

УДК 517.94; 532.5

Алгоритмы метода дискретных особенностей и вычислительные технологии

С.А.Довгий, Д.И.Черний

*Институт телекоммуникаций и глобального информационного пространства,
НАН Украины*

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина

“The report presents algorithms for transforming discrete integral representations with discontinuous (many-valued) functions. The transformations change the order of the singularity in a system of discrete singularities, which makes it possible to correctly calculate the values of the characteristic functions and their derivatives under the parametric dependence of the characteristic functions on time. Algorithms of transformations form the basis of computational technologies for computer modeling of non-stationary hydrodynamic processes with separated flows.

Key words: discrete vortex method, discrete singularity method, computational technologies.

1. Введение

Во многих случаях [1-3], для решения плоской задачи о нестационарном обтекании непроницаемых, движущихся со скоростями \vec{w}_d и \vec{w}_v границ– контуров $L_d(t)$ и $L_v(t)$, в деформирующейся области $D(t)$, используется математическая модель (с параметрической зависимостью от t , которая в терминах ТФКП имеет интегральные представления:

$$\Phi(z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \gamma(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \gamma(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega, \quad (1)$$

$$\bar{V}(z, t) = u(x, y, t) - iv(x, y, t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{\gamma(\omega, t)}{z - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{\gamma(\omega, t)}{z - \omega} d\omega, \quad (2)$$

$$\Gamma_0 = \int_{L_d(t)} \gamma(\omega, t) d\omega + \int_{L_v(t)} \gamma(\omega, t) d\omega = const \quad (3)$$

Однако, в силу изменчивости области с заранее неизвестной формой части границ, решение задачи о нестационарном обтекании непроницаемых подвижных границ возможно только численными методами. Для решения задач аэрогидромеханики часто [1-3] используется метод дискретных вихрей, основанный на дискретизации интегральных представлений (1), (2). В этом случае, интегральные представления (1)-(3) в области с кусочно-гладкой границей, допускающей разбиение на совокупность граничных элементов $L = \sum_{j=1}^M L_j$ представимы в виде:

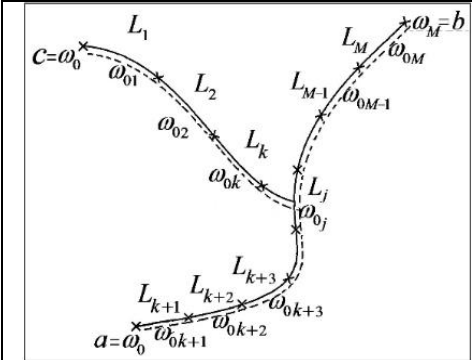
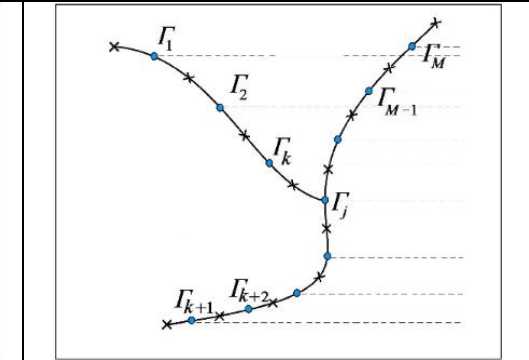
$$\Phi(z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}(t)) + \sum_p \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0s}^p(t)) \quad (4)$$

$$\bar{V}(z, t) = u(x, y, t) - iv(x, y, t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi i(z - \omega_{0j})} + \sum_p \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi i(z - \omega_{0s}^p(t))}, \quad (5)$$

$$\Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n_i} \delta_i^p = const \quad (6)$$

О проблемах вихревых представлений

В интегральном представлении (1) с логарифмическим ядром, подинтегральное выражение является многозначной функцией с точкой ветвления $\omega \in L_{ab}$. Значение выражения (1), для любой точки z считается вполне определенным и имеет место при условии, что для многозначных функций $\ln(z - \omega)$ выбрана ее ветвь и задан разрез, проходящий вдоль контура L . Для выделения выбранной ветви форма разреза безразлична, но для выделения непрерывного (в области) значения функции удобно, чтоб разрез проходил вдоль моделируемого контура (Рис.1.). В правой части равенства (4) представлена сумма комплексных логарифмов. Однако, если для (1) можно условиться – считать разрыв проходящим вдоль контура L то для системы вихрей (4) система разрезов будет проходить по системе параллельных лучей соединяющих точки $\omega_{0j} \in L_{ab}$ с бесконечно удаленной точкой (Рис.2).

