \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$. Нехай для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ y^k - відповідні розв'язки задач (12)-(14) тоді

$$y^k \rightharpoonup y^* \text{ в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \ \ \dot{y}^k \rightharpoonup \dot{y}^* \text{ в } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

де y^* — слабкий розв'язок задачі (1)-(3) і має місце нерівність:

$$[y^*, y^*] \geq 0.$$

Твердження 3

Для $\forall k \in \mathbb{N}$ існує єдина оптимальна пара $\left(u_0^k, y_0^k\right) \in \Xi_k$ для задачі (12)-(15) і така, що послідовність $\left\{\left(u_0^k, y_0^k\right) \in \Xi_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$y_0^k \rightharpoonup y^*, \ \ u_0^k \rightharpoonup u^*, \ \ (u^*, y^*) \in \Xi.$$

$$\left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi_\varepsilon} I_\varepsilon(u,y)\right\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{Var} \left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y)\right\rangle \Leftrightarrow$$

I. Відносно $\{\mathbb{U}_\varepsilon \times \mathbb{Y}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ простір $\mathbb{U}\times\mathbb{Y}$ такий, що для $\forall\delta \geq 0$ і $\forall(u,y)\in\Xi$ існує $(u^*,y^*)\in\Xi$ і послідовність $\{(u_\varepsilon,y_\varepsilon)\in\mathbb{U}_\varepsilon\times\mathbb{Y}_\varepsilon\}$:

$$\|u-u^*\|_{\mathbb{U}}+\|y-y^*\|_{\mathbb{Y}}\leq\delta \quad \text{і} \quad (u_\varepsilon,y_\varepsilon)\xrightarrow{\tau}(u,y) \quad \text{в} \quad \mathbb{U}_\varepsilon\times\mathbb{Y}_\varepsilon.$$

II. Якщо $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ і $\{(u_k,y_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$: $\varepsilon_k\to 0$ коли $k\to\infty$ для $\forall k\in\mathbb{N}$ і $(u_k,y_k)\xrightarrow{\tau}(u,y)$ в $\mathbb{U}_{\varepsilon_k}\times\mathbb{Y}_{\varepsilon_k}$ тоді

$$(u,y)\in\Xi; \quad I(u,y)\leq\liminf_{k\to\infty} I_{\varepsilon_k}(u_k,y_k).$$

III. Для $\forall(u,y\in\Xi)\subset\mathbb{U}\times\mathbb{Y}$ і $\forall\delta>0$ існує стала $\varepsilon^0>0$ і $\{(u_\varepsilon,y_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$:

$$(u_\varepsilon,y_\varepsilon)\in\Xi_\varepsilon,\ \forall\varepsilon\leq\varepsilon^0,\ (u_\varepsilon,y_\varepsilon)\xrightarrow{\tau}(\widehat{u},\widehat{y}) \text{ в } \Xi_\varepsilon,$$

$$\|u-\widehat{u}\|_{\mathbb{U}}+\|y-\widehat{y}\|_{\mathbb{Y}}\leq\delta,\ I(u,y)\geq\limsup_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(u_\varepsilon,y_\varepsilon)-\widehat{C}\delta,$$

Означення 4

Пару $(u^*, y^*) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ називатимемо варіаційним розв'язком задачі оптимального керування (1)-(4), якщо існує L^∞-апроксимація матриці A така,що

$$I(u^*, y^*) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u, y), \quad (u^*, y^*) \in \Xi, \tag{16}$$

де $y_0^k \to y^*$ в $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ і $u_0^k \to u^*$ в $L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$, і має місце

$$\|y^*\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \frac{1}{2}\|y^*(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} =$$

$$= \int_0^T \langle f, y^* \rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} u^* y^*\, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt + \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Твердження 4

Нехай $(u^*, y^*) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ — варіаційний розв'язок задачі оптимального керування (1)-(4) і

$$\left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi_k} I_k(u,y) \right\rangle \xrightarrow{Var} \left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y) \right\rangle .$$

Тоді

$$[y^*, y^*] = 0.$$

Теорема 2

Нехай матриця $A \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ є такою, що

$$[y,y] = 0 \quad \forall y \in D. \tag{17}$$

Тоді єдиний розв'язок (u_0, y_0) задачі оптимального керування (1)-(4) є варіаційним.

