Актуальні проблеми математичної фізики

> Я хочу похвалить то, чего не имею, а именно знание точных наук, например, математики. Эта, по словам Августина, Паскаля и многих других, самая абстрактная из человеческих наук оперирует в области не фантазии, а мысленных реальностей и чрезвычайно дисциплинирует ум. Именно из среды математиков нередко выходят хорошие организаторы, практики, волевые люди, умеющие не просто думать, но и додумывать до конца.
>
> А. Ткачев

Прикладна математика є областю сучасної математики, основною метою якої є дослідження рівнянь, що мають "прикладне" значення. У математиці зустрічаються найрізноманітніші рівняння (алгебраїчні, диференціальні, з частинними похідними,...). Розділення математики на чисту (академічну) та прикладну є достатньо умовним. Як правило, в прикладній математиці розробляються методи дослідження і розв'язання рівнянь актуальних для механіки, фізики, хімії, економіки, біології, соціології ,..., а в чистій математиці розглядаються "абстрактні" рівняння. Втім, відомі численні приклади рівнянь, що виникали і досліджувались у чистій математиці та надалі ставали актуальними і, навіть, фундаментальними для механіки, фізики, хімії,....

Математична фізика є областю прикладної математики, основною метою якої є дослідження крайових і початково-крайових задач для рівнянь з частинними похідними, що мають "прикладне" значення. Ці задачі виникають в різних розділах механіки, фізики, хімії, економіки біології, соціології,..., хоча список крайових і початково-крайових задач математичної фізики є достатньо коротким.

Множини

Кожна сучасна наука має свої сталі правила, традиції та закони розвитку. Так, у математиці прийнято виводити різноманітні твердження з використанням логічно коректних (несуперечливих) розміркувань. Такі твердження зазвичай ґрунтуються на загальноприйнятих фундаментальних поняттях. Для багатьох сучасних областей математики такими фундаментальними поняттями є поняття *множини* та *відображення*. Поняття множини вводиться, наприклад, таким чином:

Множина – це сукупність об'єктів будь-якої природи, які називаються його елементами.

Тут дане поняття скоріше пояснюється, чим строго (логічно коректно) визначається, та зводиться фактично до заміни слова "множина" його синонімом сукупність елементів будь-якої природи. Приймаючи це поняття як строге визначення можна прийти до суперечності при спробі розглянути множину всіх множин, елементами яких є множини.

Проте, з одного боку, можна і не розглядати такі екзотичні об'єкти як множина множин із множин. З іншого боку, достатньо давно побудована несуперечлива (логічно коректна) *теорія множин*, що є областю математики в якій поняття множини строго визначається на основі відповідних аксіом, що виключають з розгляду відповідні екзотичні об'єкти. Дослідження загальних властивостей множин і перевірка несуперечності цих аксіом в теорії множин є достатньо об'ємними. Тому, навряд чи раціонально приводити відповідні аксіоми та твердження в якості об'ємного введення до областей математики, у яких використовується поняття множини.

Таким чином, у введенні до таких областей зазвичай припускають, що визначення множини відоме або обмежуються поясненням, що *множина – це сукупність об'єктів будь-якої природи.*

Можливо, слід було б визначити поняття несуперечності і логічно коректних розміркувань. Ці поняття строго визначаються у *математичній логіці*, що є також достатньо об'ємною областю сучасної математики. Таким чином, тут доводитися також припускати, що ці поняття відомі або є інтуїтивно ясними.

Множини зручно позначати великими літерами $A, B, ...$, а елементи відповідних множин – малими літерами $a, b, ...$. Твердження, що "a *є елемент множини* A" символічно записують таким чином

$$a \in A$$

та кажуть, що елемент a *належить* множині A.

Запис $a \notin A$ означає, що a *не є елементом множини* A.

Якщо всі елементи множини A є елементами множини B, тоді A називається *підмножиною* множини B та використовується позначення

$$A \subset B.$$

Множини A та B називають *співпадаючими* і пишуть

$$A = B,$$

якщо $A \subset B$ та $B \subset A$. Запис $A \neq B$ означає просто, що множини A та B *не є співпадаючими.*

Доцільно також ввести поняття *порожньої* множини, що не містить жодного елементу. Таку множину прийнято позначати символом $\emptyset$. Будь-яка множина містить $\emptyset$ у якості підмножини. Підмножини деякої множини A, відмінні від $\emptyset$ та A, називають *власними підмножинами* A.

Множина, яка складається із скінченого числа елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ позначається через

$$\{\, a_1, a_2, \ldots, a_n \,\}.$$

Іноді, зручно не робити відмінності між множиною $\{\, a \,\}$ та елементом a.

Прийнято також використовувати фігурні дужки для виділення множини *елементів, що задовольняють деякому твердженню.* Таким чином,

$$\{\, a \, : \, (\text{ твердження про } a\,)\,\}$$

є множиною всіх a, для яких виконано сформульоване в дужках твердження. Відповідно до цієї домовленості, можна написати

$$A = \{\, a \,:\; a \in A \,\} = \{\, b \,:\; b \in A \,\}.$$

Якщо деяке твердження (*) є більш загальним чим твердження (**), тоді кажуть, що з твердження (*) слідує твердження (**) та використовують позначення

$$(*) \;\Rightarrow\; (**).$$

Твердження (*) і (**) називають *еквівалентними* (рівносильними) і пишуть

$$(*) \;\Leftrightarrow\; (**),$$

якщо $(*) \;\Rightarrow\; (**)$ та $(**) \;\Rightarrow\; (*)$.

Для завданих множин A та B корисно також розглядати деякі комбінації елементів цих множин. Наприклад, множина

$$A \cup B = \{\, a \,:\; a \in A \text{ або } a \in B \,\}$$

називається *об'єднанням* множин A та B, а множина

$$A \cap B = \{\, a \,:\; a \in A \text{ і } a \in B \,\}$$

називається *перетином* множин A та B.

Впорядкованою парою (a, b) є множина $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Дві впорядковані пари (a_1, b_1) та (a_2, b_2) *є рівними* $\;\Leftrightarrow\;$ $a_1 = a_2$ та $b_1 = b_2$. Множина

$$A \times B = \{\, (a, b) \,:\, a \in A,\; b \in B \,\}$$

називається *добутком* множин A та B. У випадку коли $A = B$ використовується також позначення $A \times A = A^2$ для *другої ступені* множини A.

Скінчений добуток множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ визначається за індукцією

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

Відповідно, $A^3 = (A^2) \times A, \ldots, A^n = (A^{n-1}) \times A$.

Аналогічно можна визначити об'єднання $\cup_\alpha A_\alpha$, перетин $\cap_\alpha A_\alpha$ та добуток $\Pi_\alpha A_\alpha$ будь-якого (скінченного або нескінченного) числа множин.

1. Відображення. Метричні простори

В1.1. *Множина* – сукупність елементів будь-якої природи.

В1.2. *Відображення* φ з множини A у множину B – правило зіставлення кожному елементу з A деякого елементу з B. Позначення: $\varphi : A \to B$.

В1.3. Нехай задані множини A, B і відображення $\varphi : A \to B$. *Рівнянням* називається співвідношення

$$\varphi(a) = b, \tag{1.1}$$

де $a \in A$ і $b \in B$. *Розв'язати рівняння* (1.1) означає, що для заданого $b \in B$ необхідно знайти $a \in A$ таке, що $\varphi(a) = b$.

Основна проблема математики – **розв'язувати** різноманітні рівняння.

Образом відображення $\varphi : A \to B$ є множина

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(a) : a \in A\} \subseteq B.$$

Образом елементу $a \in A$ є елемент $b = \varphi(a) \in B$.

Рівняння (1.1) може бути беззмістовним для $b \in B \setminus \operatorname{Im}\varphi$, якщо $B \neq \operatorname{Im}\varphi$. Проте, за визначенням рівняння (1.1) завжди має сенс и розв'язок для $b \in \operatorname{Im}\varphi$. Таким чином, іноді корисно "**зменшити**" B, щоб рівняння (1.1) мало розв'язок.

В1.4. Відображення $\varphi : A \to B$ називається *накладенням*, якщо

$$\operatorname{Im}\varphi = B.$$

Для таких φ рівняння (1.1) завжди має сенс и розв'язок. Проте, описання $\operatorname{Im}\varphi$ не завжди відомо і фактично еквівалентно розв'язанню рівняння (1.1). Наприклад, для $b, c \in \mathbf{R}$ і відображення $\varphi(x) = x^2 + bx : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ відомо, що

$$c \in \operatorname{Im}\varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad b^2 + 4c \geq 0.$$

Але описання $\operatorname{Im}\varphi$ не відомо, наприклад, для $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$, $a, \ldots, e \in \mathbf{R}$ і відображення $\varphi(x) = x^n + ax^{n-1} + \ldots + ex : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

З іншого боку, для $b, c \in \mathbf{R}$ і відображення $\varphi(x) = x^2 + bx : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ завжди маємо, що $c \in \operatorname{Im} \varphi$, тобто іноді корисно "**збільшити**" A і B щоб рівняння (1.1) "мало" розв'язок. Точніше, іноді зручно досліджувати замість (1.1) рівняння

$$\overline{\varphi}(\overline{a}) = \overline{b} \qquad \text{яке називається } \textit{розширенням} \text{ (1.1)}, \tag{$\overline{1.1}$}$$

де $\overline{\varphi} : \overline{A} \to \overline{B}$ такі, що $A \subset \overline{A}$, $B \subseteq \overline{B}$ і $\overline{\varphi}(A) = \varphi(A)$, тобто $\overline{\varphi}(a) = \varphi(a)$ для $a \in A$. Саме так (при розширенні рівнянь другого порядку) виникла множина комплексних чисел $\mathbf{C}$ (як втім і багато інших множин, які використовуються в сучасній математиці, виникли при розширенні різноманітних рівнянь).

З появою комплексних чисел вдалося повністю описати $\operatorname{Im} \varphi$ для $n \in \mathbf{N}$, $a, \ldots, e \in \mathbf{C}$ і відображення $\varphi(x) = x^n + ax^{n-1} + \ldots + ex : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. У даному випадку $\operatorname{Im} \varphi = \mathbf{C}$ відповідно до *основної теореми алгебри*, однак рівняння (1.1) може мати декілька розв'язків. Зазвичай корисно знати скільки існує розв'язків, але найкращим варіантом може бути єдиність розв'язку рівняння (1.1).

B1.5. Відображення $\varphi : A \to B$ називається *вкладенням*, якщо

$$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Для таких φ рівняння (1.1) має єдиний розв'язок, якщо цей розв'язок існує. Таким чином, іноді корисно "**зменшити**" A щоб розв'язок був єдиним. Наприклад, якщо відомо, що для кожного $b \in B$ розв'язків завжди два, тоді може бути корисним "поділити" A на дві частини і отримати ідеальний випадок.

B1.6. Відображення $\varphi : A \to B$ називається *взаємно однозначним*, якщо воно є вкладенням та накладенням.

Для таких φ рівняння (1.1) завжди має єдиний розв'язок $a \in A$ для кожного $b \in B$, що вирішує основну проблему, і множини A та B побудовані в деякому розумінні однаково, оскільки визначено відображення $\tilde{\varphi} : B \to A$, що зіставляє кожному $b \in B$ єдиний розв'язок $a \in A$ і таке, що $\varphi(\tilde{\varphi}(b)) = b$ та $\tilde{\varphi}(\varphi(a)) = a$.

B1.7. Дві множини A та B називаються *еквівалентними*, якщо існує взаємно однозначне відображення $\varphi : A \to B$. Позначення: $A \cong B$.

Основний принцип математики – **ототожнювати** еквівалентні множини.

Цей принцип є природним: якщо множини $A, B, C, \ldots$ побудовані однаково, тоді досить вивчити, наприклад, A і одночасно зрозуміти будову еквівалентних множин. Цей принцип використовується постійно. Наприклад, еквівалентність

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \cong \{1, \ldots, n\} \cong \{0, \ldots, n-1\}$$

означає одвічне бажання все перенумеровувати (маршрути, жителів, студентів, юридичних осіб, телефони, ...), що іноді достатньо зручно. Саме так виникла множина натуральних чисел $\mathbf{N}$ з скінченими підмножинами якої можна ототожнити будь-яку скінчену множину, що підкреслює корисність математики принаймні в тих областях діяльності, де використовуються скінчені множини.

B1.8. *Операцією* на множині A називається всяке відображення з $A \times A$ в A.

Образ пари (a, b) називають сумою або добутком або згорткою ... и пишуть відповідно $\quad a + b \quad$ або $\quad a \cdot b \quad$ або $\quad a * b \quad$ ... .

Операція $a \cdot b$ *комутативна*, якщо $\quad a \cdot b = b \cdot a \quad \forall\, a, b \in A$.

Операція $a \cdot b$ *асоціативна*, якщо $\quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall\, a, b, c \in A$.

B1.9. *Операцією множення на числа* $\alpha \in \mathbf{C}$ (або $\alpha \in \mathbf{R}$) на множині A називається всяке відображення з $\mathbf{C} \times A = \{(\alpha, a) : \alpha \in \mathbf{C},\, a \in A\}$ в A.

Образ пари (α, a) позначають через $\alpha\, a$ або $\alpha \cdot a$.

B1.10. *Метрикою* на множині M називається всяке відображення

$$\mu : M \times M \to \overline{\mathbf{R}}_+ = \{r \in \mathbf{R} : r \geq 0\}$$

таке, що для $\forall\, a, b, c \in M$ маємо

$$1) \qquad \mu(a, b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b\,;$$

$$2) \quad \mu(a, b) = \mu(b, a); \qquad 3) \quad \mu(a, b) \leq \mu(a, c) + \mu(c, b).$$

Множина M з деякою метрикою $\mu(\cdot, \cdot)$ є *метричним простором* (M, μ). Наприклад, $(\{1, \ldots, n\}, \mu)$ є метричним простором з метрикою $\mu(a, b) = |a - b|$.

B1.11. Метричний простір (B,μ) називається *підпростором* метричного простору (M,μ), якщо $B\subset M$.

Наприклад, $(\{1,\dots,n\},\mu)$ є підпростором метричного простору $(\mathbf{C},\mu)$, де

$$\mu(a,b)=|a-b|.$$

B1.12. *Кулею* (*замкненою кулею*) радіусу r з центром в точці $a\in M$ метричного простору (M,μ) називається множина

$$B_r(a)=\{b\in M:\mu(b,a)<r\}\qquad\left(\overline{B}_r(a)=\{b\in M:\mu(b,a)\le r\}\right).$$

Послідовністю $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ в M називається образ кожного відображення з $\mathbf{N}$ в M.

B1.13. Елемент $a\in M$ метричного простору (M,μ) є *границею* послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M$, якщо $\mu(a_n,a)\to 0$ при $n\to\infty$. Позначення: $a_n\to a$.

B1.14. Відображення $\varphi:M\to L$ метричних просторів (M,μ) і (L,ϱ) називається *неперервним у точці* $a\in M$, якщо

$$\varphi(a_n)\to\varphi(a)\qquad\text{для кожної послідовності}\qquad a_n\to a\,.$$

Відображення $\varphi:M\to L$ метричних просторів (M,μ) і (L,ϱ) називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $a\in M$.

Наприклад, для метричного простору (M,μ) і кожного $c\in M$ відображення $\varphi=\mu(\cdot,c):M\to\mathbf{C}$ є неперервним, тобто $\mu(a_n,c)\to\mu(a,c)$ для $a_n\to a\in M$.

B1.15. Послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M$ метричного простору (M,μ) називається *фундаментальною*, якщо $\mu(a_n,a_m)\to 0$ при $n,m\to\infty$.

B1.16. Метричний простір (M,μ) називається *повним*, якщо кожна фундаментальна послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M$ має границю $a\in M$.

Метричний простір $(\mathbf{Q},\mu)$ (де $\mu(a,b)=|a-b|$) не є повним, оскільки

$$\mathbf{Q}\ni a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e\in\mathbf{R}\neq\mathbf{Q}.$$

Позначимо

$$C[0,1]=C^0[0,1]=\{f:f\ \text{неперервна функція з}\ [0,1]\ \text{в}\ \mathbf{R}\},$$

$$\mu_0(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Метричний простір $(C^0[0,1], \mu_0)$ є повним, оскільки границя послідовності рівномірно неперервних функцій є рівномірно неперервною функцією.