	
<p>Рис. 1. – Линия разреза (вдоль контура) выделяющие область однозначности для интегрального представления</p> $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \gamma(\omega) \ln(z - \omega) d\omega$	<p>Рис. 2. – Линии разреза (по лучам) выделяющие область однозначности для системы дискретных особенностей на контуре</p> $\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j})$

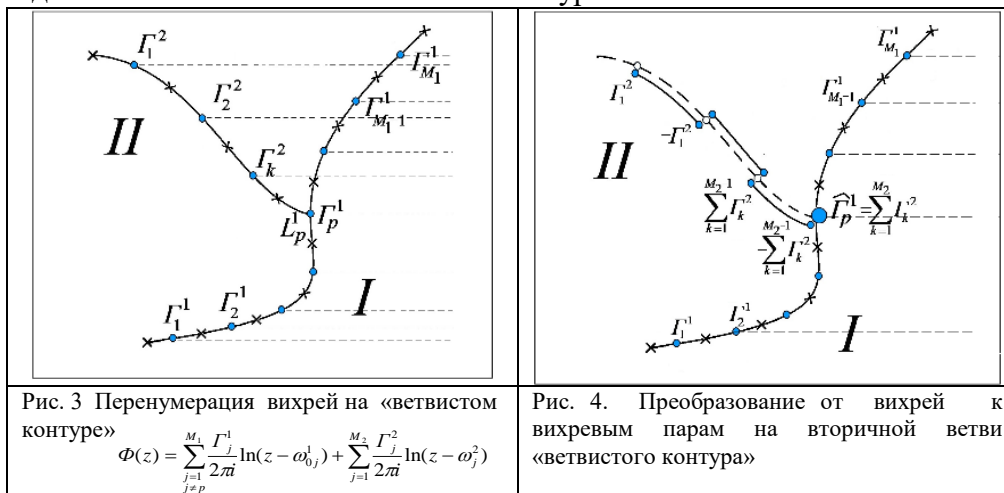
Для нестационарных гидродинамических задач [1,3] с изменяющейся во времени геометрией границ (движение, деформация и порождение новых элементов-при отрыве вихрей), и изменяемой циркуляцией вокруг границ, существует необходимость вычисления производной от потенциала (4) по времени, формальное выражение для которой, в терминах МДВ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, t_{n+1})}{\partial t} = & \sum_{j=1}^M \frac{\dot{\Gamma}_j(t_{n+1})}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_j(t_{n+1})}{x - x_j(t_{n+1})} \right) + \sum_{p=1}^P \frac{\dot{\delta}_n^p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})} \right) - \\ & - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) (\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1}))) - \\ & - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p (\vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))) \end{aligned} \quad (7)$$

В правой части выражения (7) первые два слагаемые, так же, содержат разрывные функции (имеющие логарифмические особенности), соответствующие вихревому представлению (4)), что не позволяет его использовать для вычисления значений производной в области, вне границы.

Алгоритмы вычислительных технологий

Данные проблемы (собственное свойство дискретных вихрей для плоских задач) могут быть разрешены преобразованием, позволяющим выделять однозначную ветвь для системы логарифмических функций путем повышения порядка системы особенностей и одновременным «перенаправлением» системы линий разрыва в одну линию-разрез вдоль контура границы L [2]. Алгоритм преобразования системы особенностей может быть реализован на произвольном плоском криволинейном контуре. Случай произвольного контура может быть сведен к системе связанных ветвистых контуров.



Ветвистый контур отличается от случая простого контура (Рис.1) перенумерацией дискретных вихрей на контуре, в зависимости от индекса ветви (Рис3).