Функціонал Лагранжа

$\widehat{L} : L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times D \times \mathbb{R}_+ \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$

$$\widehat{L}(u, y, \lambda, p) = \lambda I(u, y) + \int_0^T \int_\Omega y_t p \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla p, \nabla y)_{\mathbb{R}^N} \, dx \, dt$$

$$+ [y, p] - \langle f, p \rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega));L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} - \int_0^T \int_{\Gamma_2} u\varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} \, dt, \tag{18}$$

де $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in C^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$.

Означення (Узагальнена права похідна за напрямом)

Будемо казати, що відображення $y \mapsto \widehat{L}(u, y, \lambda, p)$ має узагальнену праву похідну за напрямом $h \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ в точці $(u, y, \lambda, p) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times D \times \mathbb{R}_+ \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, якщо праву похідну за гладким напрямом $\varphi \in C^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$ можно неперервно продовжити для $\varphi = h \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, тобто

$$D_y^+ \widehat{L}(u, y, \lambda, p, h) = \lim_{\varepsilon \to 0} D_y^+ \widehat{L}(u, y, \lambda, p, \varphi_\varepsilon)$$

для будь-яких $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0} \subset C^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$ таких, що:

$$\varphi_\varepsilon \to h \quad \text{сильно в} \quad L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$
$$(\varphi_\varepsilon)_t' \to (h)_t' \quad \text{сильно в} \quad L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Лема 1

Нехай задано четвірку

$$(u, y, \lambda, p) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)) \times D \times \mathbb{R}_+ \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

таку, що $p \in D$, тоді для кожного напряму $h \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ узагальнена права похідна за напрямом $D_y^+ \widehat{L}(u, y, \lambda, p, h)$ існує і має вигляд:

$$D_y^+ \widehat{L}(u, y, \lambda, p, h) = 2\lambda \int_0^T \int_\Omega (y - y_d) h \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega h_t' p \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla p, \nabla h)_{\mathbb{R}^N} \, dx \, dt - [p, h]. \quad (19)$$

Означення (Квазі-спряжений оператор)

Нехай $u_\theta \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$ — допустиме керування, і нехай ε_θ — задана величина, а y_θ — слабкий розв'язок задачі (1)-(3). Нехай $(u_0, y_0) \in \Xi$ — оптимальна пара задачі (1)-(4). Розподілення ψ_θ будемо називати квазі-спряженим станом до $y_0 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ для фіксованих $\theta \in [0,1]$, $\varepsilon_\theta \in [0,1]$, якщо ψ_θ задовольняє тотожність:

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla\psi_\theta)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt - \int_0^T \int_\Omega (\psi_\theta)'_t \varphi\,dx\,dt = -2\lambda \int_0^T \int_\Omega (y_0 - y_d)\varphi\,dx\,dt, \quad (20)$$

де $u_\theta = u_0 + \theta(\widehat{u} - u_0)$, $y_\theta = y_0 - \varepsilon_\theta(y(u_\theta) - y_0)$.

Припущення

(I) Нехай $(u_0, y_0) \in \Xi$ — оптимальна пара задачі (1)-(4),$\widehat{u}$ — довільне допустиме керуванніі $u_\theta = u_0 + \theta(\widehat{u} - u_0)$ для кожного $\theta \in [0, 1]$. Тоді для достатньо малих θ і $y \in D$ існує послідовність відповідних розв'язків крайової задачі (1)-(3) $y_\theta := \{y(u_0 + \theta(\widehat{u} - u_0))\}_{\theta \to 0}$:

$$y_\theta \rightharpoonup y(u_0) \quad \text{в} \quad L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \;\; \theta \to 0$$

(II) Нехай $(u_0, y_0) \in \Xi$ — оптимальна пара задачі (1)-(4),$\widehat{u}$ — довільне допустиме керуванніі $u_\theta = u_0 + \theta(\widehat{u} - u_0)$ для будь-якого $\theta \in [0, 1]$. Тоді для $\forall \theta, \varepsilon_\theta \in [0, 1]$ $\exists \gamma \in (0, \infty]$ таке, що $\nabla \psi_\theta \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$ або $A(x) \in L^{2+\frac{4}{\gamma}}(\Omega; \mathbb{S}^N)$, $\nabla \psi_\theta \in L^2(0, T; L^{2+\gamma}(\Omega))$ і послідовність квазі-спряжених операторів $\{\psi_\theta\}_{\theta \to 0}$ є відносно компактною в сильній топології простору $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Теорема 3