В1.17. Відображення $\varphi : M \to M$ метричного простору (M, μ) називається *стискаючим*, якщо $\exists\ \alpha \in (0,1)$:

$$\mu(\varphi(a), \varphi(b)) \le \alpha\, \mu(a,b) \qquad \forall\, a,b \in M.$$

Теорема 1.18 (С. Банах). Нехай відображення $\varphi : M \to M$ метричного простору (M,μ) є стискаючим та (M,μ) є повним. Тоді

$$\exists\, 1\, a_0 \in M \ : \quad \varphi(a_0) = a_0.$$

$\lhd$ Фіксуємо довільне $a \in M$ і розглянемо послідовність

$$a_1 = \varphi(a), \quad a_2 = \varphi(a_1) = \varphi(\varphi(a)) = \varphi^2(a),$$

$$a_3 = \varphi(a_2) = \varphi(\varphi(a_1)) = \varphi^3(a), \ldots,$$

$$a_n = \varphi(a_{n-1}) = \varphi^n(a), \ldots.$$

Тоді

$$\mu(a_1,a_2) = \mu(\varphi(a), \varphi(a_1)) \le \alpha\, \mu(a, a_1) = \alpha\, \mu(a, \varphi(a)),$$

$$\mu(a_2,a_3) = \mu(\varphi(a_1), \varphi(a_2)) \le \alpha^2\, \mu(a, \varphi(a)), \ldots$$

$$\mu(a_n, a_{n+1}) \le \alpha^n\, \mu(a, \varphi(a)), \ldots.$$

Для цілого $p > 1$ маємо

$$\mu(a_n, a_{n+p}) \le \mu(a_n, a_{n+1}) + \mu(a_{n+1}, a_{n+2}) + \ldots + \mu(a_{n+p-1}, a_{n+p}) \le$$

$$\le (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+p-1})\, \mu(a, \varphi(a)) = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\, \mu(a, \varphi(a)).$$

Таким чином

$$\mu(a_n, a_{n+p}) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, \mu(a, \varphi(a)) \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty \tag{1.1}$$

і послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ є фундаментальною, оскільки $0 < \alpha < 1$.

Метричний простір (M,μ) є повним, отже

$$\exists\ a_0 \in M\ :\ a_n \to a_0.$$

Крім того

$$\mu(\varphi(a_0),a_n) = \mu(\varphi(a_0),\varphi(a_{n-1})) \le \alpha\,\mu(a_0,a_{n-1}) \to 0 \qquad \text{при} \qquad n\to\infty,$$

тобто $a_n \to \varphi(a_0)$ та

$$\exists\ a_0 \in M\ :\quad a_0 = \varphi(a_0)$$

через єдиність границі. Припустимо, що $\exists\, a_0, b_0 \in M : a_0 = \varphi(a_0)$ і $b_0 = \varphi(b_0)$. Тоді

$$\mu(a_0,b_0) = \mu(\varphi(a_0),\varphi(b_0)) \le \alpha\,\mu(a_0,b_0) \quad \Leftrightarrow \quad \mu(a_0,b_0)(1-\alpha) \le 0.$$

Таким чином, $\mu(a_0,b_0)=0$ і $a_0 = b_0$. $\triangleright$

З неперервності відображення $\mu(c,\cdot)$ і нерівності (1.1) виходить, що

$$\mu(a_n,a_0) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\mu(a,\varphi(a)).$$

Таким чином, маємо оцінку відстані між a_n і a_0 через відстань між a і $\varphi(a)$, яка дає можливість вирішити рівняння $a_0=\varphi(a_0)$ з наперед заданою точністю $\varepsilon>0$.

Наприклад, розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння

$$y'_t = F(t,y)\,, \qquad y|_{t=t_0} = y_0, \tag{1.2}$$

де $t\in(t_0,T)$, $t_0<T$ та $y_0\in\mathbf{R}^n$.

Теорема 1.19 ($\exists 1$ для задачі Коші). Припустимо, що $F\in C^0([t_0,T]\times\mathbf{R}^n)^n$ і

$$|F(t,y_1)-F(t,y_2)| \le C|y_1-y_2| \quad \text{для} \quad t\in(t_0,T) \quad \text{і} \quad y_1,y_2\in\mathbf{R}^n$$

(умова Ліпшиця з константою C). Тоді

$$\exists 1\ \ y\in C^1[t_0,T]^n\ :\quad y'_t = F(t,y)\,, \qquad y|_{t=t_0}=y_0,$$

де $C^1[t_0,T]^n = \{f\in C^0[t_0,T]^n : f'_t \in C^0[t_0,T]^n\,\}$.

◁ Задача (1.2) еквівалентна наступній задачі для інтегрального рівняння

$$\text{знайти} \quad y \in C^0[t_0, T]^n : \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, y(t))\, dt\,. \tag{1.3}$$

Дійсно, якщо $y \in C^1[t_0, T]^n$ є розв'язком задачі (1.2), то після інтегрування отримуємо (1.3). Відповідно, якщо $y \in C^0[t_0, T]^n$ є розв'язком задачі (1.3), то після диференціювання отримуємо (1.2), оскільки $F(t, y(t)) \in C^0[t_0, T]^n$ як суперпозиція неперервних функцій $y \in C^0[t_0, T]^n$ і $F \in C^0([t_0, T] \times \mathbf{R}^n)^n$.

Фіксуємо $t_1 \in (t_0, T]$ таке, що $C(t_1 - t_0) < 1$ і розглянемо відображення $\varphi : C^0[t_0, t_1]^n \to C^0[t_0, t_1]^n$, визначене формулою

$$\varphi(y) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, y(t))\, dt\,.$$

Перевіримо, що φ є стискаючим для метричного простору $(C^0[t_0, t_1]^n, \mu_0)$. Маємо

$$\mu_0(\varphi(a), \varphi(b)) = \max_{t_0 \le t \le t_1} |\varphi(a)(t) - \varphi(b)(t)| = \max_{t_0 \le t \le t_1} \left| \int_{t_0}^{t} [F(t, a(t)) - F(t, b(t))]\, dt \right| \le$$

$$\le \max_{t_0 \le t \le t_1} \int_{t_0}^{t} |F(t, a(t)) - F(t, b(t))|\, dt \le \max_{t_0 \le t \le t_1} C \int_{t_0}^{t} |\, a(t) - b(t)|\, dt \le$$
$$\le C(t_1 - t_0) \max_{t_0 \le t \le t_1} |\, a(t) - b(t)| = C(t_1 - t_0)\, \mu_0(a, b)$$

для $a, b \in C^0[t_0, t_1]^n$. Таким чином, φ є стискаючим для $(C^0[t_0, t_1]^n, \mu_0)$.

При $t_1 < T$, розіб'ємо відрізок $[t_0, T]$ на відрізки $[t_0, t_1], \ldots, [t_{k-1}, t_k]$ так, щоб $C(t_j - t_{j-1}) < 1$ для $j = 1, \ldots, k$ і повторимо попереднє доведення для цих відрізків $[t_0, t_1], \ldots, [t_{k-1}, t_k]$. Тоді доведемо, що

$$\exists 1 \; y \in C^0[t_0, T]^n : \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, y(t))\, dt\,. \triangleright$$

У цій теоремі суттєво, що розв'язок $y(t)$ є визначеним і скінченим для кожного $t \in [t_0, T]$, ця властивість може не виконуватися, якщо умова Ліпшиця порушена, наприклад, для додатних $y_0, F \in \mathbf{R}$ і $n = 1$ задача Коші

$$y'_t = F y^2\,, \qquad y|_{t=0} = y_0, \tag{1.4}$$

має розв'язок $y(t) = \frac{y_0}{1 - t\, F\, y_0}$, якій не є визначеним для $t = \frac{1}{F\, y_0}$.

Цей приклад пояснює суттєву відмінність між $C^0[0, Fy_0]$ і $C^0[0, Fy_0)$. Проте, іноді є корисною наступна теорема про локальну розв'язуваність задачі Коші.

Теорема 1.20 (локальне $\exists 1$ для задачі Коші). *Нехай* $F \in C^0([t_0, T] \times \mathbf{C}^n)^n$ *і*

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leq L(y_1, y_2)\,|y_1 - y_2| \quad \textit{для} \quad t \in (t_0, T) \quad \textit{і} \quad y_1, y_2 \in \mathbf{C}^n,$$

де $L(y_1, y_2)$ *є рівномірно обмеженою на обмежених множинах (локальна умова Ліпшиця), тобто для кожного* $c > 0$

$$L' = \sup_{|y_1| < 2c, |y_2| < 2c} L(y_1, y_2) < \infty. \tag{1.5}$$

Тоді існує $T_0 > t_0$ *таке, що* $T \geq T_0$ *і*

$$\exists 1 \;\; y \in C^1[t_0, T_0]^n : \quad y'_t = F(t, y)\,, \qquad y|_{t=t_0} = y_0.$$

$\lhd$ Фіксуємо $c > |y_0|$, позначимо $M = \max\limits_{[t_0, T]} |F(t, y_0)|$ та оберемо $T_0 > t_0$ так щоб

$$M(T_0 - t_0) \leq c \qquad \text{і} \qquad \alpha = L'(T_0 - t_0) < 1. \tag{1.6}$$

Повторюючи доведення теореми Банаха, визначимо

$$a = y_0, \quad a_1 = \varphi(a), \quad \ldots, \quad a_n = \varphi^n(a)$$

для

$$\varphi(y) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(t, y(t))\,dt\,.$$

Тоді

$$\mu_0(a, \varphi(a)) = \max_{[t_0, T_0]} |a - \varphi(a)| = \max_{[t_0, T_0]} \left| \int\limits_{t_0}^{t} F(t, y_0)\,dt \right| \leq M(T_0 - t_0) \leq c,$$

зокрема $\max_{[t_0,T_0]} |a_1| \leq \max_{[t_0,T_0]} |a_1 - a| + \max_{[t_0,T_0]} |a| < 2c$. Припустимо по індукції виконання нерівностей $\max_{[t_0,T_0]} |a_2| < 2c, \ldots \max_{[t_0,T_0]} |a_n| < 2c$ і перевіримо, що також $\max_{[t_0,T_0]} |a_{n+1}| < 2c$. Маємо

$$\max_{[t_0, T_0]} |a_{n+1} - a_n| \leq \max_{t_0 \leq t \leq T_0} \int\limits_{t_0}^{t} |F(t, a_n(t)) - F(t, a_{n-1}(t))|\,dt \;\leq$$

$$\leq \alpha \max_{[t_0,T_0]} |a_n - a_{n-1}| \leq \ldots \leq \alpha^n \max_{[t_0,T_0]} |a - \varphi(a)| \leq \alpha^n c,$$

відповідно до (1.5),(1.6), де $\alpha = L'(T_0 - t_0) < 1$. Таким чином

$$\max_{[t_0,T_0]} |a_{n+1}| \leq \max_{[t_0,T_0]} |a_{n+1} - a_n| + \max_{[t_0,T_0]} |a_n - a_{n-1}| + \ldots + \max_{[t_0,T_0]} |a_1 - a| + \max_{[t_0,T_0]} |a| \leq$$

$$\leq (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \ldots + 1)\, c + \max_{[t_0,T_0]} |a| < \frac{c}{1-\alpha} + c < 2c$$

і переходячи до границі $a_n \to y$ отримаємо розв'язок задачі Коші такий, що

$$\max_{[t_0,T_0]} |y| \leq 2c. \qquad \triangleright$$

Якщо $T_0 < T$, тоді можливо повторити попередню конструкцію з початкового моменту часу $t_1 = T_0$, фіксуючи $c_1 > 2c \geq |y(t_1)|$ і обчислюючи $L' = L'(c_1)$, яке залежить від c_1, і отримати $T_1 > T_0$ таке, що

$$\max_{[t_0,T_1]} |y| \leq 2c_1.$$

Повторюючи цей процес, знайдемо $T_m > \ldots > T_1 > T_0$ і розв'язок $y = y(t)$ задачі Коші такі, що $\max\limits_{[t_0,T_m]} |y| \leq 2c_m$ для деякої константи c_m. По суті можливі два варіанти або $|y(T_m)| \to \infty$ (як в прикладі (1.4)) або розв'язок $y = y(t)$ задачі Коші буде продовжений на відрізок $[t_0, T]$ і знайдеться константа C така, що

$$\max_{[t_0,T]} |y| \leq C.$$

Більш того, якщо остання нерівність відома з деяких додаткових оцінок, тоді розв'язок $y = y(t)$ задачі Коші завжди може бути продовжений на відрізок $[t_0, T]$, оскільки варіант $|y(T_m)| \to \infty$ є неможливим.

(**Завдання для самостійної роботи:** перевірити, що умови теореми 1.20 виконані для прикладу (1.4).)

2. Повні простори. Поповнення просторів.

B2.1. Послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ метричного простору (M, μ) називається *фундаментальною*, якщо $\mu(a_n, a_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$.

B2.2. Метричний простір (M, μ) називається *повним*, якщо кожна фундаментальна послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ має границю $a \in M$.

Множина $B \subset M$ є *щільною* в метричному просторі (M, μ), якщо для кожного $a \in M$ і $\varepsilon > 0$

$$\exists\, b_\varepsilon \in B : \quad \mu(a, b_\varepsilon) \le \varepsilon\,.$$

Метричний простір (M, μ) називається *сепарабельним*, якщо існує зчисленна множина $B \subset M$, яка щільна в (M, μ).

Наприклад, множина поліномів

$$M[0,1] = \{m \in C^0[0,1] \,:\, m \text{ є поліномом на } [0,1]\}$$

є щільною в метричному просторі $(C^0[0,1], \mu_0)$ (теорема Вейшрасса). Крім того, $(C^0[0,1], \mu_0)$ є сепарабельним.

B2.3. Відображення $\varphi : M \to L$ метричних просторів (M, μ) і (L, ϱ) називається *ізометрією*, якщо $\varphi : M \to L$ є взаємно однозначним та

$$\varrho(\varphi(a), \varphi(b)) = \mu(a, b) \qquad \forall\, a, b \in M\,.$$

Ізометричні простори **ототожнюються** в теорії метричних просторів.

B2.4. Повний метричний простір $(\overline{M}, \mu)$ називається *поповненням* метричного простору (M, μ), якщо множина M є щільною в $(\overline{M}, \mu)$.

Теорема 2.5 (про поповнення метричних просторів). *Кожен метричний простір (M, μ) має едине поповнення $(\overline{M}, \mu)$.*

$\triangleleft$ Нехай метричний простір (M, μ) не є повним. Фундаментальні послідовності $\{a_n\}, \{b_n\} \subset M$ називаються еквівалентними, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \mu(a_n, b_n) = 0\,.$$

Позначення: $\{a_n\} \sim \{b_n\}$. З нерівності трикутника витікає, що якщо $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ і $\{b_n\} \sim \{c_n\}$, то $\{a_n\} \sim \{c_n\}$.

Таким чином, множина всіх фундаментальних послідовностей в (M, μ) розпадається на неперетинні класи еквівалентних фундаментальних послідовностей. Позначимо через $\overline{M}$ множину таких класів (еквівалентних фундаментальних послідовностей). Якщо фундаментальна послідовність $\{a_n\}$ належить класу $\bar{a} \in \overline{M}$, тоді пишуть $\{a_n\} \in \bar{a}$. З нерівності трикутника маємо

$$\mu(a_n, b_n) \le \mu(a_n, a_m) + \mu(a_m, b_m) + \mu(b_m, b_n) \qquad \forall\, n, m \in \mathbf{N}$$

і тому

$$|\,\mu(a_n, b_n) - \mu(a_m, b_m)\,| \le \mu(a_n, a_m) + \mu(b_m, b_n)\,.$$

Отже, для фундаментальних послідовностей $\{a_n\}, \{b_n\} \subset M$ послідовність чисел $\alpha_n = \mu(a_n, b_n) \subset \overline{\mathbf{R}}_+$ є фундаментальною і має границю $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

Таким чином, для $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{M}$ таких, що $\{a_n\} \in \bar{a}, \{b_n\} \in \bar{b}$ визначено відображення

$$\bar{\mu}(\bar{a}, \bar{b}) = \lim_{n\to\infty} \mu(a_n, b_n) \quad : \quad \overline{M} \times \overline{M} \to \overline{\mathbf{R}}_+\,.$$

Перевіримо, що це визначення не залежить від вибору $\{a_n\} \in \bar{a}$ і $\{b_n\} \in \bar{b}$. Нехай $\{a_n\}, \{a'_n\} \in \bar{a}$ і $\{b_n\}, \{b'_n\} \in \bar{b}$ (тобто $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ і $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$). Тоді

$$\mu(a'_n, b'_n) \le \mu(a'_n, a_n) + \mu(a_n, b_n) + \mu(b_n, b'_n),$$

$$\mu(a_n, b_n) \le \mu(a_n, a'_n) + \mu(a'_n, b'_n) + \mu(b'_n, b_n)$$

і

$$|\,\mu(a_n, b_n) - \mu(a'_n, b'_n)\,| \le \mu(a_n, a'_n) + \mu(b'_n, b_n)\,.$$

Отже

$$\bar{\mu}(\bar{a}, \bar{b}) = \lim_{n\to\infty} \mu(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(a'_n, b'_n)$$

(оскільки $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ і $\{b_n\} \sim \{b'_n\} \;\Rightarrow\; \lim \mu(a_n, a'_n) = 0$ і $\lim \mu(b_n, b'_n) = 0$) і це визначення відображення $\bar{\mu} \,:\, \overline{M} \times \overline{M} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ є коректним (не залежить від вибору $\{a_n\} \in \bar{a}$ і $\{b_n\} \in \bar{b}$).

Далі, маємо

$$\bar\mu(\bar a,\bar b)=\lim_{n\to\infty}\mu(a_n,b_n)=0 \quad\Rightarrow\quad \{a_n\}\sim\{b_n\} \quad\Leftrightarrow\quad \bar a=\bar b\,,$$

$$\bar\mu(\bar a,\bar b)=\lim_{n\to\infty}\mu(a_n,b_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(b_n,a_n)=\bar\mu(\bar b,\bar a)\,.$$

Крім того, з нерівності трикутника

$$\mu(a_n,b_n)\le\mu(a_n,c_n)+\mu(c_n,b_n)$$

виходить (після переходу до $\lim_{n\to\infty}$), що

$$\bar\mu(\bar a,\bar b)\le\bar\mu(\bar a,\bar c)+\bar\mu(\bar c,\bar b)\,.$$

Таким чином, відображення $\bar\mu$ є метрикою на множині $\overline{M}$ і $(\overline{M},\bar\mu)$ є метричним простором.