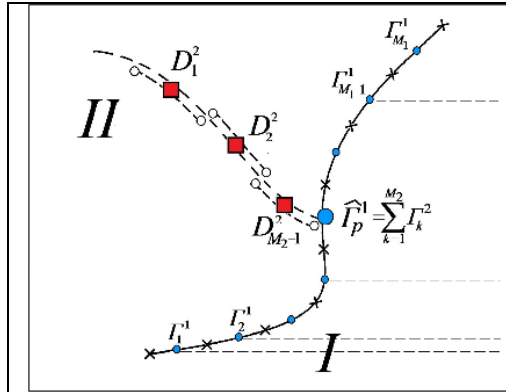


Рис. 5. Преобразование от вихревых пар к диполям на вторичной ветви «ветвистого контура»

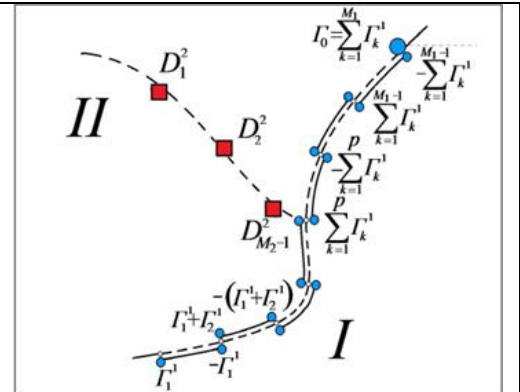


Рис. 6. Преобразование от вихрей к вихревым парам на основной ветви «ветвистого контура»

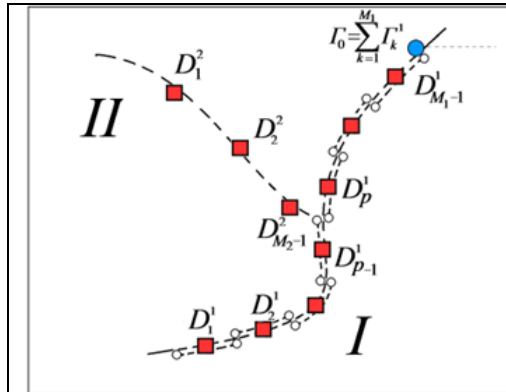


Рис. 7. Преобразование от вихревых пар к диполям основной ветви «ветвистого контура»

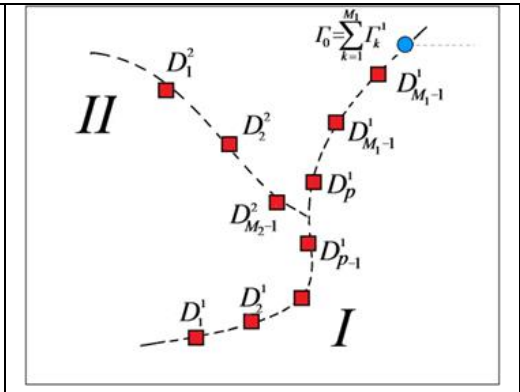


Рис. 8. Распределение диполей и суммарного вихря на «ветвистом контуре»

В результате преобразований на ветвистом контуре (Рис.3.-Рис8.), вихревое представление преобразуется в представление в виде суммы диполей и суммарного вихря (Рис.8.):