Нехай $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $y_d \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ — задані розподілення і (u_0, y_0) — оптимальна пара задачі (1)-(4). Тоді виконання гіпотез (I)-(II) гарантує існування елементів $\lambda \in \mathbb{R}_+$ і $\bar{\psi} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ таких, що λ і $\bar{\psi}$ одночасно не дорівнюють 0 і

$$\int_0^T \int_\Omega (y_0)'_t \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla y_0 + A\nabla y_0)_{\mathbb{R}^N} \, dx \, dt = \\ = \int_0^T \int_\Omega f\varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} u_0 \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} \, dt, \quad (21)$$

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla\bar{\psi} + A\nabla\bar{\psi})_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt - \int_0^T \int_\Omega (\bar{\psi})'_t \varphi\, dx\, dt =$$

$$= -2\lambda \int_0^T \int_\Omega (y_0 - y_d)\varphi\, dx\, dt, \quad \forall \varphi \in C^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega)) \quad (22)$$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_2} (\widehat{u} - u_0) u_0\, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt \geq \int_0^T \int_{\Gamma_2} (\widehat{u} - u_0)\bar{\psi}\, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt. \quad (23)$$

Означення 5

Пару $(u^*, y^*) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ називатимемо неваріаційним розв'язком задачі оптимального керування (1)-(4), якщо

$$I(u^*, y^*) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y), \quad (u^*, y^*) \in \Xi$$

і має місце

$$\|y^*\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \frac{1}{2}\|y^*(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \neq$$
$$\neq \int_0^T \langle f, y^*\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, dt + \int_0^T\int_{\Gamma_2} u^* y^*\, d\mathcal{H}^{N-1}\, dt + \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Нехай Ω — одинична куля простору $\mathbb{R}^3$, а $\Gamma = \{\|x\|_{\mathbb{R}^3} = 1\}$ і $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Нехай $A \in L^2\left(\Omega; \mathbb{S}^3\right)$ і $y_d \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ означені наступним чином:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & a(x) & 0 \\ -a(x) & 0 & -b(x) \\ 0 & b(x) & 0 \end{pmatrix},$$

де $a(x) = \frac{x_1}{2\|x\|^2_{\mathbb{R}^3}}$ і $b(x) = \frac{x_3}{2\|x\|^2_{\mathbb{R}^3}}$;

$$y_d(t,x) = t\sqrt{\frac{52\alpha}{\pi T^3(1-\exp(-2\pi))}}\left(1 - \|x\|^5_{\mathbb{R}^3}\right)$$
$$\times \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}\exp\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2} - x_1}{x_2}\right),$$

для всіх $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$.

Причому для додатного $\alpha \in \mathbb{R}$ має місце

$$y_d \in D \quad \text{i} \quad [y_d, y_d] = -\alpha < 0.$$

Розглянемо таку задачу:

$$I(u,y) = \|y - y_d\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D))} + \|u - u_d\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))} \to \inf$$

$$y_t - div\big(\nabla y + A(x)\nabla y\big) = f \quad \text{in } (0,T)\times\Omega,$$

$$y(0,\cdot) = y_0 \quad \text{in } \ \Omega,$$

$$y(\cdot,x) = 0 \quad \text{on } (0,T)\times\Gamma_D, \quad \frac{\partial y(\cdot,x)}{\partial \nu_A} = u \quad \text{on } (0,T)\times\Gamma_N,$$

$$u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)),$$

Якщо $y_0 \equiv 0$ в Ω і

$$f := (y_d)_t - \mathrm{div}\,(\nabla y_d + A\nabla y_d) \quad \text{і} \quad u_d := \gamma^1_{\Gamma_N}(y_d), \qquad (24)$$

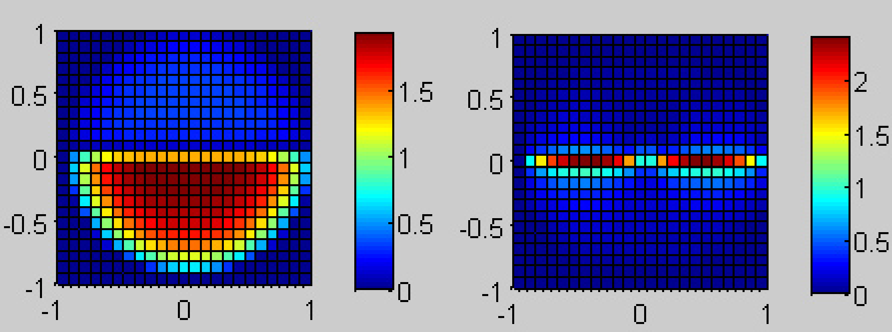
де

$$\gamma^1_{\Gamma_N} : L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D)) \to L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_N))$$