Кожному $a\in M$ зіставимо у відповідність послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{a\}_{n=1}^{\infty}$. Такі послідовності називаються *стаціонарними* і є фундаментальними. Отже визначене взаємно однозначне відображення φ з M в $M'\subset\overline{M}$, де M' є множиною класів фундаментальних послідовностей, що містять стаціонарні послідовності.

Для $a,b\in M$ маємо $\bar a=\varphi(a),\bar b=\varphi(b)$ належать M' і

$$\bar\mu(\varphi(a),\varphi(b))=\bar\mu(\bar a,\bar b)=\lim_{n\to\infty}\mu(a,b)=\mu(a,b)\,,$$

де $\{a\}_{n=1}^{\infty}\in\bar a$ і $\{b\}_{n=1}^{\infty}\in\bar b$. Таким чином, відображення φ є ізометрією і метричні простори (M,μ) і $(M',\bar\mu)$ можна ототожнити.

Перевіримо, що M' щільно в $(\overline{M},\bar\mu)$. Нехай $\bar a\in\overline{M}$ і $\{a_n\}\in\bar a$. Для кожного $k\in\mathbf{N}$ позначимо $\bar a_k=\varphi(a_k)\in M'$. За визначенням

$$\bar\mu(\bar a,\bar a_k)=\lim_{n\to\infty}\mu(a_n,a_k)\,.$$

Послідовність $\{a_n\}$ є фундаментальною, тобто

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,N_\varepsilon\quad:\quad \mu(a_n,a_k)<\frac{\varepsilon}{2}\qquad\forall\,n,k\ge N_\varepsilon\,.$$

Отже

$$\bar\mu(\bar a,\bar a_k)=\lim_{n\to\infty}\mu(a_n,a_k)\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\qquad\forall\,k\ge N_\varepsilon,$$

тобто $\forall\;\bar a\in\overline{M}$ і $\forall\;\varepsilon>0\;\;\exists\;\bar b_\varepsilon\in M'\;:\;\bar\mu(\bar a,\bar b_\varepsilon)<\varepsilon$ (M' щільно в $(\overline{M},\bar\mu)$).

Перевіримо, що $(\overline{M}, \bar{\mu})$ є повним. Нехай $\{\bar{a}_n\} \subset \overline{M}$ є фундаментальною послідовністю. Для кожного $n \in \mathbf{N}$ можна знайти $\bar{b}_n = \varphi(b_n) \in M'$ таке, що

$$\bar{\mu}(\bar{a}_n, \bar{b}_n) < \frac{1}{n} \,,$$

де $\bar{b}_n = \varphi(b_n)$ є стаціонарною послідовністю відповідною $b_n \in M$ для $n \in \mathbf{N}$.

Послідовність $\{\bar{b}_n\} \subset \overline{M}$ є фундаментальною. Дійсно, для $\varepsilon > 0$ маємо

$$\bar{\mu}(\bar{b}_n, \bar{b}_m) \leq \bar{\mu}(\bar{b}_n, \bar{a}_n) + \bar{\mu}(\bar{a}_n, \bar{a}_m) + \bar{\mu}(\bar{a}_m, \bar{b}_m) < \frac{1}{n} + \bar{\mu}(\bar{a}_n, \bar{a}_m) + \frac{1}{m} \leq \varepsilon$$

для достатньо великих n і m, оскільки $\{\bar{a}_n\} \subset \overline{M}$ є фундаментальною.

Послідовність $\bar{b}_n = \varphi(b_n) \in M'$ є стаціонарною і тому

$$\bar{\mu}(\bar{b}_n, \bar{b}_m) = \mu(b_n, b_m) \,.$$

Таким чином, послідовність $\{b_n\} \subset M$ є фундаментальною і існує елемент $\bar{b} \in \overline{M}$ такий що $\{b_n\} \in \bar{b}$. Тоді, для $\varepsilon > 0$ маємо

$$\bar{\mu}(\bar{b}, \bar{a}_n) \leq \bar{\mu}(\bar{b}, \bar{b}_n) + \bar{\mu}(\bar{b}_n, \bar{a}_n) < \lim_{k \to \infty} \mu(b_k, b_n) + \frac{1}{n} \leq \mu(b_k, b_n) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

для достатньо великих k і n, оскільки $\{b_n\} \subset M$ є фундаментальною.

Отже, метричне простір $(\overline{M}, \bar{\mu})$ є повним.

Перевіримо, що поповнення $(\overline{M}, \mu)$ для (M, μ) є єдиним (точніше, що поповнення $(\overline{M}, \bar{\mu})$ для $(M', \bar{\mu})$ є єдиним, проте $(M', \bar{\mu})$ і (M, μ) ототожнюються).

Нехай $(\tilde{M}, \mu)$ є іншим повним метричним простором таким, що M щільно в $(\tilde{M}, \mu)$. Тоді для $\tilde{a} \in \tilde{M}$ існує послідовність $\{a_n\} \subset M \subset \tilde{M}$ така, що

$$\mu(\tilde{a}, a_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad (\text{тобто } a_n \to \tilde{a}\,).$$

Послідовність $\{a_n\} \subset M$ є фундаментальною і визначає єдиний елемент $\bar{a} \in \overline{M}$. Таким чином, кожному $\tilde{a} \in \tilde{M}$ відповідає єдиний елемент $\bar{a} \in \overline{M}$.

Нехай $\bar{b} \in \overline{M}$. Тоді визначена фундаментальна послідовність $\{b_n\} \subset M$ така, що $\{b_n\} \in \bar{b}$. Простір $(\tilde{M}, \mu)$ є повним. Тому існує $\tilde{b} \in \tilde{M}$ таке, що

$$\mu(\tilde{b}, b_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad (\text{тобто } b_n \to \tilde{b}\,).$$

Таким чином, кожному $\bar{b} \in \overline{M}$ відповідає єдиний елемент $\tilde{b} \in \tilde{M}$ і

$$\bar{\mu}(\bar{a}, \bar{b}) = \lim_{n\to\infty} \mu(a_n, b_n) = \mu(\tilde{a}, \tilde{b}).$$

Отже відображення $\bar{a} \mapsto \tilde{a}$ з $\overline{M}$ в $\tilde{M}$ є ізометрією.

Якщо метричний простір (M, μ) є повним, тоді $(\overline{M}, \mu) = (M, \mu)$ є єдиним поповненням для (M, μ). $\triangleright$

B2.6. Метричний простір (M, μ) називається *компактним*, якщо

$$\forall \, \{a_n\} \subset M \quad \exists \, \{a_{n_k}\} \subset \{a_n\} : \quad a_{n_k} \to a \in M \quad \text{при} \quad n_k \to \infty \, .$$

Наприклад, замкнута обмежена множина $M \subset \mathbf{R}^n$ є компактним метричним простором (M, μ_0), де $\mu_0 = |\, a - b \,|$ для $a, b \in M$.

B2.7. Множина L називається *лінійним* простором над $\mathbf{C}$ (або $\mathbf{R}$), якщо

(I) на L визначена операція додавання $L \times L \ni (a, b) \mapsto a + b \in L$ така, що

1) $a + b = b + a \quad \forall \, a, b \in L$;

2) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall \, a, b, c \in L$;

3) $\exists 1 \, \theta \in L \, : \, a + \theta = a \quad \forall \, a \in L$;

4) $\forall \, a \in L \quad \exists 1 \, (-a) \in L \, : \, a + (-a) = \theta$;

(II) на L визначена операція множення на числа $\alpha \in \mathbf{C}$ (або $\alpha \in \mathbf{R}$) така, що

5) $\alpha \, (\beta \, a) = (\alpha \, \beta) \, a \quad \forall \, \alpha, \beta \in \mathbf{C} \quad \forall \, a \in L$;

6) $\alpha \, (a + b) = \alpha \, a + \alpha \, b \quad \forall \, \alpha \in \mathbf{C} \quad \forall \, a, b \in L$;

7) $(\alpha + \beta) \, a = \alpha \, a + \beta \, a \quad \forall \, \alpha, \beta \in \mathbf{C} \quad \forall \, a \in L$;

8) $1 \, a = a \quad \forall \, a \in L$.

B2.8. *Нормою* на лінійному просторі L називається всяке відображення

$$\eta : L \to \overline{\mathbf{R}}_+ = \{ r \in \mathbf{R} : r \geq 0 \}$$

таке, що для $\forall \, \alpha \in \mathbf{C}$ та $\forall \, a, b \in L$ маємо

$$1) \quad \eta(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \theta \, ;$$

$$2) \quad \eta(\alpha \, a) = |\alpha| \, \eta(a) \, ;$$

$$3) \quad \eta(a + b) \leq \eta(a) + \eta(b).$$

Лінійний простір L з деякою нормою $\eta(\cdot)$ називається *нормованим простором* (L,η). Зазвичай позначають $\eta(a)=\|a\|_L$ або $\eta(a)=\|a\|$.

Кожен нормований простір $(L,\|\cdot\|_L)$ є метричним простором (L,μ) з метрикою

$$\mu(a,b)=\|a-b\|_L \qquad \forall\, a,b\in L\,.$$

Таким чином, визначена повнота нормованого простору $(L,\|\cdot\|_L)$.

B2.9. Повний нормований простір називається *банаховім простором.*

Множина $A\subset L$ лінійного простору називається лінійним *многовидом*, якщо

$$a_1,\ldots,a_m\in A \;\Rightarrow\; \alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_m a_m\in A \quad \forall\ \alpha_1,\ldots,\alpha_m\in \mathbf{C}\,.$$

B2.10. Множина $A\subset L$ нормованого простору $(L,\|\cdot\|_L)$ називається *обмеженою*, якщо

$$\exists\, M\in \mathbf{R}_+ : \qquad \|\,a\,\|_L\le M \qquad \forall\, a\in A\,.$$

B2.11. Відображення $\varphi : L\to H$ лінійних просторів L і H над $\mathbf{C}$ називається (лінійним) *оператором*, якщо

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)\,, \quad \varphi(\alpha\, a)=\alpha\,\varphi(a)\,, \quad \forall\,\alpha\in\mathbf{C}\,, \quad \forall\, a,b\in L\,.$$

B2.12. Оператор $\varphi : L\to H$ нормованих просторів $(L,\|\cdot\|_L)$ і $(H,\|\cdot\|_H)$ називається *обмеженим*, якщо

$$\exists\, M\in \mathbf{R}_+ : \qquad \|\varphi(a)\|_H\le M\|a\|_L \qquad \forall\, a\in L\,.$$

Найменша з констант $M\in\mathbf{R}_+$ $(:\ \|\varphi(a)\|_H\le M\|a\|_L\,)$ називається нормою оператора φ і позначається $\|\varphi\,\|_B$.

Теорема 2.13. *Оператор* $\varphi : L\to H$ *нормованих просторів* $(L,\|\cdot\|_L)$ і $(H,\|\cdot\|_H)$ є *обмеженим* $\Leftrightarrow$ *оператор* $\varphi : L\to H$ *є неперервним.* $\lhd\,\rhd$

Множина всіх обмежених операторів $\varphi : L\to H$ для нормованих просторів $(L,\|\cdot\|_L)$ і $(H,\|\cdot\|_H)$ позначається $B(L,H)$.

Теорема 2.14. *Множина* $B(L,H)$ *з природними операціями є лінійним простором.* $(B(L,H), \|\cdot\|_B)$ *є нормованим простором і*

$$\|\varphi\|_B = \sup_{\|a\|_L \le 1} \|\varphi(a)\|_H = \sup_{a \ne \theta} \frac{\|\varphi(a)\|_H}{\|a\|_L} \qquad \forall \varphi \in B(L,H)\,.$$

$(B(L,H), \|\cdot\|_B)$ *є банаховім, якщо* $(H, \|\cdot\|_H)$ *є банаховім.* $\lhd \rhd$

Зокрема, нормований простір $(B(L,\mathbf{C}), \|\cdot\|_B)$ є банаховім, цей простір називається *спряженим* (або *дуальним*) до $(L, \|\cdot\|_L)$ і позначається L^* $(= (B(L,\mathbf{C}))$. Елементи $\varphi \in L^*$ називаються *функціоналами*.

Аналогічно визначається *другий* спряжений простір $L^{**} = (L^*)^*$ для $(L, \|\cdot\|_L)$ і

$$L \subset L^{**}.$$

В2.15. Нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *рефлексивним*, якщо

$$L = L^{**}.$$

В2.16. Лінійний простір L над $\mathbf{C}$ називається *n-вимірним*, якщо існують лінійно незалежні $e_1, \ldots, e_n \in L$ такі, що $\forall\, a \in L, a \ne \theta$ елементи $a, e_1, \ldots, e_n \in L$ є лінійно залежними (тобто $\exists\, \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{C} \,:\, \alpha\, a + \alpha_1\, e_1 + \ldots + \alpha_n\, e_n = \theta$).

В цьому випадку елементи $e_1, \ldots, e_n \in L$ називаються базисом L і

$$L = \mathrm{Lin}\,\{e_1, \ldots, e_n\} \equiv \{\alpha_1\, e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \,:\, \alpha_i \in \mathbf{C}, \quad i = 1, \ldots, n\}\,.$$

Дві норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ на лінійному просторі L називаються *еквівалентними*, якщо $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$:

$$\alpha\, \|a\|_1 \le \|a\|_2 \le \beta\, \|a\|_1 \qquad \forall\, a \in L\,.$$

Нехай норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ на лінійному просторі L є еквівалентними. Тоді послідовність $\{a_n\} \subset L$ збігається (фундаментальна) в $(L, \|\cdot\|_1)$

$\Leftrightarrow$ послідовність $\{a_n\}$ збігається (фундаментальна) в $(L, \|\cdot\|_2)$.

В цьому випадку нормовані простори $(L, \|\cdot\|_1)$ і $(L, \|\cdot\|_2)$ також називаються *еквівалентними.*

Крім того, нормовані простори $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(H, \|\cdot\|_H)$ називаються *еквівалентними*, якщо існує лінійна ізометрія $\varphi : L \to H$, тобто

$$\|a\|_L = \|\varphi(a)\|_H \qquad \forall\, a \in L\,.$$

Еквівалентні простори **ототожнюються** в теорії нормованих просторів.

Теорема 2.17. *Кожні дві норми* $\|\cdot\|_1$ *і* $\|\cdot\|_2$ *на* $\mathbf{C}^n$ (*відповідно на* $\mathbf{R}^n$) є *еквівалентними.* $\lhd\ \rhd$

Теорема 2.18. *Кожен нормований* n*-вимірний простір* $(L, \|\cdot\|_L)$ *над* $\mathbf{C}$ (*відповідно над* $\mathbf{R}$) *є еквівалентним* $\mathbf{C}^n$ (*відповідно* $\mathbf{R}^n$). $\lhd\ \rhd$

Позначимо через $C^0(\{1, \ldots, n\}, \mathbf{C})$ множину функцій (відображень) з множини $\{1, \ldots, n\}$ в $\mathbf{C}$.

(**Завдання для самостійної роботи:** перевірити, що такі функції є неперервними.)

Існує природне взаємно однозначне відображення

$$\varphi : C^0(\{1, \ldots, n\}, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}^n\,.$$

Дійсно, $f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbf{C}$ зіставляє кожному $i \in \{1, \ldots, n\}$ деяке число a_i яке визначає елемент a_i для $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}$.

Таким чином, простір $C^0[0,1]$ є нескінченновимірним, оскільки множина $[0,1]$ є нескінченною. Це можна перевірити і таким чином, для кожного $k \in \mathbf{N}$ мономи $1, x, x^2, \ldots, x^k \in C^0[0,1]$ є лінійно незалежними і утворюють зчисленний базис в

$$M[0,1] = \{m \in C^0[0,1] \,:\, m \text{ є поліномом на } [0,1]\}\,.$$

Теорема 2.19 (про поповнення нормованих просторів). *Кожен нормований простір* $(L, \|\cdot\|_L)$ *має єдине лінійне поповнення* $(\overline{L}, \|\cdot\|_L)$.

$\lhd$ Відомо, що $(L, \|\cdot\|_L)$ має єдине поповнення $\widetilde{L}$ (що складається з класів еквівалентних фундаментальних послідовностей) як метричний простір і залишається перевірити, що $\widetilde{L}$ є лінійним простором. Але, якщо $\{a_n\}, \{b_n\} \subset L$

фундаментальні послідовності, тоді $\{a_n + b_n\} \subset L$ і $\{\alpha\, a_n\} \subset L$ для деякого $\alpha \in \mathbf{C}$ також є фундаментальними послідовностями. Тобто $\overline{L} = \tilde{L}$. $\triangleright$

Приклад 2.20. Розглянемо для $a, b \in \mathbf{R} : a < b$ множину

$$C^0[a,b] = \{\, f : [a,b] \to \mathbf{C} \,:\, f \quad \text{є неперервною на } [a,b]\,\}$$

з нормами

$$\|f\|_0 = \max_{x\in[\,a,\,b]} |f(x)|\,,$$

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p \, d\,x \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty\,.$$

(**Завдання для самостійної роботи:** перевірити, що $\|\cdot\|_0$ і $\|\cdot\|_p$ для фіксованого p є нормами на лінійному просторі $C^0[a,b]$.)