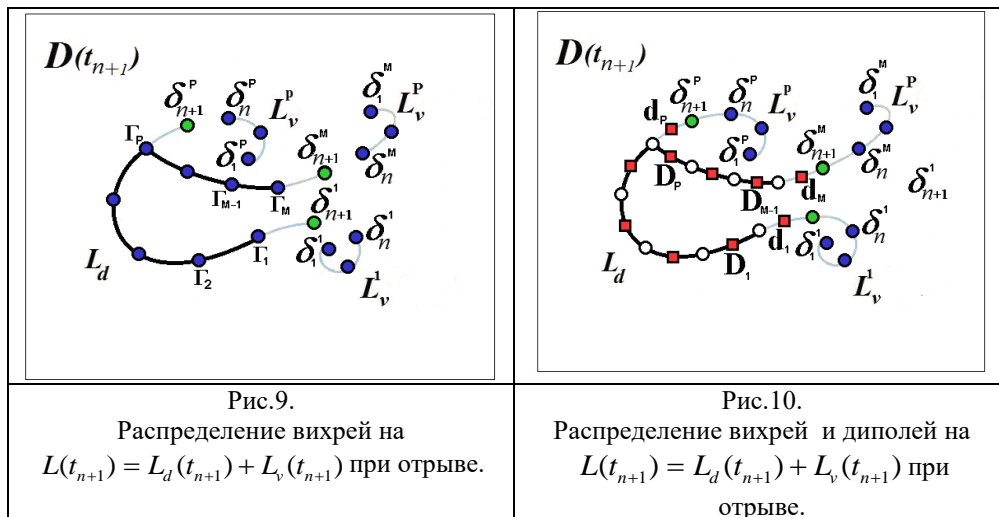
$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{D_j^1}{2\pi i(z - \omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{D_j^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)} \quad (8)$$

$$\text{Где} \quad \Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j = \Gamma_0^1 = \sum_{j=1}^{M_1} \Gamma_j^1; \quad D_j^p = (\omega_{0j+1}^p - \omega_{0j}^p) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^p, \quad p = 1, 2, \dots \quad (9)$$

а общее число диполей (при $M = M_1 + M_2 - 1$, т.к. узловой вихрь считается дважды) будет равно $M_1 + M_2 - 2$.

В приведенном алгоритме разделение ветвей контура на основную и вторичную условно. Его можно выполнить и любым иным способом. Произвол в выборе ветвей на контуре, выборе начала и направления обхода контуров влияют только на численные значения распределенных диполей и положение суммарного вихря (от которого выполняется разрез). Замкнутость контура также не влияет на алгоритм преобразования системы дискретных вихрей в систему диполей и суммарный вихрь, но выбор начала и конца контуров определяет положение результирующего вихря и, как следствие, положение линии разреза в области.

Пусть имеется алгоритм (Рис.3.-Рис.8.) преобразования и выделения разреза для многозначной функции на произвольном контуре. Следовательно, возможно и для производной (7), преобразования «вихревой» системы, через систему «дискретных вихревых пар», к «дипольной» системе (что соответствует случаю с отрывом потока, при $t = t_{n+1}$, см.Рис.9.-Рис.10.).



В условиях (3) теоремы Томсона, изменение циркуляции, по замкнутому контуру, охватывающему только обтекаемую границу, вызывает изменение циркуляции в следе за счет порождения отрыва новых элементов следа на обтекаемой границе. Циркуляция скорости по контуру охватывающему фиксированный материальный объем с уже сформированным следом, при баротропном движении идеальной жидкости под действием поля объемных, сил с однозначным потенциалом, не изменяется. В силу чего, справедливо

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^M \Gamma_j + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \delta_i^p \right) = \sum_{j=1}^M \dot{\Gamma}_j(t) + \sum_{p=1}^P \dot{\delta}_n^p = 0 \quad (10)$$

Таким образом, изменения циркуляции на обтекаемом контуре компенсируется возникновением дополнительных циркуляций в следе, вызванным порождением новых элементов непроницаемых границ (отрыв потока, с образованием вихревых поверхностей). На Рис.11., в развертке, представлен алгоритм преобразования вихревого представления в дипольное.