оператор сліду, такий що

$$\gamma^1_{\Gamma_N}(y) = \left.\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right|_{\Gamma_N} := \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\delta_{ij} + a_{ij}(x)\Big) \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i).$$

Тоді пара $(u^0, y^0) := (u_d, y_d) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)) \times D(A)$ — єдиний оптимальний розв'язок задачі


1
0.5
0
-0.5
-1
-1
0
1
1.5
1
0.5
0
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
0
1
2
1.5
1
0.5
0

Для $\forall\varepsilon > 0$ введемо функцію зрізки $T_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за правилом:

$$T_\varepsilon(s) = \max\{\min\{s, \varepsilon^{-1}\}, -\varepsilon^{-1}\}.$$

Для матриці потоку $A \in L^2(\Omega; \mathbb{S}^N)$ введемо оператор зрізки $T_\varepsilon : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$:

$$T_\varepsilon(A) = [T_\varepsilon(a_{ij})]_{i,j=1}^N \quad \forall\varepsilon > 0,$$

з цим оператором пов'яжемо множину підобластей $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ множини Ω

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus Q_\varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0,$$

де

$$Q_\varepsilon = \text{замикання}\left\{x \in \Omega : \|A(x)\|_{\mathbb{S}^N} := \max_{i,j=1\dots N} |a_{ij}(x)| \geq \varepsilon^{-1}\right\}.$$

Матриця $A \in L^2(\Omega; \mathbb{S}^N)$ Q-типу якщо виконуються умови:

(a) Ω_ε — відкриті зв'язні підмножини Ω з межами Ліпшиця, для яких існує $\delta > 0$ таке, що $\partial\Omega \subset \partial\Omega_\varepsilon$ і $\operatorname{dist}(\Gamma_\varepsilon, \partial\Omega) > \delta$, де $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega$.

(b) поверхнева міра дірок $Q_\varepsilon = \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ достатньо мала в наступному сенсі: $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_\varepsilon) = o(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$.

(c) Для $\forall h \in D$ існує стала $c(h)$:

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} (\nabla\varphi, A(x)\nabla h)_{\mathbb{R}^N} \, dx \, dt \right| \leq c(h) \sqrt{\frac{|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon|}{\varepsilon}} \left(\int_0^T \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} |\nabla\varphi|^2_{\mathbb{R}^N} \, dx \, dt \right)^{1/2}$$

$$\left\{ \left\langle \inf_{(u,v,y)\in\Xi_\varepsilon} I_\varepsilon(u,v,y) \right\rangle, \varepsilon \to 0 \right\}, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(u,v,y) = \|y - y_d\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega_\varepsilon))} + \|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))} \\ + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \|v\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))}, \end{aligned}$$

$$y_t - \mathrm{div}\left(\nabla y + A(x)\nabla y\right) = f \quad \text{на} \quad \Omega_\varepsilon \times [0,T],$$

$$y = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \;\; \partial y/\partial\nu_A = u \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times [0,T],$$

$$\partial y/\partial\nu_A = v \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon \times [0,T],$$

$$y(t_0, x) = y_0 \;\in L^2(\Omega) \quad \text{на} \quad \Omega_\varepsilon,$$

де $v \in L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))$ — фіктивне керування.

Означення збіжності на шкалі просторів

Послідовність наборів $\{(u_\varepsilon, v_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ слабко збігається до пари $(u, y) \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ в шкалі просторів

$$\left\{L^2(0,T; L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)) \times L^2(0,T; H_0^1(\Omega_\varepsilon))\right\}_{\varepsilon>0},$$

якщо

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L^2(0,T; L^2(\Gamma_2)), \quad y_\varepsilon \rightharpoonup y \quad \text{в} \quad L^2(0,T; H_0^1(\Omega_\varepsilon)),$$

і

$$\sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_\varepsilon)} \|v_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))} < +\infty.$$

Теорема 4

Нехай $y_d \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ і $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ — задані функції, а $A \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ —матриця Q-типу. Нехай $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — послідовність перфорованих підмножин множини Ω пов'язаних з матрицею A. Тоді задача

$$\left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y) \right\rangle$$

буде варіаційною границею послідовності задач (25), коли параметр $\varepsilon \to 0$.