Відомо, що $(C^0[a,b], \|\cdot\|_0)$ є банаховім простором.

З іншої сторони, $(C^0[a,b], \|\cdot\|_p)$ не є повним нормованим простором. Дійсно, розглянемо, наприклад, $(C^0[-1,1], \|\cdot\|_1)$ і послідовність неперервних функцій

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{для} \quad x \in [-1, -\frac{1}{n}]\,, \\ n\,x, & \text{для} \quad x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]\,, \\ 1, & \text{для} \quad x \in [\frac{1}{n}, 1]\,. \end{cases}$$

Для кожних $n, m \in \mathbf{N}$ маємо

$$\int\limits_{-1}^{1} |\, f_{n+m}(x) - f_n(x)\,|\; d\,x \;\le$$

$$\le \int\limits_{-1}^{1} |\, f_{n+m}(x) - \operatorname{sgn}(x)\,|\; d\,x + \int\limits_{-1}^{1} |\operatorname{sgn}(x) - f_n(x)\,|\; d\,x \;=\; \frac{1}{n+m} + \frac{1}{n}\,.$$

Таким чином, послідовність $\{f_n\}$ є фундаментальною в $(C^0[-1,1], \|\cdot\|_1)$ і має границю $\operatorname{sgn}(x)$, яка не є неперервною функцією.

Зокрема, норми $\|\cdot\|_0$ та $\|\cdot\|_p$ на $C^0[a,b]$ не є еквівалентними.

B2.21. Поповнення $(C^0[a,b], \|\cdot\|_p)$ для фіксованого p (при $1 \le p < \infty$) називається простором *Лебега інтегрованих у ступені* p функцій і позначається

$$(L^p(a,b), \|\cdot\|_p) = (\overline{C^0[a,b]}, \|\cdot\|_p).$$

3. Гільбертові простори.

В3.1. *Спряжено-білінійним* (або *півторалінійним*) функціоналом на лінійному просторі H над $\mathbf{C}$ називається всяке відображення

$$\varphi : H \times H \to \mathbf{C}$$

таке, що для $\forall\,\alpha, \beta, \delta \in \mathbf{C}$ і $\forall\,a, b, d \in H$ маємо

$$1) \quad \varphi(\alpha\, a + \beta\, b, d) = \alpha\, \varphi(a, d) + \beta\, \varphi(b, d)\,;$$

$$2) \quad \varphi(a, \beta\, b + \delta\, d) = \overline{\beta}\, \varphi(a, b) + \overline{\delta}\, \varphi(a, d)\,,$$

де риса над числом позначає комплексне спряження.

В3.2. Спряжено-білінійний функціонал на лінійному просторі H називається *скалярним* (або *внутрішнім*) добутком, якщо для $\forall\,a, b \in H$ цей функціонал задовольняє умовам

$$i) \qquad \varphi(a, b) = \overline{\varphi(b, a)}\,;$$

$$ii) \qquad \varphi(a, a) \geq 0\,;$$

$$iii) \quad \varphi(a, a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \theta\,.$$

Лінійний простір H з деяким скалярним добутком $\varphi(\cdot, \cdot)$ називається *передгільбертовим простором* (H, φ).

Лінійний простір $L \subset H$ називається *підпростором* передгільбертового простора (H, φ) і є передгільбертовим простором (L, φ).

Зазвичай позначають $\varphi(a, b) = \langle a, b \rangle_H$, $\varphi(a, b) = (a, b)_H$ або $\varphi(a, b) = \langle a, b \rangle$.

Наприклад, на $\mathbf{C}^n$ скалярний добуток можна визначити рівністю

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k\, \overline{b_k} \qquad \text{для} \quad a = (a_1, \ldots, a_n),\; b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{C}^n$$

або рівністю

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k,h=1}^{n} A_{kh} a_k\, \overline{b_h} \qquad \text{для} \quad a,\, b \in \mathbf{C}^n, \quad A_{kh} \in \mathbf{C}, \quad k, h = 1 \ldots, n\,,$$

де матриця $A = \{A_{kh}\}_{k,h=1}^{n}$ є ермітовою і додатною, тобто $A_{kh} = \overline{A_{hk}}$ і

$$\sum A_{kh} a_k \overline{a_h} > 0 \qquad \text{для} \quad a \neq \theta\,.$$

На множині квадратично сумовних послідовностей

$$l^2(\mathbf{C}) \,=\, \{\, a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \,:\quad \sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k|^2 < \infty, \quad a_k \in \mathbf{C}, \quad k = 1, \ldots, n, \ldots\}$$

скалярний добуток можна визначити, наприклад, рівністю

$$\langle a, b\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k} \qquad \text{для} \quad a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots),\, b = (b_1, \ldots, b_n, \ldots) \in l^2(\mathbf{C})$$

(де збіжність ряду випливає з відомої оцінки $|\, a_k \overline{b_k}| \le \frac{1}{2}\,(|\, a_k\,|^2 + |\, b_k\,|^2)\,)$.

Теорема 3.3 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца). *Для передгільбертового простора* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *визначимо*

$$\|\, a\,\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}\,, \qquad a \in H\,.$$

Тоді

$$|\langle a, b\rangle| \le \|\, a\,\|\|\, b\,\|\,, \qquad a, b \in H\,.$$

$\triangleleft$ У випадку $b = \theta$ ця нерівність очевидна $(\,0 \le 0)$.

Для $\alpha \in \mathbf{C}$ і $a, b \in H$, $b \ne \theta$ маємо

$$\langle a + \alpha\, b, a + \alpha\, b\rangle \ge 0$$

або

$$\langle a, a\rangle + \overline{\alpha}\langle a, b\rangle + \alpha\langle b, a\rangle + |\alpha|^2\langle b, b\rangle \ge 0\,.$$

Визначаючи

$$\alpha = -\frac{\langle a, b\rangle}{\langle b, b\rangle}\,,$$

отримуємо (оскільки $|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}\,$), що

$$\langle a, a\rangle - \frac{|\langle a, b\rangle|^2}{\langle b, b\rangle} \ge 0\,. \qquad \triangleright$$

Використовуючи цю нерівність, можна визначити *кут* ϕ між двома ненульовими елементами $a, b \in H$ з рівності

$$\cos(\phi) = \frac{|\langle a, b\rangle|}{\|\, a\,\|\|\, b\,\|}\,.$$

Зокрема, елементи $a, b \in H$ називаються *ортогональними*, якщо

$$\langle a, b\rangle = 0\,.$$

Система елементів $e_\nu \in H$ для деякої множини індексів $\nu \in \Lambda$ називається *ортонормованою*, якщо

$$\langle e_\nu, e_\kappa\rangle = 0 \quad \text{для} \quad \nu \neq \kappa \qquad \text{і} \qquad \|\, e_\nu\| = 1 \quad \text{для} \quad \nu, \kappa \in \Lambda\,.$$

Теорема 3.4. *Для передгільбертового простора* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *відображення*

$$\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}\, : \, H \to \overline{\mathbf{R}}_+$$

є нормою, тобто

$$1) \quad \|\, a\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \theta\,; \qquad 2) \quad \|\,\alpha\, a\| = |\alpha|\,\|\, a\|\,;$$

$$3) \quad \|\, a + b\| \leq \|\, a\| + \|\, b\|\,.$$

$\triangleleft$ Умови 1) і 2) виходять з визначення скалярного добутку. Для перевірки умови 3), використовуючи нерівність Коші-Буняковського-Шварца, маємо

$$\|\, a+b\|^2 = |\langle a+b, a+b\rangle| \leq |\langle a, a\rangle| + |\langle a, b\rangle| + |\langle b, a\rangle| + |\langle b, b\rangle| \;\leq$$

$$\leq\; \|\, a\|^2 + 2\|\, a\|\|\, b\| + \|\, b\|^2 = (\|\, a\| + \|\, b\|)^2\,. \qquad \triangleright$$

Таким чином, $(H, \|\cdot\|)$ є *нормованим простором.*

Передгільбертові простори $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ і $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ називаються *еквівалентними*, якщо вони еквівалентні як нормовані простори $(H_1, \|\cdot\|_1)$ і $(H_2, \|\cdot\|_2)$.

Еквівалентні простори **ототожнюються** в теорії гільбертових **просторів.**

В3.5. Передгільбертів простір $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ називається *гільбертовим*, якщо нормований простір $(H, \|\cdot\|)$ є повним (та нескінченновимірним).

Теорема 3.6 (про поповнення гільбертових просторів). *Кожен передгільбертів простір* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *має едине гільбертове поповнення* $(\overline{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

$\triangleleft$ Відомо, що $(H, \|\cdot\|)$ має єдине поповнення $\widetilde{H}$ (що складається з класів еквівалентних фундаментальних послідовностей) як нормований простір і залишається перевірити, що $\widetilde{H}$ є гільбертовим простором.

Нехай $\tilde{a}, \tilde{b} \in \widetilde{H}$ і $\{a_n\}, \{b_n\} \subset H$ фундаментальні послідовності такі, що $\{a_n\} \in \tilde{a}, \{b_n\} \in \tilde{b}$. Визначимо

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle a_n, b_n \rangle \,.$$

Ця границя існує, оскільки для $n, m \in \mathbf{N}$

$$|\langle a_n, b_n \rangle - \langle a_m, b_m \rangle| \leq \|a_m - a_n\| \|b_m\| + \|b_m - b_n\| \|a_n\| \,,$$

тому послідовність чисел $\{\langle a_n, b_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ є фундаментальною і має границю. Аналогічно перевіряється, що ця границя не залежить від вибору послідовностей $\{a_n\} \in \tilde{a}, \{b_n\} \in \tilde{b}$ і визначає скалярний добуток на $\widetilde{H}$. Тобто $\overline{H} = \widetilde{H}$. $\triangleright$

Приклад 3.7. Розглянемо для $a, b \in \mathbf{R} : a < b$ множину

$$C^0[a,b] = \{\, f : [a,b] \to \mathbf{C} \,:\, f \quad \text{є неперервною на } [a,b] \,\}$$

з скалярним добутком

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, d\,x \,, \qquad \forall\, f, g \in C^0[a,b] \,.$$

(**Завдання для самостійної роботи:** перевірити, що $\langle f, g \rangle$ є скалярним добутком на лінійному просторі $C^0[a,b]$.)

Таким чином $(C^0[a,b], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ є передгільбертовим простором і нерівність Коші-Буняковського-Шварца має вигляд

$$\left| \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, d\,x \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\, d\,x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2\, d\,x \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall\, f, g \in C^0[a,b] \,.$$

Норма на цьому просторі визначається рівністю

$$\|f\| = \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\, d\,x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Відомо, що $(C^0[a,b], \|\cdot\|_2)$ не є гільбертовим (тобто повним) простором, оскільки існують послідовності, що збігаються до функції

$$\operatorname{sgn}(x - (a+b)/2)\,,$$

яка не є неперервною. Наприклад, послідовність неперервних функцій

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{для} \quad x \in [\,a, \frac{a+b}{2} - \frac{1}{n}\,]\,, \\ n\,(x - (a+b)/2), & \text{для} \quad x \in [\,\frac{a+b}{2} - \frac{1}{n}\,, \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}\,]\,, \\ \;\; 1, & \text{для} \quad x \in [\,\frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}\,, b\,]\,, \end{cases}$$

збігається до функції $\operatorname{sgn}(x - (a+b)/2)$ у нормі $\|\cdot\|_2$.

В3.8. Поповнення $(C^0[a,b], \|\cdot\|_2)$ називається простором *квадратично інтегрованих* функцій і позначається

$$(L^2(a,b), \|\cdot\|_2) = (\overline{C^0[a,b]}, \|\cdot\|_2)\,.$$

Таким чином, простір $(L^2(a,b), \|\cdot\|_2)$ складається з "функцій", які можуть бути наближені неперервними функціями, тобто для $f \in L^2(a,b)$ і

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in C^0[a,b]\,: \quad \|f - f_\varepsilon\|_2 < \varepsilon\,.$$

Зокрема, для $f \in L^2(a,b)$ є визначеним інтеграл $\int_a^b f\,dx$, як границя інтегралів від $\int_a^b f_\varepsilon\,dx$, тобто рівністю

$$\int_a^b f(x)\;dx \;= \langle f, 1\rangle\,.$$

Такий інтеграл називається *інтегралом Лебега.*

Нехай $L \subset H$ є підпростір передгільбертового простора $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Елемент $a \in H$ називається *ортогональним* підпростору L, якщо

$$\langle a, l\rangle = 0 \qquad \forall\, l \in L\,.$$

В цьому випадку пишуть $a \perp L$.

Нехай $a \in H$. Елемент $l_a \in L$ називається *ортогональною проекцією* a в підпростір $L \subset H$, якщо $\quad \langle a - l_a, l \rangle = 0 \quad \forall\, l \in L.$

Коли така проекція існує, то пишуть $l_a = \mathrm{Pr}_L(a)$ і така проекція l_a є єдиною. Дійсно, якщо $l_1, l_2 \in L$ такі, що

$$\langle a - l_1, l \rangle = 0\,, \quad \langle a - l_2, l \rangle = 0 \qquad \forall\, l \in L\,,$$

тоді $\langle l_2 - l_1, l \rangle = 0 \quad \forall\, l \in L$ і $\langle l_2 - l_1, l_2 - l_1 \rangle = 0$, тобто $l_2 = l_1$.

(**Завдання для самостійної роботи:** перевірити, що $l_{\alpha a} = \alpha l_a$ і $l_{a+b} = l_a + l_b$, тобто $\mathrm{Pr}_L(\alpha a) = \alpha \mathrm{Pr}_L(a)$ і $\mathrm{Pr}_L(a+b) = \mathrm{Pr}_L(a) + \mathrm{Pr}_L(b)$ для $a, b \in H$ і $\alpha \in \mathbf{C}$.)

Лема 3.9 (закон паралелограма). *Нехай* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *є передгільбертів простір. Тоді*

$$\|\, a + b \,\|^2 + \|\, a - b \,\|^2 = 2 \,\|\, a \,\|^2 + 2 \,\|\, b \,\|^2 \qquad \forall\, a, b \in H\,.$$

$\triangleleft$ Перевіряється безпосередньо, оскільки $\|\, a + b \,\|^2 = \langle a + b, a + b \rangle\,.$ $\triangleright$

Теорема 3.10 (про існування єдиної ортогональної проекції). *Нехай* $L \subset H$ *є повний підпростір передгільбертового простора* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *і* $a \in H$. *Тоді*

$$\exists\, 1 \ l_a = \mathrm{Pr}_L(a) \qquad i \qquad \|\, a - l_a \| \ = \ \inf_{l \in L} \|\, a - l \,\|\,.$$

$\triangleleft$ Позначимо через η_k мінімізуючу послідовність, тобто

$$\lim_{k \to \infty} \|\, a - \eta_k \,\| = d = \inf_{l \in L} \|\, a - l \,\|\,. \tag{3.1}$$

Існування такої послідовності витікає з визначення інфінума. З закону паралелограма

$$\|\, d + b \,\|^2 + \|\, d - b \,\|^2 = 2 \,\|\, d \,\|^2 + 2 \,\|\, b \,\|^2 \qquad \forall\, d, b \in L\,,$$

при $d = a - \eta_k$ і $b = a - \eta_h$, отримуємо

$$\|\, \eta_k - \eta_h \,\|^2 = 2 \,\|\, a - \eta_k \,\|^2 + 2 \,\|\, a - \eta_h \,\|^2 - 4 \left\| a - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h) \right\|^2.$$

Множина L є підпростором, тому $\frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h) \in L$ і $d^2 \le \left\| a - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h) \right\|^2$. Отже

$$\|\, \eta_k - \eta_h \,\|^2 \le 2 \,\|\, a - \eta_k \,\|^2 + 2 \,\|\, a - \eta_h \,\|^2 - 4\, d^2$$

і послідовність $\{\eta_k\} \subset L$ є фундаментальною через (3.1).