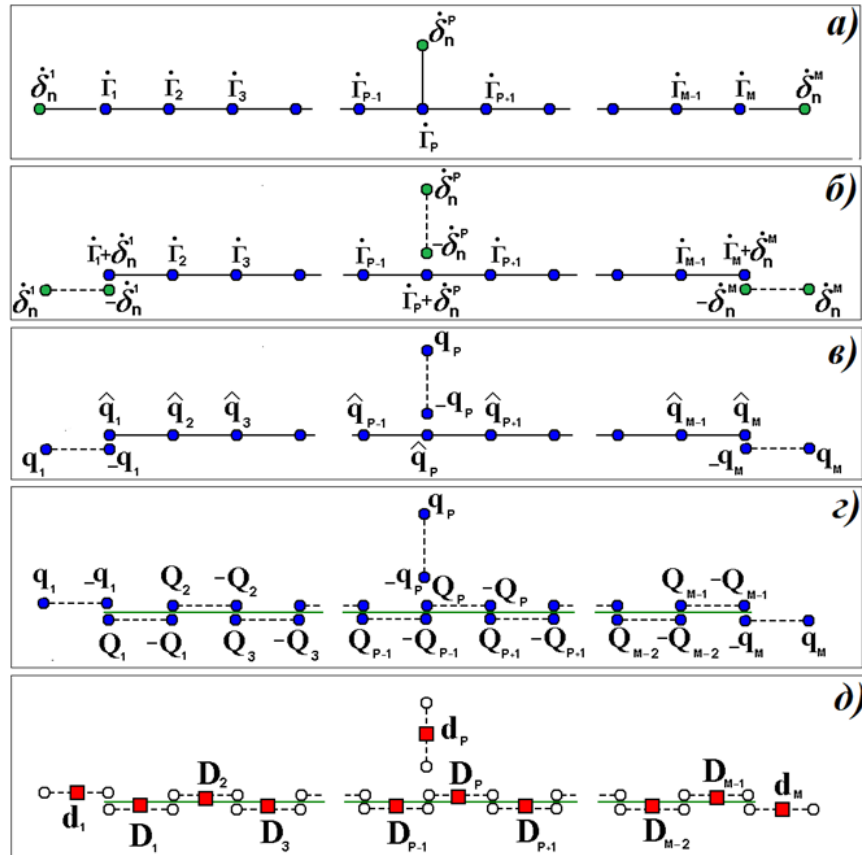


Рис.11.

Схема преобразования системы вихрей в систему диполей при отрыве.

Из выше приведенного вытекает

Теорема 1. Пусть выполняется (10), тогда выражение, для вычисления значения производной по времени (7) от дискретного представления (4), имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, t_{n+1})}{\partial t} = & \sum_{j=1}^{M-1} (\vec{D}_j, \vec{V}_j(x, y, \bar{x}_j(t_{n+1}), \bar{y}_j(t_{n+1}))) + \sum_p (\vec{d}_p, \vec{V}_p(x, y, \bar{x}_n^p(t_{n+1}), \bar{y}_n^p(t_{n+1}))) - \\ & - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) (\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1}))) - \\ & - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \left(\vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{Где } \begin{cases} \vec{D}_j = (x_{j+1} - x_j, y_{j+1} - y_j) Q_j, \\ \vec{d}_p = (x_p - x_n^p, y_p - y_n^p) q_p \end{cases}, \begin{cases} \bar{x}_j = 0.5(x_{0j+1} + x_{0j}), \\ \bar{y}_j = 0.5(y_{0j+1} + y_{0j}) \end{cases}, \begin{cases} \bar{x}_n^p = 0.5(x_n^p + x_{0p}), \\ \bar{y}_n^p = 0.5(y_n^p + y_{0p}) \end{cases}. \quad (2)$$

Результаты и выводы

Приведенные алгоритмы регуляризуют метод дискретных особенностей, а именно:

- сводят совокупность распределенных линий разрывов значений характеристических функций к единой линии разрыва, проходящей вдоль контура и соединяющей контур с бесконечно удаленной точкой;
- позволяют вычислять изменение значений характеристических функций и их производных во времени, при произвольных непрерывных деформациях контуров – границ области;
- позволяют учесть вклад возникновения новых элементов границ области (что соответствует формированию вихревых поверхностей – поверхностей разрыва касательных скоростей при отрывных течениях в гидродинамике).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. - М.: Наука, 1978. – 351 с.
2. Довгий С.А., Лифанов И.К., Черний Д.И. Метод сингулярных интегральных уравнений и вычислительные технологии. – К.: Издательство «Юстион», 2016.- 410с.
3. Sarpkaya T. Computational Methods With Vortices-The 1988 Freeman Scholar Lecture. // Journal of Fluids Engineering, Vol.111/5, March 1989.,pp.1-60.