Теорема 5

Нехай матриця A — Q-типу, нехай $y_d \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ — задані функції. Нехай $\left\{(u_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\right\}_{\varepsilon>0}$ — послідовність оптимальних розв'язків задачі (25).

Тоді єдиний оптимальний розв'язок задачі оптимального керування (1)-(4) можна наблизити в наступному сенсі:

$$u_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0 \quad \text{в} \quad L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)), \quad y_\varepsilon^0 \rightharpoonup y^0 \quad \text{в} \quad L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\varepsilon)),$$

$$\inf_{(u,y)\in\Xi} I(u, y) = I(u^0, y^0) = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0).$$

– вперше отримано достатні умови розв'язності задач граничного оптимального керування лінійними параболічними рівняннями з необмеженими коефіцієнтами;
– вперше введено до розгляду поняття варіаційного та неваріаційного розв'язку поставленої задачі та отримано достатні умови їх існування;
– запропоновано схему апроксимації наведених задач, залучивши принципи фіктивних граничних керувань в перфорованій області;
– наведено приклад задачі керування з необмеженими коефіцієнтами з неваріаційним розв'язком, апроксимація якого традиційними чисельними методами є неможливою;
– вперше отримано достатні умови досяжності неваріаційних розв'язків наведених задач оптимальними оптимізаційних задач з фіктивними керуваннями;
– отримано та обгрунтовано необхідні умови оптимальності для поставлених задач керування.

1. Горбонос С.О. Варіаційні розв'язки задачі оптимального керування з необмеженими коефіцієнтами / С.О. Горбонос, П.І. Когут // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. - ДНУ, 2013. - Вип.5. - №8. - С.69-83;
2. Горбонос С.А. Об аппроксимации решений одного класса задач оптимального управления для параболического уравнения с неограниченными коэффициентами / С.А. Горбонос // Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики". - 2014. - Вип.5. - С.15-29;
3. S. O. Gorbonos On Pathological Solutions to an Optimal Boundary Control Problem forLinear Parabolic Equation / Gorbonos S. O., Kogut P.I. // Сборник научных трудов "Кибернетика и вычислительная техника". - 2014. - Вип.176. - С.5-18;
4. S. O. Gorbonos On non-variational solutions to optimal boundary control problems for parabolic equations / Gorbonos S. O., Kogut P.I. // Вісник ДНУ. Серія: Математика. - ДНУ, 2014. - Вип.19. - №6/1. - С.36-51;

5. Горбонос С.О. "Необхідні умови оптимальності для задачі керування параболічною системою з необмеженими коефіцієнтами"/ С.О. Горбонос, П.І. Когут // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. - ДНУ, 2014. - Вип.6. - №8. - С.159-171;

Тези доповіді:

1. Горбонос С.О. Example of non-variational solutions of the optimal control problem with unbounded coefficients / S.O. Gorbonos // Nonlinear Partial Differential Equations: Міжнародна наукова конференція, 9-14 вересня 2013р. - Донецьк, 2013. - С. 25.
2. Горбонос С.О. Про задачу оптимального керування параболічною системою з необмеженими коефіцієнтами / Горбонос С.О.// Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: XI Міжнародна науково-практична конференція, 20-22 листопада 2013 р. - Дніпропетровськ, 2013. - С. 63.
3. Горбонос С.О. Про одну початково-крайову задачу з необмеженими коефіцієнтами / Горбонос С.О.// Математика в

3. Горбонос С.О. Про одну початково-крайову задачу з необмеженими коефіцієнтами / Горбонос С.О.// Математика в сучасному технічному університеті: II Міжнародна науково-практична конференція, 20-21 грудня 2013 р. - Київ, 2013. - С. 29-31.
4. Горбонос С.О. Про неваріаційні розв'язки однієї задачі оптимального керування для параболічного рівняння / Горбонос С.О.// XV Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня 2014 р. - Київ, 2014. - С. 85-86.
5. Горбонос С.О. Про необхідні умови оптимальності для однієї задачі керування параболічною системою / Горбонос С.О.// IV Міжнародна Ганська конференція, 30 червня-5 липня 2014 р.- Чернівці, 2014. - С. 37-39.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