Таким чином, існує $l_a \in L$ таке, що $\lim_{k\to\infty} \eta_k = l_a$ і

$$\| a - l_a \| = \lim_{k\to\infty} \| a - \eta_k \| = d\,.$$

Припустимо, що $l \in L$ і $l \neq \theta$. Тоді $\eta_k + \varepsilon\, l \in L$ для $\varepsilon \in \mathbf{C}$ і

$$\| a - (\eta_k + \varepsilon\, l) \|^2 \geq d^2,$$

тобто

$$\| a - \eta_k \|^2 - \overline{\varepsilon}\, \langle a - \eta_k, l \rangle - \varepsilon\, \langle l, a - \eta_k \rangle + |\varepsilon|^2 \| l \|^2 \geq d^2.$$

При $\varepsilon = \frac{\langle a - \eta_k, l\rangle}{\| l \|^2}$ маємо

$$\| a - \eta_k \|^2 - d^2 \geq \frac{|\langle a - \eta_k, l \rangle|^2}{\| l \|^2}\,.$$

Звідки при $k \to \infty$ отримуємо $\langle a - l_a, l \rangle = 0 \quad \forall l \in L.$ $\triangleright$

Лема 3.11. *Нехай* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *є передгільбертів простір і* $a \in H$. *Тоді функціонал*

$$f(x) = \langle x, a \rangle \qquad \forall\, x \in H$$

є лінійним і обмеженим (*тобто* $f \in B(H, \mathbf{C})$). *Крім того*

$$\| f \|_B = \| a \|_H = \sqrt{\langle a, a \rangle}\,.$$

$\triangleleft$ Лінійність $f(\cdot)$ виходить з лінійності $\langle \cdot, a \rangle$, а обмеженість з нерівності

$$|f(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \| x \|_H \| a \|_H \qquad \forall\, x \in H\,.$$

Крім того $f(a) = \| a \|_H \| a \|_H$, тобто $\| f \|_B = \| a \|_H\,.$ $\triangleright$

Лема 3.12. *Нехай* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *є передгільбертів простір і* $f \in B(H, \mathbf{C})$ *такий, що*

$$f(x) = \langle x, a \rangle \qquad \forall\, x \in H\,.$$

Тоді $a \in H$ *визначено однозначно.*

$\triangleleft$ Нехай $a, b \in H$ такі, що

$$f(x) = \langle x, a \rangle\,, \quad f(x) = \langle x, b \rangle \qquad \forall\, x \in H\,.$$

Тоді $\langle x, a - b \rangle = 0\ \forall\, x \in H$. Зокрема $\langle a - b, a - b \rangle = 0$, тобто $a = b$. $\triangleright$

Теорема 3.13 (Рісс). *Нехай* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *є гільбертів простір і* $f \in B(H, \mathbf{C})$. *Тоді*

$$\exists\, 1\ \ a \in H\ :\qquad f(x) = \langle x, a\rangle \qquad \forall\, x \in H\,.$$

$\lhd$ Позначимо

$$L = \{x \in H\ :\quad f(x) = 0\,\}\,.$$

З лінійності f виходить, що L лінійний підпростір в H. Крім того, L є повним. Дійсно, якщо $\{a_n\} \subset L$ є фундаментальною послідовність, тоді

$$\exists\, a \in H\ :\quad a_n \to a\,,$$

оскільки H є повним, і

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0\,,$$

тобто $a \in L$.

Якщо $L = H$, тоді $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in H$ і

$$\exists\, 1\ \ \theta \in H\ :\qquad f(x) = \langle x, \theta\rangle \qquad \forall\, x \in H\,.$$

Нехай $L \neq H$, тоді $\exists\, a \in H$ такий, що

$$f(a) \neq 0\,.$$

Позначимо через $l_a \in L$ ортогональну проекцію a на L і визначимо

$$b = a - l_a\,.$$

Тоді $\langle b, l\rangle = 0 \quad \forall\, l \in L$ і $f(b) = f(a) \neq 0$.

З лінійності f виходить, що

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(b)}\, b\right) = 0 \qquad \forall\, x \in H\,.$$

Таким чином, маємо

$$\forall\, x \in H \qquad x - \frac{f(x)}{f(b)}\, b\, \in L$$

і тому

$$\langle\, x - \frac{f(x)}{f(b)}\; b, b\,\rangle = 0 \qquad \forall\, x \in H$$

за визначенням ортогональної проекції. Отже

$$\langle\, x, b\,\rangle = f(x)\,\frac{\|b\|^2}{f(b)} \qquad \forall\, x \in H$$

і позначаючи $a = \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2}\, b$ отримуємо, що

$$\exists\, 1\;\; a \in H \;\; : \qquad f(x) = \langle x, a\rangle \qquad \forall\, x \in H\,. \qquad \triangleright$$

Таким чином, множину лінійних обмежених функціоналів $B(H, \mathbf{C})$ на гільбертові просторі H можна ототожнити з H, тобто

$$H^* = B(H, \mathbf{C}) = H.$$

Зокрема, $H = H^{**}$ і тому гільбертів простір є рефлексивним.

Теорема 3.14 (про продовження операторів по неперервності). *Нехай* $A \in B(L, Y)$, *де* Y *є банаховім простором і лінійний простір* $L \subset X$ *є щільним в лінійному нормованому просторі* X.

Тоді $\quad \exists\, 1\; \overline{A} \in B(X, Y)$:

$$\overline{A}(x) = A(x) \qquad \forall x \in L$$

і

$$\|\, \overline{A}\,\|_{B(X,Y)} = \|\, A\,\|_{B(L,Y)}\,.$$

$\triangleleft$ Нехай $x \in X$ і $x \notin L$. Тоді існує $\{x_n\} \subset L$ така, що

$$x_n \to x\,,$$

оскільки L є щільним в X. З нерівності

$$\|\, A(x_n) - A(x_m)\,\|_Y \le \|\, A\,\|_{B(L,Y)} \|\, x_n - x_m\,\|_L$$

витікає, що послідовність $\{A(x_n)\} \subset Y$ є фундаментальною і має границю, оскільки Y є банаховім простором. Визначимо

$$\overline{A}(x) = \lim_{n\to\infty} A(x_n)$$

і перевіримо, що це визначення не залежить від вибору послідовності $\{x_n\} \subset L$.

Нехай $\{x'_n\} \subset L$ така, що $x'_n \to x$ і

$$y = \lim_{n\to\infty} A(x_n)\,, \qquad y' = \lim_{n\to\infty} A(x'_n)\,.$$

Тоді

$$\| y - y' \|_Y \leq \| y - A(x_n) \|_Y + \| A(x_n) - A(x'_n) \|_Y + \| A(x'_n) - y' \|_Y \leq$$

$$\leq \| y - A(x_n) \|_Y + \| A \|_{B(L,Y)} \| x_n - x'_n \|_L + \| A(x'_n) - y' \|_Y \to 0\,,$$

тобто $y = y'$.

Лінійність $\overline{A}$ виходить з лінійності A і лінійності границі. Крім того

$$\| A(x_n) \|_Y \leq \| A \|_{B(L,Y)} \| x_n \|_L$$

і тому

$$\| \overline{A}(x) \|_Y \leq \| A \|_{B(L,Y)} \| x \|_L,$$

тобто $\| \overline{A} \|_{B(X,Y)} \leq \| A \|_{B(L,Y)}$. З іншого боку, при продовженні оператора норма цього оператора не може зменшитися, отже

$$\| \overline{A} \|_{B(X,Y)} = \| A \|_{B(L,Y)}\,.$$

Нехай $\overline{A}_1 \in B(X,Y)$ і $\overline{A}_2 \in B(X,Y)$ такі, що

$$\overline{A}_1(x) = \overline{A}_2(x) = A(x) \qquad \forall x \in L\,.$$

Для доведення єдиності необхідно перевірити, що

$$\overline{A}_1(x) = \overline{A}_2(x) \qquad \forall x \in X.$$

Виберемо $x \in X$ таке, що $x \notin L$. Тоді існує послідовність $\{x_n\} \subset L$ така, що

$$x_n \to x\,,$$

оскільки L є щільним в X. Таким чином, маємо рівність

$$\overline{A}_1(x_n) = \overline{A}_2(x_n)\,.$$

Враховуючи неперервність $\overline{A}_1, \overline{A}_2 \in B(X,Y)$ і обчислюючи $\lim_{n\to\infty}$ отримуємо

$$\overline{A}_1(x) = \overline{A}_2(x)\,. \qquad \triangleright$$

Приклад 3.15. Розглянемо на $C^0[a,b]$ норми

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\, d\,x\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty$$

і позначимо

$$(L^p(a,b), \|\cdot\|_p) = (\overline{C^0[a,b]}, \|\cdot\|_p)\,.$$

Таким чином, $C^0[a,b]$ щільно, наприклад, в $(L^1(a,b), \|\cdot\|_1)$. На $C^0[a,b]$ визначений інтеграл

$$\int\limits_a^b \, : \; C^0[a,b] \to \mathbf{C}$$

і

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\, d\,x\right| \le \int\limits_a^b |\, f(x)\,|\, d\,x \, = \|\, f\,\|_1\,.$$

Отже, оператор інтегрування належить $B(C^0[a,b], \mathbf{C})$ і допускає продовження на $(L^1(a,b), \|\cdot\|_1)$.

Аналогічно визначається такий інтеграл на $(L^p(a,b), \|\cdot\|_p)$, оскільки

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\, d\,x\right| \le M\|\, f\,\|_p\,,$$

що виходить з відомої нерівності Гельдера

$$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\, d\,x\right| \le \|\, f\,\|_p \|\, g\,\|_q \quad \text{для} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{і} \quad f, g \in C^0[a,b]\,.$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити нерівність Гельдера, використовуючи що

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \qquad \text{для} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \text{і} \qquad \alpha, \beta \ge 0$$

і обираючи $\alpha = \frac{|f|}{\|f\|_p}$, $\beta = \frac{|g|}{\|g\|_q}$ при $\|f\|_p, \|g\|_q \ne 0$ і $f, g \in C^0[a,b]$.)

4. Простори Соболєва.

Теорема 4.1 (про продовження операторів по неперервності). *Нехай* $A \in B(L,Y)$, *де* Y *є банаховім простором і лінійний простір* $L \subset X$ *є щільним в лінійному нормованому просторі* X.

Тоді $\exists 1\ \overline{A} \in B(X,Y)$:

$$\overline{A}(x) = A(x) \qquad \forall x \in L$$

і

$$\| \overline{A} \|_{B(X,Y)} = \| A \|_{B(L,Y)} . \qquad \triangleleft\ \S\ 3 \triangleright$$

В4.2. Відкрита обмежена зв'язна підмножина $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ називається *областю* у $\mathbf{R}^n$. Замикання області Ω в $\mathbf{R}^n$ позначається $\overline{\Omega}$ (і є компактною множиною), а

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$$

називається *межею* цій області.

Наприклад, $\Omega = \{ x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1 \}$ є відкритою кулею в $\mathbf{R}^n$,

$$\overline{\Omega} = \{ x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq 1 \}$$

є замкненою кулею і $\partial\Omega = \{ x \in \mathbf{R}^n : |x| = 1 \}$ називається одиничною сферою.

Розглянемо для області Ω в $\mathbf{R}^n$ лінійний простір

$$C^0(\overline{\Omega}) = \{ f : \overline{\Omega} \to \mathbf{C} \ : \ f \quad \text{є неперервною на } \overline{\Omega} \} .$$

Теорема 4.3 (нерівність Гельдера). *Для* $f, g \in C^0(\overline{\Omega})$ *виконана нерівність*

$$\left| \int\limits_\Omega f(x) g(x)\ d\,x \right| \leq \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p\ d\,x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_\Omega |g(x)|^q\ d\,x \right)^{\frac{1}{q}} , \quad \text{де} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

і $1 < p < \infty$. *Зокрема*

$$\left| \int\limits_\Omega f(x)\, d\,x \right| \leq \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p\, d\,x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_\Omega 1\ d\,x \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p\, d\,x \right)^{\frac{1}{p}} (\mathrm{mes}(\Omega))^{\frac{1}{q}} . \quad \triangleleft\ \S\ 3 \triangleright$$

Розглянемо на $C^0(\overline{\Omega})$ норми

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, d\,x \right)^{\frac{1}{p}} , \quad 1 \le p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p \, ,$$

де $\lim_{p\to\infty}$ існує, оскільки неперервні функції обмежені ($|f(x)| \le M$) і тому обмежена послідовність чисел $\|f\|_p$ ($\|f\|_p \le M \,\mathrm{mes}(\Omega)^{1/p} \le M \,\mathrm{mes}(\Omega)$, наприклад, якщо $\mathrm{mes}(\Omega) \ge 1$), крім того, ця послідовність є монотонною.

B4.4. Поповнення $(C^0(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_p)$ для фіксованого p називається простором *Лебега інтегрованих у ступені* p функцій і позначається

$$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p) = (\,\overline{C^0(\overline{\Omega})}, \|\cdot\|_p) \, .$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що

$$L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \text{при} \quad 1 \le q \le p \le \infty \, .$$

Зокрема $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ при $1 \le p \le \infty$.)

Таким чином, простір $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ складається з "функцій", які можуть бути наближені неперервними функціями, тобто для $f \in L^p(\Omega)$ і

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, f_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega}) \, : \quad \|f - f_\varepsilon\|_p < \varepsilon \, .$$

Для $f \in C^0(\overline{\Omega})$ є визначеним лінійний інтеграл $\int\limits_{\Omega} f \, d\,x$. З нерівності Гельдера витікає, що цей інтеграл є обмеженим відображенням з $C^0(\overline{\Omega})$ в $\mathbf{C}$. Таким чином, з теореми 4.1 витікає, що для $f \in L^p(\Omega)$ є визначеним лінійний інтеграл (такий інтеграл називається *інтегралом Лебега*) і

$$\left| \int\limits_{\Omega} f(x) \, d\,x \right| \le (\mathrm{mes}(\Omega))^{\frac{1}{q}} \, \|\, f \,\|_p \, .$$

Нехай $A \subset \overline{\Omega}$. Визначимо функцію $\chi_A(x)$ рівністю $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A$ і $\chi_A(x) = 0$ при $x \in \overline{\Omega} \setminus A$. Така функція називається *характеристичною* функцією множини $A \subset \overline{\Omega}$.

В4.5. Множина $A \subset \overline{\Omega}$ називається *вимірною*, якщо $\chi_A(x) \in L^1(\Omega)$. Функція $f : \overline{\Omega} \to \mathbf{C}$ називається (абсолютно) *інтегрованою*, якщо $f \in L^1(\Omega)$.

Міра Лебега $\mathrm{mes}\,(A)$ вимірної множини $A \subset \overline{\Omega}$ визначається рівністю

$$\mathrm{mes}\,(A) = \int_A d\,x = \int_\Omega \chi_A\, d\,x\,.$$

Теорема 4.6. *Міра Лебега вимірної множини* $A \subset \overline{\Omega}$ *є рівною нулю* ($\mathrm{mes}(A) = 0$) $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0$ *існує множина кубів* $K_1, K_2, \ldots, K_k \ldots$ *така, що*

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \qquad і \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |K_k| < \varepsilon\,,$$

де $|K_k| = |\,b_k - a_k|^n$ *позначає об'єм куба* $K_k = [a_k, b_k]^n$ *і* $k = 1, 2 \ldots.$ $\lhd\,\rhd$

Відомо, що $L^p(\Omega)$ складається з класів еквівалентності інтегрованих функцій, де f і g належать одному класу, якщо $f = g$ майже усюди, тобто

$$\mathrm{mes}\,(\{\, x \in \Omega \,:\, f \neq g\,\}) \,=\, 0\,.$$

Крім того, відомо, що $L^p(\Omega) = \{\, f$ є інтегрованою $:\, \|f(x)\|_p < \infty \,\}$ при $1 \leq p < \infty$. Визначимо

$$\widetilde{L}^\infty(\Omega) = \{\, f \;\; \text{є інтегрованою} \;:\; \|f(x)\|_\infty < \infty \,\}\,.$$

Тоді $L^\infty(\Omega) \subset \widetilde{L}^\infty(\Omega)$.

Теорема 4.7 (Лузін Н.Н.). *Функція* $f : \overline{\Omega} \to \mathbf{C}$ *є інтегрованою* $\Rightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, f_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega}) \,: \qquad \mathrm{mes}\,(\{\, x \in \Omega \,:\, f \neq f_\varepsilon\,\}) \,<\, \varepsilon\,. \qquad \lhd\,\rhd$$

При $p = 2$ простір $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ є гільбертовим з скалярним добутком

$$\langle u, v\rangle_2 = (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, d\,x\,.$$

Для такого гільбертового простору була доведена наступна теорема.

Теорема 4.8 (Рісс). *Нехай* $f \in B(L^2(\Omega), \mathbf{C})$. *Тоді*

$$\exists\, 1 \;\; v \in L^2(\Omega) \;: \qquad f(u) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, d\,x \qquad \forall\, u \in L^2(\Omega)\,. \qquad \lhd\,\rhd$$

Аналогічна теорема виконана для просторів $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ при $1 < p < \infty$.

Теорема 4.9. *Нехай* $f \in B(L^p(\Omega), \mathbf{C})$ *при* $1 < p < \infty$. *Тоді*

$$\exists\, 1 \;\; v \in L^q(\Omega) \;\; : \qquad f(u) = \int\limits_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, d\,x \qquad \forall\, u \in L^p(\Omega)\,,$$

де $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. *Крім того,* $\widetilde{L}^\infty(\Omega) = B(L^1(\Omega), \mathbf{C})$, *але* $L^1(\Omega) \neq B(\widetilde{L}^\infty(\Omega), \mathbf{C})$. $\lhd \rhd$

Ця теорема означає, що простори $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ і $(L^q(\Omega), \|\cdot\|_q)$ взаємно спряжені:

$$L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega), \quad L^q(\Omega)^* = L^p(\Omega) \qquad \text{при} \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \qquad \text{і} \qquad 1 < p < \infty\,.$$

Крім того, $L^1(\Omega)^* = \widetilde{L}^\infty(\Omega)$, але $\widetilde{L}^\infty(\Omega)^* \neq L^1(\Omega)$. Зокрема, при $1 < p < \infty$ простір $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ є рефлексивним, оскільки

$$L^p(\Omega) = L^q(\Omega)^* = L^p(\Omega)^{**}\,.$$

У просторі $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ інтеграл є визначеним. Для визначення диференціювання на $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ необхідні додаткові визначення.

В4.10. Межа $\partial\Omega$ області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ має *клас* $C^k, k \geq 1$, якщо $\partial\Omega$ є компактною і для кожного $x \in \partial\Omega$ існує відкрита множина $U \subset \mathbf{R}^n$, $x \in U$ і взаємно однозначне відображення $\psi : B = \{\, x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1 \,\} \to U$ такі, що

$$\psi \in C^k(\overline{B}), \quad \psi^{-1} \in C^k(\overline{U}), \quad \psi(B_+) = U \cap \Omega, \quad \psi(B_-) = U \cap (\mathbf{R} \setminus \overline{\Omega}), \quad \psi(B_0) = U \cap \partial\Omega,$$

де $B_+ = \{\, x \in B \,:\, x_n > 0 \,\}$, $B_- = \{\, x \in B \,:\, x_n < 0 \,\}$ і $B_0 = \{\, x \in B \,:\, x_n = 0 \,\}$.

Область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ має *ліпшицеву межу* $\partial\Omega$, якщо $\psi \in \mathrm{Lip}(\overline{B})$, $\psi^{-1} \in \mathrm{Lip}(\overline{U})$, де, наприклад $\psi \in \mathrm{Lip}(\overline{B})$, якщо

$$\exists\, L > 0 \;\; : \quad |\psi(x) - \psi(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall\, x, y \in \overline{B}\,.$$

Теорема 4.11 (Радемахер.) $\psi \in \mathrm{Lip}(\overline{B}) \Rightarrow \nabla\psi \in \widetilde{L}^\infty(B)^n$. *Зокрема, якобіан* $J(\psi) \in \widetilde{L}^\infty(B)$. $\lhd \rhd$

Надалі розглядаються тільки області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, що мають **ліпшицеви межі**.

Визначимо на лінійному просторі

$$C^1(\overline{\Omega}) = \{\, v \in C^0(\overline{\Omega}) \;:\; \nabla v \in C^0(\overline{\Omega})^n \,\}$$

норми

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \Big(\, \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)^n} \Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при} \qquad 1 \le p < \infty\,,$$

$$\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_{W^{1,\infty}} = \max\Big\{\, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \Big\} \quad \text{при} \qquad p = \infty\,,$$

де $L^p(\Omega)^n = L^p(\Omega) \times \ldots \times L^p(\Omega) = \{\, (f_1, \ldots, f_n) \;:\; f_k \in L^p(\Omega), \quad k = 1, \ldots, n \,\}$.

В4.12. Поповнення нормованого простору $(C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \qquad \text{при} \qquad 1 \le p \le \infty$$

і називається простором *Соболєва першого порядку* інтегрованих у ступені p (класів еквівалентних) функцій на Ω. Зокрема, для елементів з $W^{1,p}(\Omega)$ визначений інтеграл і диференціювання. У відповідності з теоремою.

Теорема 4.13. *Розглянемо оператор градієнта* ∇ *як лінійний оператор з* $(C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ *в* $(L^p(\Omega)^n, \|\cdot\|_{L^p(\Omega)^n})$, $1 \le p \le \infty$. *Тоді* $\nabla \in B(C^1(\overline{\Omega}), L^p(\Omega)^n)$,

$$\exists\, 1 \quad \overline{\nabla} \in B(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n) \;: \qquad \overline{\nabla}(v) = \nabla(v) \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$$

і

$$\|\,\overline{\nabla}\,\|_{B(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n)} = 1\,.$$

◁ Нехай $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Тоді $\nabla u \in C^0(\overline{\Omega})^n \subset L^p(\Omega)^n$ і

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n} \le \Big(\, \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)^n} \Big)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \text{при} \qquad 1 \le p < \infty\,,$$

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \le \max\Big\{\, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \Big\} = \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \quad \text{при} \qquad p = \infty\,.$$

Залишається скористатися теоремою 4.1. ▷

B4.14. Нехай $u \in W^{1,p}(\Omega)$ при $1 \leq p \leq \infty$ і $E \subset \overline{\Omega}$. За визначенням

$$u \geq 0 \quad \text{на} \quad E \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega)\,,$$

якщо існує послідовність $\{u_n\} \subset C^1(\overline{\Omega})$ така, що

$$u_n \geq 0 \quad \forall\, x \in E \qquad \text{і} \qquad u_n \to u \quad \text{у нормі} \quad W^{1,p}(\Omega)\,.$$

Якщо $-u \geq 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$, тоді пишуть $u \leq 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$. Відповідно, якщо $u \geq 0$ і $u \leq 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$, тоді за визначенням

$$u = 0 \quad \text{на} \quad E \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega)\,.$$

Для цілого $l \geq 1$ визначимо лінійні простори

$$C^l(\overline{\Omega}) = \{\, v \in C^0(\overline{\Omega}) \,:\, \nabla v \in C^0(\overline{\Omega})^n, \ldots, \nabla^l v \in C^0(\overline{\Omega})^{n^l} \,\}\,,$$

$$C^l(\mathbf{R}^n) = \{\, v \in C^0(\mathbf{R}^n) \,:\, \nabla v \in C^0(\mathbf{R}^n)^n, \ldots, \nabla^l v \in C^0(\mathbf{R}^n)^{n^l} \,\}\,,$$

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{l=1}^{\infty} C^l(\overline{\Omega})\,, \qquad C^\infty(\mathbf{R}^n) = \bigcap_{l=1}^{\infty} C^l(\mathbf{R}^n)$$

і розглянемо лінійний простір функцій, що є нескінченно диференційованими і мають компактні носії

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\, v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \,:\, \operatorname{supp} v \subset \Omega \,\}\,,$$

де $\operatorname{supp} v = \overline{\{\, x \in \Omega \,:\, v(x) \neq 0 \,\}}$ називається *носієм* функції v.

Нехай $\omega_1(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$ є парною невід'ємною функцією такою, що

$$\omega_1(t) = 0 \qquad \text{при} \qquad |t| \geq 1$$

і

$$\int\limits_{R^n} \omega_1(|x|)\, d\,x \;=\; \int\limits_{|x|<1} \omega_1(|x|)\, d\,x \;=\; 1$$

для фіксованого $n \geq 1$. Наприклад, оберемо

$$\omega_1(t) = C_n\, e^{-\frac{1}{1-t^2}} \qquad \text{при} \qquad |t| < 1$$

і $\omega_1(t) = 0$ при $|t| \geq 1$, де постійна C_n обирається так, щоб $\int\limits_{R^n} \omega_1(|x|)\, d\,x = 1$.

Для фіксованого $h > 0$ функція

$$\omega_h(|x|) = \frac{1}{h^n}\,\omega_1(\frac{|x|}{h})$$

називається *ядром усереднення.* Таке ядро $\omega_h(|x|)$ задовольняє умовам:

1. $\omega_h(|x|) \in C^\infty(\mathbf{R}^n), \qquad \omega_h(|x|) \geq 0 \quad$ в $\quad \mathbf{R}^n$,

2. $\omega_h(|x|) = 0 \quad$ для $\quad |x| \geq h$,

3. $\int\limits_{R^n} \omega_h(|x|)\,d\,x = 1$,

4. для кожного цілого $l \geq 0$ і всіх $x \in \mathbf{R}^n$ існує постійна C_l така, що

$$|\,\nabla^l \omega_h(|x|)\,| \;\leq\; \frac{C_l}{h^{n+l}}\,,$$

де постійна C_l не залежить від h і x.

Нехай $u \in L^1(\Omega)$ і $u = 0$ при $x \in \mathbf{R}^n \setminus \Omega$. Для фіксованого $h > 0$ функція

$$u_h(x) \;= \int\limits_{\Omega} u(y)\,\omega_h(|x-y|)\,d\,y$$

називається *усередненою функцією* для u радіусу h. Безпосередньо з визначення і умови **2** маємо

$$u_h(x) \;= \int\limits_{\Omega} u(y)\,\omega_h(|x-y|)\,d\,y \;= \int\limits_{R^n} u(y)\,\omega_h(|x-y|)\,d\,y \;=$$

$$= \int\limits_{\{|x-y|<h\}} u(y)\,\omega_h(|x-y|)\,d\,y \;= \int\limits_{\Omega\,\cap\,\{|x-y|<h\}} u(y)\,\omega_h(|x-y|)\,d\,y$$

і $u_h = 0$ при $x \in \mathbf{R}^n \setminus \Omega^h$, де

$$\Omega^h \;=\; \bigcup_{x_0 \in \Omega} \{\, x \in \mathbf{R}^n \,:\, |x - x_0| < h \,\}\,.$$

З визначення і умови **1** також маємо $u_h \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, оскільки

$$\nabla^l u_h(x) \;= \int\limits_{\Omega} u(y)\,\nabla^l_x\,\omega_h(|x-y|)\,d\,y$$

для кожного цілого $l \geq 0$ і всіх $x \in \mathbf{R}^n$.

Теорема 4.15. *Для цілого* $l \geq 0$ *і* $u \in C^l(\overline{\Omega})$ *маємо*

$$\|u_h - u\|_{C^0(\overline{\omega})} + \ldots + \;\|\nabla^l u_h - \nabla^l u\|_{C^0(\overline{\omega})^{n^l}} \to 0 \qquad \textit{при} \qquad h \to 0$$

для кожного $\omega \subset \Omega$ *такого, що* $\overline{\omega} \subset \Omega$.

$\triangleleft$ Нехай $l = 0$. Оберемо h_0 так, щоб $h_0 < \operatorname{dist}(\partial\omega, \partial\Omega)$, де $\operatorname{dist}(\partial\omega, \partial\Omega)$ позначає відстань між $\partial\omega$ і $\partial\Omega$. Тоді для $h \le h_0$ і $x \in \overline{\omega}$ отримуємо

$$|u_h - u| =$$

$$= \left| \int\limits_{\{|x-y|<h\}} u(y)\,\omega_h(|x-y|)\,d\,y - u(x) \int\limits_{\{|x-y|<h\}} \omega_h(|x-y|)\,d\,y \right| \le$$

$$\le \max_{\{|x-y|<h\}} |u(y) - u(x)| \int\limits_{\{|x-y|<h\}} \omega_h(|x-y|)\,d\,y = \max_{\{|x-y|<h\}} |u(y) - u(x)|\,.$$

Таким чином, з рівномірної неперервності функції u виходить, що

$$\|u_h - u\|_{C^0(\overline{\omega})} \to 0 \qquad \text{при} \qquad h \to 0\,.$$

Випадок $u \in C^l(\overline{\Omega})$ при $l \ge 1$ розглядається аналогічно, оскільки

$$\nabla^l u_h(x) = \int\limits_{\Omega} u(y)\,\nabla_x^l\,\omega_h(|x-y|)\,d\,y =$$

$$= (-1)^l \int\limits_{\Omega} u(y)\,\nabla_y^l\,\omega_h(|x-y|)\,d\,y = \int\limits_{\Omega} \nabla_y^l\,u(y)\,\omega_h(|x-y|)\,d\,y\,. \qquad \triangleright$$

Теорема 4.16. *Нехай* $u \in L^p(\Omega)$ *при* $1 \le p \le \infty$. *Тоді*

$$\|u_h\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

для кожного $h > 0$. *Зокрема* $u_h \in L^p(\Omega)$.

$\triangleleft$ Розглянемо, наприклад, випадок $1 < p < \infty$. З нерівності Гельдера маємо

$$|u_h(x)|^p = \left| \int\limits_{\Omega} u(y)\,\omega_h(|x-y|)^{1/p}\,\omega_h(|x-y|)^{1/q}\,d\,y \right|^p \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega} |u(y)|^p\,\omega_h(|x-y|)\,d\,y \left(\int\limits_{\Omega} \omega_h(|x-y|)\,d\,y \right)^{p/q}.$$

Інтегруючи цю нерівність отримуємо

$$\|u_h\|^p_{L^p(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |u(y)|^p\,d\,y \le \int\limits_{\Omega} |u(y)|^p \left(\int\limits_{\Omega} \omega_h(|x-y|)\,d\,x \right) d\,y \le \|u\|^p_{L^p(\Omega)},$$

оскільки

$$\int\limits_{\Omega} \omega_h(|x-y|)\,d\,y = \int\limits_{\Omega\,\cap\,\{|x-y|<h\}} \omega_h(|x-y|)\,d\,y \le \int\limits_{\{|x-y|<h\}} \omega_h(|x-y|)\,d\,y = 1\,.$$

Випадки $p = 1$ і $p = \infty$ розглядаються аналогічно. $\triangleright$

Теорема 4.17. *Нехай* $u \in L^p(\Omega)$ *при* $1 \le p \le \infty$. *Тоді*

$$\|u_h - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \qquad \text{при} \qquad h \to 0\,.$$

$\lhd$ Для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\tilde{u} \in C^0(\overline{\Omega})$ таке, що

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Використовуючи теорему 4.16 і нерівність трикутника, отримуємо

$$\|u - u_h\|_{L^p(\Omega)} \le \|u - \tilde{u}\|_{L^p(\Omega)} + \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^p(\Omega)} + \|\tilde{u}_h - u_h\|_{L^p(\Omega)} \le$$
$$\le \frac{2\,\varepsilon}{3} + \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{2\,\varepsilon}{3} + \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{C^0(\overline{\Omega})}.$$

Відомо, що для функції $\tilde{u} \in C^0(\overline{\Omega})$ знайдуться область Ω' і функція $\hat{u} \in C^0(\overline{\Omega}')$ такі, що $\overline{\Omega} \subset \Omega'$ і $\hat{u} = \tilde{u}$ при $x \in \Omega$. Таким чином, з теореми 4.15 витікає, що

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le \frac{\varepsilon}{3}$$

для достатньо малих $h \le h_0$. $\rhd$

Теорема 4.18 (про абсолютну неперервність інтеграла Лебега). *Нехай* $f \in L^1(\Omega)$. *Тоді* $\forall\,\varepsilon > 0$ *існує* $\delta > 0$ *таке що*

$$\left| \int\limits_{\omega} f(x)\,d\,x \right| < \varepsilon \qquad \text{при} \qquad \mathrm{mes}\,(\omega) = \int\limits_{\omega} d\,x < \delta$$

для кожного вимірного $\omega \subset \Omega$. $\lhd$ $\rhd$

З теорем 4.15–4.18 безпосередньо слідує наступне твердження.

Теорема 4.19. *Простір* $C_0^\infty(\Omega)$ *щільний в* $L^p(\Omega)$ *при* $1 \le p < \infty$, *тобто для* $f \in L^p(\Omega)$ *і*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)\,: \quad \|f - f_\varepsilon\|_p < \varepsilon\,.$$

Простір $C^\infty(\overline{\Omega})$ *щільний в* $W^{1,p}(\Omega)$ *при* $1 \le p \le \infty$ *і в* $L^\infty(\Omega)$. *Зокрема, ці простори можуть бути визначені як поповнення* $C_0^\infty(\Omega)$ і $C^\infty(\overline{\Omega})$:

$$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p) = (\,\overline{C_0^\infty(\Omega)}, \|\cdot\|_p)\,, \quad (L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty) = (\,\overline{C^\infty(\overline{\Omega})}, \|\cdot\|_\infty)\,,$$

$$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) = (\overline{C^\infty(\overline{\Omega})}, \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \qquad \text{при} \qquad 1 \le p \le \infty\,. \qquad \lhd\ \rhd$$

B4.20. Поповнення нормованого простору $(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \qquad \text{при} \qquad 1 \le p \le \infty\,.$$

За визначенням, якщо $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ тоді

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega)\,.$$

Крім того, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ є повним підпростором в $W^{1,p}(\Omega)$.

(**Завдання для самостійної роботи:**

1. Нехай $\Omega = \{\, x \in \mathbf{R}^n \,:\, |x| < 1 \,\}$, $s > 0$ і

$$\psi(x) = |x|^{-s}\,.$$

Перевірити, що

$$\psi \in L^p(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad p\,s < n; \qquad \psi \in W^{1,p}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad p\,(s+1) < n\,;$$

і $$(\psi - 1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad p\,(s+1) < n\,.$$

2. Нехай $\Omega = \{\, x \in \mathbf{R}^n \,:\, |x| < 1 \,\}$ і

$$u(x) = \frac{x}{|x|}\,.$$

Перевірити, що $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)^n$ при $1 \le p < n$.

3. Нехай $\Omega = \{\, x \in \mathbf{R}^2 \,:\, |x| < 1/2 \,\}$, $0 < s < 1/2$ і

$$v(x) = |\lg|x|\,|^s\,.$$

Перевірити, що $v(x) \in W^{1,2}(\Omega)$, $v(x) \in L^p(\Omega)$ при $1 \le p < \infty$ але $v(x) \notin \tilde{L}^\infty(\Omega)$.)

5. Задача Діріхле для рівняння Пуассона.

Для фіксованого цілого $m \geq 1$ визначимо на лінійному просторі $C^\infty(\overline{\Omega})$ норми

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)^n} + \ldots + \|\nabla^m u\|^p_{L^p(\Omega)^{n^m}} \Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max\big\{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n}, \ldots, \|\nabla^m u\|_{L^\infty(\Omega)^{n^m}} \big\} \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

B5.1. Поповнення нормованого простору $(C^\infty(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}) \qquad \text{при} \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

і називається простором *Соболєва m-го порядку* інтегрованих у ступені p (класів еквівалентних) функцій на Ω.

Поповнення нормованого простору $(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W_0^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}) \qquad \text{при} \qquad 1 \leq p \leq \infty.$$

Таким чином, $W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ є повним підпростором в $W^{m,p}(\Omega)$.

Теорема 5.2. *Розглянемо оператор m-градієнта ∇^m як лінійний оператор з $(C^\infty(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ в $(L^p(\Omega)^{n^m}, \|\cdot\|_{L^p(\Omega)^{n^m}})$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Тоді $\nabla^m \in B(C^\infty(\overline{\Omega}), L^p(\Omega)^{n^m})$, $\quad \exists\, 1 \quad \overline{\nabla^m} \in B(W^{m,p}(\Omega), L^p(\Omega)^{n^m})$:

$$\overline{\nabla^m}(v) = \nabla^m(v) \qquad \forall\, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

і

$$\|\, \overline{\nabla^m} \,\|_{B(W^{m,p}(\Omega), L^p(\Omega)^{n^m})} = 1.$$

$\triangleleft$ Нехай $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Тоді $\nabla^m u \in C^\infty(\overline{\Omega})^{n^m} \subset L^p(\Omega)^{n^m}$ і

$$\|\nabla^m u\|_{L^p(\Omega)^{n^m}} \leq \Big(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \ldots + \|\nabla^m u\|^p_{L^p(\Omega)^{n^m}} \Big)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \ \text{при} \ 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\nabla^m u\|_{L^\infty(\Omega)^{n^m}} \leq \max\big\{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \ldots, \|\nabla u^m\|_{L^\infty(\Omega)^{n^m}} \big\} = \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

Залишається скористатися теоремою 4.1. $\qquad \triangleright$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що

$$\overline{\nabla^m}(v) = \overline{\nabla}^{\,m}(v) \qquad \forall\, v \in W^{m,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad)$$

Відомо, що $W^{m,p}(\Omega) = \{\, u \in L^p(\Omega) \,:\, \overline{\nabla} u \in L^p(\Omega)^n, \ldots, \overline{\nabla}^{\,m} u \in L^p(\Omega)^{n^m} \}$ при $1 \le p < \infty$. Визначимо

$$\widetilde{W}^{m,\infty}(\Omega) = \{\, u \in \widetilde{L}^\infty(\Omega) \,:\, \overline{\nabla} u \in \widetilde{L}^\infty(\Omega)^n, \ldots, \overline{\nabla}^{\,m} u \in \widetilde{L}^\infty(\Omega)^{n^m} \},$$

і $\widetilde{W}_0^{m,\infty}(\Omega) = \widetilde{W}^{m,\infty}(\Omega) \cap W_0^{m,1}(\Omega)$. Тоді $W^{m,\infty}(\Omega) \subset \widetilde{W}^{m,\infty}(\Omega)$.

При $p = 2$ простір $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ є гільбертовим з скалярним добутком

$$(u, v)_{W^{m,p}(\Omega)} = \int_\Omega u\, \overline{v}\, d\,x + \int_\Omega (\nabla u, \nabla \overline{v})\, d\,x \,+ \ldots + \int_\Omega (\nabla^m u, \nabla^m \overline{v})\, d\,x,$$

де зазвичай пишуть ∇ замість $\overline{\nabla}$. Такі гільбертові простори позначаються також

$$(H^m(\Omega), \|\cdot\|_{H^m(\Omega)}) = (W^{m,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,2}(\Omega)})$$

і $(H_0^m(\Omega), \|\cdot\|_{H^m(\Omega)}) = (W_0^{m,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,2}(\Omega)})$.

Зокрема, простір $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ над $\mathbf{R}$ є гільбертовим з скалярним добутком

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, d\,x + \int_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))\, d\,x.$$

Теорема 5.3 (нерівність Фрідріхса). *Нехай* $u \in H_0^1(\Omega)$. *Тоді існує постійна* $C = C(\Omega)$ *така, що*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}.$$

$\lhd$ Досить довести цю нерівність для $u \in C_0^\infty(\Omega)$, оскільки $C_0^\infty(\Omega)$ щільно в $H_0^1(\Omega)$ за визначенням. Область Ω обмежена. Тому, можна вважати, що для $i = 1, \ldots, n$ існують $l_i > 0$ такі, що

$$\Omega \subset \Pi = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \quad 0 < x_i < l_i, \quad i = 1, \ldots, n\}$$

і $u \in C_0^\infty(\Pi)$. Для такої функції u маємо

$$u(x_1, x') = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(y_1, x')}{\partial y_1}\, d\,y_1,$$

де

$$x' \in \Pi' = \{x' = (x_2, \ldots, x_n) : \quad 0 < x_i < l_i, \quad i = 2, \ldots, n\}.$$

Використовуючи нерівності Гельдера і $|\int(\cdot)d\,x| \leq \int|\cdot|d\,x$, отримуємо

$$u(x_1,x')^2 = \left(\int\limits_0^{x_1} \frac{\partial u(y_1,x')}{\partial y_1}\,d\,y_1\right)^2 \leq \left(\int\limits_0^{x_1} \left|\frac{\partial u(y_1,x')}{\partial y_1}\right| d\,y_1\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\left(\int\limits_0^{x_1} \left|\frac{\partial u(y_1,x')}{\partial y_1}\right|^2 d\,y_1\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{x_1} 1\,d\,y_1\right)^{1/2}\right)^2 \leq x_1 \int\limits_0^{l_1} \left|\frac{\partial u(y_1,x')}{\partial y_1}\right|^2 d\,y_1.$$

Інтегруючи цю нерівність по Π, маємо

$$\int\limits_\Pi u(x)^2 d\,x \leq \int\limits_0^{l_1}\int\limits_{\Pi'} \left[x_1 \int\limits_0^{l_1} \left|\frac{\partial u(y_1,x')}{\partial y_1}\right|^2 d\,y_1\right] d\,x_1 d\,x' =$$

$$= \frac{l_1^2}{2}\int\limits_\Pi \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right)^2 d\,x \leq \frac{l_1^2}{2}\int\limits_\Pi \left[\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right)^2\right] d\,x. \qquad \triangleright$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Довести теорему.

Теорема 5.3' (нерівність Фрідріхса для $W_0^{1,p}(\Omega)$). *Нехай* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *при* $1 \leq p \leq \infty$. *Тоді існує постійна* $C = C(\Omega)$ *така, що*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}. \qquad \triangleleft\ \triangleright\ )$$

З нерівності Фрідріхса виходить, що норми $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ і $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)^n}$ є еквівалентними на $H_0^1(\Omega)$. Дійсно, для $u \in H_0^1(\Omega)$ маємо наступні нерівності

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^n} \leq \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^n} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq$$

$$\leq (1+C^2)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^n} = (1+C^2)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Таким чином, $H_0^1(\Omega)$ можна розглядати з скалярним добутком

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))\,d\,x.$$

Фіксуємо $f \in L^2(\Omega)$ і розглянемо функціонал

$$F(v) = \int\limits_\Omega f(x)\,v(x)\,d\,x \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Цей функціонал є лінійним за визначенням. З нерівності Гельдера витікає, що цей функціонал є обмеженим, а з теореми Рісса отримуємо, що

$$\exists 1 \; u \in H_0^1(\Omega): \quad \int\limits_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) \, dx = \int\limits_{\Omega} f(x)\, v(x) \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.1)$$

Зокрема, ця рівність виконана $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$ і якщо $u \in C^2(\overline{\Omega})$, тоді інтегруючи частинами, маємо

$$-\int\limits_{\Omega} (\Delta u(x))\, v(x) \, dx = \int\limits_{\Omega} f(x)\, v(x) \, dx \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \qquad (5.2)$$

де

$$\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u(x)) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n^2}.$$

Теорема 5.4 (основна лема варіаційного числення). *Нехай* $\psi \in L^p(\Omega)$ *при* $1 \le p \le \infty$ *така, що*

$$\int\limits_{\Omega} \psi(x)\, v(x) \, dx = 0 \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Тоді $\psi = 0$ *в* $L^p(\Omega)$.

$\lhd$ Розглянемо, наприклад, випадок $p = 2$. Можна вважати, що $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, оскільки $C_0^\infty(\Omega)$ щільно в $L^2(\Omega)$. Отже, $\int_\Omega \psi(x)^2 \, dx = 0$ і тому $\psi = 0$. $\rhd$

Таким чином, з (5.2) витікає, що

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega \qquad (5.3)$$

і

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega). \qquad (5.4)$$

Задача (5.3),(5.4) називається *однорідною задачею Діріхле* для *рівняння Пуассона*.

Відповідно, задача: знайти $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) \, dx = \int\limits_{\Omega} f(x)\, v(x) \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

називається *слабкою* (або *варіаційною*) формою однорідної задачі Діріхле (5.4) для рівняння Пуассона (5.3). З (5.1) витікає така теорема.

Теорема 5.5 ($\exists 1$ розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона). *Нехай* $f \in L^2(\Omega)$. *Тоді*

$$\exists 1 \ u \in H_0^1(\Omega): \quad \int_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))\, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad \lhd \ \rhd$$

Надалі використовується наступна теорема.

Теорема 5.6 (Хана-Банаха). *Нехай* H *є нормованим простором над* $\mathbf{R}$, $L \subset H$ *є підпростором в* H *і* $f \in B(L, \mathbf{R})$ *є лінійним функціоналом на* L. *Тоді існує* $F \in B(H, \mathbf{R})$ *такий, що*

$$F(x) = f(x) \quad \textit{для} \quad x \in L$$

і

$$\|F\|_{B(H,R)} = \|f\|_{B(L,R)}. \qquad \lhd \ \rhd$$

Теорема 5.7. *Нехай* H *є нормованим простором над* $\mathbf{R}$ *і* $x_0 \in H : x_0 \neq 0$. *Тоді існує* $F \in B(H, \mathbf{R})$ *такий, що*

$$F(x_0) = \|x_0\|_H$$

і

$$\|F\|_{B(H,R)} = 1.$$

$\lhd$ Розглянемо лінійний півпростір $L = \{\, x : x = tx_0, \quad t \in \mathbf{R} \,\}$ і визначимо $f(x) = t\|x_0\|_H$. Тоді $f(x_0) = \|x_0\|_H$ і

$$|f(x)| = |t|\|x_0\|_H = \|x\|_H,$$

тобто $\|f\|_{B(L,R)} = 1$. Залишається скористатися теоремою 5.6. $\rhd$

Розглянемо лінійний оператор $A : X \to Y$, де X і Y є нормованими просторами. Нехай $\varphi \in Y^* = B(Y, \mathbf{R})$. Тоді φ визначений при $y = Ax \quad \forall x \in X$ і

$$\varphi(y) = \varphi(Ax) = f(x)$$

є лінійним функціоналом на X, тобто $f \in X^* = B(X, \mathbf{R})$.

Таким чином, кожному $\varphi \in Y^*$ зіставлений деякий $f \in X^*$, тобто визначено лінійне відображення

$$B \,:\, Y^* \to X^*.$$

Це відображення називається оператором *спряженим* до A і позначається A^*. Рівність $\varphi(y) = f(x)$ записується у вигляді

$$f = A^*\varphi.$$

Теорема 5.8. *Нехай X і Y є нормованими просторами та $A \in B(X, Y)$. Тоді $A^* \in B(Y^*, X^*)$ і*

$$\|A^*\|_{B(Y^*,X^*)} = \|A\|_{B(X,Y)}.$$

$\triangleleft$ За визначенням

$$|(A^*\varphi)(x)| = |f(x)| = |\varphi(Ax)| \leq \|\varphi\|_{Y^*}\|Ax\|_Y \leq \|\varphi\|_{Y^*}\|A\|_{B(X,Y)}\|x\|_X,$$

звідки

$$\sup_{x\neq 0} \frac{|(A^*\varphi)(x)|}{\|x\|_X} = \|A^*\varphi\|_{X^*} \leq \|\varphi\|_{Y^*}\|A\|_{B(X,Y)}.$$

Отже, $A^* \,:\, Y^* \to X^*$ є обмеженим і

$$\|A^*\|_{B(Y^*,X^*)} \leq \|A\|_{B(X,Y)}.$$

Нехай $x_0 \in X \,:\, x_0 \neq 0$. За теоремою 5.7 існує $\varphi_0 \in Y^*$ такий, що $\|\varphi_0\|_{Y^*} = 1$ і

$$\varphi_0(Ax_0) = \|Ax_0\|_Y.$$

За визначенням

$$\|Ax_0\|_Y = \varphi_0(Ax_0) = |f_0(x_0)| \leq \|f_0\|_{X^*}\|x_0\|_X =$$

$$= \|A^*\varphi_0\|_{X^*}\|x_0\|_X \leq \|A^*\|_{B(Y^*,X^*)}\|\varphi_0\|_{Y^*}\|x_0\|_X = \|A^*\|_{B(Y^*,X^*)}\|x_0\|_X,$$

звідки $\|A\|_{B(X,Y)} \leq \|A^*\|_{B(Y^*,X^*)}$, тобто

$$\|A^*\|_{B(Y^*,X^*)} = \|A\|_{B(X,Y)}. \qquad \triangleright$$

В5.9. Множина лінійних функціоналів на $H_0^1(\Omega)$ позначається $H^{-1}(\Omega)$, тобто

$$H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)^* = B(H_0^1(\Omega), \mathbf{R}).$$

Значення функціонала $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$ на елементі $v \in H_0^1(\Omega)$ позначається так

$$\varphi(v) = \langle \varphi, v \rangle.$$

Для $f \in L^2(\Omega)$ і $v \in H_0^1(\Omega)$ вираз

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, d\,x$$

визначає лінійний обмежений функціонал і тому

$$L^2(\Omega) = L^2(\Omega)^* \subset H^{-1}(\Omega).$$

Крім того, за визначенням $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Таким чином доведена теорема.

Теорема 5.5' ($\exists 1$ розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона). *Нехай* $f \in H^{-1}(\Omega)$. *Тоді*

$$\exists\, 1\ u \in H_0^1(\Omega): \quad \int_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))\, d\,x = \langle f, v \rangle \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \quad \triangleleft\ \triangleright$$

Оператор градієнта $\nabla : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)^n$ є визначеним і $\|\nabla\|_{B(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)^n)} = 1$. Таким чином, оператор

$$\nabla^* \,:\, L^2(\Omega)^n \to H^{-1}(\Omega)$$

є визначеним і $\|\nabla^*\|_{B(L^2(\Omega)^n, H^{-1}(\Omega))} = 1$. Оператор ∇^* називається оператором *узагальненої дивергенції* і позначається $\nabla^* = -\mathrm{div}$.

Для $u \in H_0^1(\Omega)$ і $\varphi \in L^2(\Omega)^n$ маємо

$$\varphi(\nabla u) = \langle \varphi, \nabla u \rangle = \int_\Omega (\varphi(x), \nabla u(x))\, d\,x = -\langle \mathrm{div}\, \varphi, u \rangle = (\nabla^* \varphi)(u).$$

Цю рівність можна розглядати як узагальнену формулу *інтегрування частинами*. Для $u \in C_0^\infty(\Omega)$ і $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^n$ ця формула приймає вигляд

$$\int_\Omega (\varphi(x), \nabla u(x))\, d\,x = -\int_\Omega (\mathrm{div}\, \varphi)\, u\, d\,x,$$

де

$$\operatorname{div}\varphi = \operatorname{div}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}.$$

Використовуючи узагальнену формулу інтегрування частинами, теорему 5.5' можна переписати у наступному вигляді.

Теорема 5.5" ($\exists\, 1$ розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона). *Нехай* $f \in H^{-1}(\Omega)$. *Тоді*

$$\exists\, 1\ u \in H_0^1(\Omega): \quad -\langle \Delta u, v\rangle = \langle f, v\rangle \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

де $\Delta u = \operatorname{div}\nabla u$. $\quad\triangleleft\ \triangleright$

Або у наступному вигляді.

Теорема 5.5"' ($\exists\, 1$ розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона). *Нехай* $f \in H^{-1}(\Omega)$. *Тоді* $\exists\, 1\ u \in H_0^1(\Omega):$

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega) \tag{5.1'}$$

і

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega). \tag{5.2'}$$

6. Ряди Фур'є.

Лінійний простір H над $\mathbf{C}$ (або $\mathbf{R}$) з деяким скалярним добутком $\varphi(\cdot,\cdot)$ називається *передгільбертовим простором* (H,φ). Скалярний добуток є спряжено-білінійним функціоналом $\varphi : H\times H\to\mathbf{C}$ таким, що для $\forall\, a,b\in H$ цей функціонал задовольняє умовам

$$i)\qquad \varphi(a,b)=\overline{\varphi(b,a)}\,;\qquad ii)\qquad \varphi(a,a)\geq 0\,;$$

$$iii)\quad \varphi(a,a)=0\quad\Leftrightarrow\quad a=\theta\,.$$

Передгільбертів простір (H,φ) є нормованим простором $(H,\|\cdot\|_H)$, де

$$\|a\|_H=\sqrt{\varphi(a,a)}\qquad\forall\, a\in H.$$

Повний передгільбертів простір (H,φ) називається *гільбертовим простором.*

Зазвичай позначають $\varphi(a,b)=\langle a,b\rangle_H$, $\varphi(a,b)=(a,b)_H$ або $\varphi(a,b)=(a,b)$.

Нормований простір $(L,\|\cdot\|_L)$ називається *сепарабельним*, якщо існують лінійно незалежні $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}\subset L$ (тобто $\{w_i\}_{i=1}^{m}$ лінійно незалежні для $m\in\mathbf{N}$) такі, що лінійний простір

$$\widetilde{L}=\{\,v\in L\,:\,v=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i w_i\,,\quad\alpha_i\in\mathbf{C},\quad m\in\mathbf{N}\,\}$$

є щільним в L. Тобто $\forall\, v\in L$, $\forall\,\varepsilon>0$ знайдуться $m\in\mathbf{N}$ і $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ такі, що

$$\Big\|\,v-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i w_i\Big\|_L<\varepsilon\,.$$

Якщо $\{w_i\}_{i=1}^{m}$ лінійно незалежні, тоді

$$\overline{\{w_i\}_{i=1}^{m}}=\mathrm{Lin}\{\,w_1,\ldots,w_m\,\}=\{\,\sum_{i=1}^{m}\alpha_i w_i\,,\quad\alpha_i\in\mathbf{C}\,\}$$

називається *лінійною оболонкою* елементів $\{w_i\}_{i=1}^{m}$. Таким чином $\widetilde{L}=\cup_m\overline{\{w_i\}_{i=1}^{m}}$.

Система елементів $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}\subset H$ передгільбертового простору $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ називається *ортонормованою*, якщо

$$\langle e_i,e_j\rangle=0\quad\text{для}\quad i\neq j\qquad\text{і}\qquad\|\,e_i\|=1\quad\text{для}\quad i,j=1,2,\ldots\,.$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що ортонормована система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є лінійно незалежною.)

Теорема 6.1 (Шмідт). *Нехай система елементів* $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ *передгільбертового простору* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *над* $\mathbf{C}$ *є лінійно незалежною.*

Тоді існує ортонормована система $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ *така, що*

$$e_m \in \overline{\{w_i\}_{i=1}^{m}} = \mathrm{Lin}\{\, w_1, \ldots, w_m \,\}$$

для кожного $m = 1, 2, \ldots$, *тобто* $\overline{\{e_j\}_{j=1}^{m}} = \overline{\{w_i\}_{i=1}^{m}}$ *для кожного* $m = 1, 2, \ldots$.

$\lhd$ Визначимо $e_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$, де $\|w_1\| \neq 0$, оскільки система $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ є лінійно незалежною. Нехай

$$g_2 = w_2 - \alpha_{21} e_1 \,.$$

Виберемо $\alpha_{21} \in \mathbf{C}$ так, щоб

$$\langle g_2, e_1 \rangle = 0 \,.$$

Тоді $\alpha_{21} = \langle w_2, e_1 \rangle$ визначено однозначно. Визначимо $e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} \in \overline{\{w_i\}_{i=1}^{2}}$, де $\|g_2\| \neq 0$, оскільки, якщо $g_2 = \theta$ тоді w_1, w_2 лінійно залежні.

Далі використовується індукція. Нехай $e_1, \ldots, e_{k-1}$ вже вибрані. Розглянемо

$$g_k = w_k - \alpha_{k1} e_1 - \alpha_{k2} e_2 - \ldots - \alpha_{k,k-1} e_{k-1}$$

і виберемо $\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{k,k-1} \in \mathbf{C}$ так, щоб

$$\langle g_k, e_1 \rangle = 0 \,, \quad \langle g_k, e_2 \rangle = 0 \,, \quad \ldots \quad , \quad \langle g_k, e_{k-1} \rangle = 0 \,.$$

Тоді $\alpha_{k1} = \langle w_k, e_1 \rangle, \ldots, \alpha_{k,k-1} = \langle w_k, e_{k-1} \rangle$ визначені однозначно. Таким чином $e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|} \in \overline{\{w_i\}_{i=1}^{k}}$, де $g_k \neq \theta$, оскільки $w_1, w_2, \ldots, w_k$ лінійно незалежні. $\rhd$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що система $\{e^{nx2\pi\sqrt{-1}} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \} \subset L^2(0,1)$ є ортонормованою.)

В6.2. Нехай система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є ортонормованою і $h \in H$. Тоді числа

$$\phi_k = \langle h, e_k \rangle$$

називаються *коефіцієнтами Фур'є* елементу $h \in H$ по системі $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \, e_k \,, \quad \text{де} \qquad \phi_k = \langle h, e_k \rangle,$$

називається *рядом Фур'є* елементу $h \in H$ по системі $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 6.3. *Нехай система елементів* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *передгільбертового простору* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *є ортонормованою і* $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ *є коефіцієнтами Фур'є елементу* $h \in H$. *Тоді ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2$ *є збіжним і*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \leq \|h\|_H^2. \tag{6.1}$$

◁ Для $m \in \mathbf{N}$ безпосередньо перевіряється, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{m} \phi_k \, e_k \right\|_H^2 = \|h\|_H^2 - \sum_{k=1}^{m} |\phi_k|^2 \tag{6.2}$$

і тому

$$\sum_{k=1}^{m} |\phi_k|^2 \leq \|h\|_H^2. \qquad \triangleright$$

Нерівність (6.1) називається *нерівністю Бесселя.*

З рівності (6.2) для кожного $m \in \mathbf{N}$ відразу виходить, що

$$\sum_{k=1}^{m} \phi_k \, e_k \to h \quad \text{при} \quad m \to \infty \qquad (\text{тобто} \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \, e_k \,)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 = \|h\|_H^2. \tag{6.3}$$

Ця рівність називається *рівністю Парсеваля-Стеклова.* Якщо рівність (6.3) виконується для кожного $h \in H$, тоді ортонормована система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ називається *замкненою в сенсі Стеклова.*

Теорема 6.4 (о мінімальності коефіцієнтів Фур'є) *Нехай система елементів* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *передгільбертового простору* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *є ортонормованою і* $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *є коефіцієнтами Фур'є елементу* $h \in H$. *Тоді для кожного* $m \in \mathbf{N}$ *маємо*

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \left\| h - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, e_k \right\|_H^2 = \left\| h - \sum_{k=1}^{m} \phi_k \, e_k \right\|_H^2.$$

◁ Для $m \in \mathbf{N}$ безпосередньо перевіряється, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, e_k \right\|_H^2 = \|h\|_H^2 - \sum_{k=1}^{m} |\phi_k|^2 + \sum_{k=1}^{m} |\phi_k - \alpha_k|^2.$$

і тому мінімум правої частини досягається при $\alpha_k = \phi_k$ для $k = 1, \dots, m$. ▷

Теорема 6.5. *Нехай система елементів* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *передгільбертового простору* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *є ортонормованою і щільною в* H. *Тоді для кожного* $h \in H$ *маємо*

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k\, e_k\,.$$

$\triangleleft$ Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ є щільною в H. Тобто $\forall\, h \in H$, $\forall\, \varepsilon > 0$ знайдуться $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ і $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_\varepsilon}$ такі, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \alpha_k e_k \right\|_H^2 < \varepsilon\,.$$

Звідки і з мінімальності коефіцієнтів Фур'є $\phi_k = \langle h, e_k\rangle$ виходить, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \phi_k e_k \right\|_H^2 < \varepsilon\,.$$

Крім того, для $m \ge N_\varepsilon$ з рівності (6.2) маємо

$$0 \le \left\| h - \sum_{k=1}^{m} \phi_k\, e_k \right\|_H^2 = \|h\|_H^2 - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |\phi_k|^2 - \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{m} |\phi_k|^2 < \varepsilon - \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{m} |\phi_k|^2 < \varepsilon\,.$$

Таким чином

$$\sum_{k=1}^{m} \phi_k\, e_k \to h \quad \text{при} \quad m \to \infty \qquad \Big(\text{тобто} \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k\, e_k\Big) \qquad \triangleright$$

Теорема 6.6 (Фур'є). *Нехай* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ *така, що ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ *збігається. Тоді для кожної ортонормованої системи* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *гільбертового простору* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$ *збігається і є рядом Фур'є деякого* $h \in H$, *тобто*

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k\,, \quad \textit{де} \qquad \alpha_k = \langle h, e_k\rangle.$$

$\triangleleft$ Для $m, p \in \mathbf{N}$ з рівності

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{m+p} \alpha_k\, e_k \right\|_H^2 = \sum_{k=m+1}^{m+p} |\alpha_k|^2$$

витікає, що послідовність $s_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, e_k$ є фундаментальною. Простір H є повним і тому $\exists\, 1\, h \in H\ :\quad h = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$.

Крім того, для $k \in \mathbf{N}$ з неперервності скалярного добутку виходить, що

$$\langle h, e_k\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle s_m, e_k\rangle = \lim_{m\to\infty} \Big\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, e_i, e_k \Big\rangle = \alpha_k. \qquad \triangleright$$

Теорема 6.7 (про щільність у гільбертовому просторі). *Нехай* H *є гільбертовим простором. Тоді ортонормована система* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *щільна в* H

$$\Leftrightarrow \quad h \in H \, : \, \langle h, e_k \rangle = 0 \quad \forall\, k \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad h = \theta \, .$$

$\triangleleft\,(\Rightarrow)$ Нехай система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ щільна в H, тоді для $\forall\, h \in H$ виконана рівність Парсеваля-Стеклова (6.3) і тому $\langle h, e_k \rangle = 0 \quad \forall\, k \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \|h\|_H = 0$. $(\Rightarrow)\triangleright$

$\triangleleft\,(\Leftarrow)$ Нехай $h \in H$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \, e_k \, , \quad \textit{де} \qquad \phi_k = \langle h, e_k \rangle,$$

є рядом Фур'є для h. З нерівності Бесселя (6.1) виходить, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2$ збігається. Тоді з теореми 6.6 отримуємо, що $\exists\, 1\, h_0 \in H$:

$$h_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \, e_k \, , \quad \textit{де} \qquad \phi_k = \langle h_0, e_k \rangle.$$

Таким чином $\langle h - h_0, e_k \rangle = 0 \quad \forall\, k \in \mathbf{N}$ і тому $h = h_0$, тобто кожен $h \in H$ може бути наближений лінійною комбінацією

$$\sum_{k=1}^{m} \phi_k \, e_k$$

елементів системи $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Це означає, що $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ щільна в H. $(\Leftarrow)\triangleright$

В6.8. Система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору L називається *базисом*, якщо для кожного $l \in L$ знайдуться $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$:

$$l = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, e_k \, .$$

Теорема 6.9. *У кожному сепарабельному передгільбертовому просторі* H *існує ортонормований базис* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$.

$\triangleleft$ Ця теорема витікає з визначень та теорем 6.1 і 6.5. $\triangleright$

Теорема 6.10 (про еквівалентність). *Кожен сепарабельний гільбертів простір* H *над* $\mathbf{C}$ (*відповідно над* $\mathbf{R}$) *є еквівалентним гільбертовому простору*

$$l^2(\mathbf{C}) \, = \, \{ \, \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \, : \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\, \alpha_k|^2 < \infty, \quad \alpha_k \in \mathbf{C}, \quad k = 1, \ldots, n, \ldots \}$$

(*відповідно* $l^2(\mathbf{R})$).

$\triangleleft$ В H існує ортонормований базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ через теорему 6.9. Визначимо відображення $\varphi : H \to l^2(\mathbf{C})$ співвідношенням

$$h \mapsto \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \textit{де} \qquad \phi_k = \langle h, e_k \rangle.$$

З теореми 6.3 витікає, що це відображення визначене (тобто $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbf{C})$), а з теореми 6.6 витікає, що відображення φ є лінійним і взаємно однозначним.

Крім того, якщо $h \mapsto \varphi(h) = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $l \mapsto \varphi(l) = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, тоді з неперервності скалярного добутку витікає, що

$$\langle h, l \rangle_H = \lim_{m\to\infty} \langle \sum_{k=1}^{m} \phi_k\, e_k, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, e_i \rangle_H = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \phi_k \overline{\alpha}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \overline{\alpha}_k = \langle \varphi(h), \varphi(l) \rangle_{l^2},$$

$$\|h\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 = \|\varphi(h)\|_{l^2}^2, \qquad \|l\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|\varphi(l)\|_{l^2}^2,$$

тобто відображення φ зберігає скалярний добуток і норми. $\triangleright$

З теореми 6.10 безпосередньо витікає наступна теорема.

Теорема 6.11 (про еквівалентність гільбертових просторів). *Сепарабельні гільбертові простори* H_1 і H_2 *над* $\mathbf{C}$ (*відповідно над* $\mathbf{R}$) *є еквівалентними.* $\triangleleft\ \triangleright$

З наведених теорем виходить, що якщо $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ визначає ортонормовану систему у сепарабельному передгільбертовому просторі $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, тоді поповнення цього простору $(\overline{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ можна визначити рівністю

$$\overline{H} = \{\, h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k\, e_k \;:\quad \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbf{C}) \,\}$$

і

$$\langle h, l \rangle_H = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \overline{\alpha}_k$$

для $h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k$ і $l = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.

Наприклад, при $i = \sqrt{-1}$ система $\{e^{x\,m\,2\pi\,i} \;:\; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \subset C^0[0,1]$ є ортонормованою (щодо $L^2(0,1)$-добутку) у сепарабельному простору $C^0[0,1]$ і

$$\overline{C^0[0,1]} = L^2(0,1) = \{\, h(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m\, e^{x\,m\,2\pi\,i} \;:\quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi_m|^2 < \infty \,\},$$

$$\langle h, l \rangle_{L^2(0,1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m \overline{\alpha}_m\,, \qquad \|h\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi_m|^2$$

для $h = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m e^{x\,m\,2\pi\,i}$ і $l = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{x\,m\,2\pi\,i}$ (де $e^{\varrho\,i} = \cos\varrho + i\sin\varrho$, $\varrho \in [0, 2\pi]$).

Аналогічно, ця система $\{e^{x\,m\,2\pi\,i} : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \subset C^\infty[0,1]$ є ортонормованою в $C^\infty[0,1]$ (щодо $L^2(0,1)$-добутку) і тому

$$\overline{C^\infty[0,1]} = L^2(0,1) = \{\, h(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m\, e^{x\,m\,2\pi\,i} : \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi_m|^2 < \infty \,\}\,.$$

Більш того, простір *тригонометричних поліномів*

$$\mathrm{Trig}\,[0,1] = \{\, h \in C^\infty[0,1] : h(x) = \sum_{m=-M}^{M} \phi_m\, e^{x\,m\,2\pi\,i}, \quad \phi_m \in \mathbf{C}, \quad M \in \mathbf{N} \,\}$$

є щільним в $L^2(0,1)$ (оскільки $\overline{C^\infty[0,1]} = L^2(0,1)$). Таким чином, отримуємо

$$\overline{\mathrm{Trig}\,[0,1]} = L^2(0,1) = \{\, h(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m\, e^{x\,m\,2\pi\,i} : \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi_m|^2 < \infty \,\}.$$

Приклад 6.12. Використовуючи визначення, маємо

$$\cos(\varrho+\varphi) + i\sin(\varrho+\varphi) \;=\; e^{\varrho\,i+\varphi\,i} \;=\; e^{\varrho\,i}\cdot e^{\varphi\,i} = (\,\cos\varrho + i\sin\varrho\,)(\,\cos\varphi + i\sin\varphi\,) \;=$$

$$=\;(\,\cos\varrho\,\cos\varphi - \sin\varrho\,\sin\varphi\,) \;+\; i\,(\,\sin\varrho\,\cos\varphi + \cos\varrho\,\sin\varphi\,)\,,$$

тобто перевірено, наприклад, що $\sin(\varrho+\varphi) \;=\; \sin\varrho\,\cos\varphi \;+\; \cos\varrho\,\sin\varphi\,.$

Для $x \in \mathbf{R}^n$ і $m \in \mathbf{Z}^n$ визначимо

$$e^{(x,\,m)\,2\pi\,i} \;=\; e^{(x_1\,m_1 + \ldots + x_n\,m_n)\,2\pi\,i} \;=\; e^{x_1\,m_1\,2\pi\,i}\cdot \ldots \cdot e^{x_n\,m_n\,2\pi\,i},$$

$$\mathrm{Trig}\,[0,1]^n = \{\, h \in C^\infty[0,1]^n : h(x) = \sum_{m\in Z^n :\, |m|\le M} \phi_m\, e^{(x,\,m)\,2\pi\,i}, \;\; \phi_m \in \mathbf{C}, \;\; M \in \mathbf{N} \,\}\,.$$

Безпосередньо перевіряється, що система $\{e^{(x,\,m)\,2\pi\,i} : m \in \mathbf{Z}^n\} \subset \mathrm{Trig}\,[0,1]^n$ є ортонормованою в $\mathrm{Trig}\,[0,1]^n$ (щодо $L^2((0,1)^n)$-добутку) і тому

$$\overline{\mathrm{Trig}\,[0,1]^n} = L^2((0,1)^n) = \{\, h(x) = \sum_{m\in Z^n} \phi_m\, e^{(x,\,m)\,2\pi\,i} : \quad \sum_{m\in Z^n} |\phi_m|^2 < \infty \,\}\,.$$

Для кожного $k = 1,\dots,n$ функція $h(x) \in \mathrm{Trig}\,[0,1]^n$ задовольняє умовам

$$h(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n) = h(x_1,\dots,x_k+1,\dots,x_n)\,,$$

які називаються умовами 1-*періодичності* і можуть бути записані у наступному вигляді $h(x) = h(x+m)\;\; \forall\, x \in \mathbf{R}^n,\;\; \forall\, m \in \mathbf{Z}^n$. Крім того, для кожного $l = 1, \dots$ і $k = 1,\dots,n$ функція $h(x) \in \mathrm{Trig}\,[0,1]^n$ задовольняє умовам

$$\left.\frac{\partial^l h(x)}{\partial^l x_k}\right|_{x_k=0} = \left.\frac{\partial^l h(x)}{\partial^l x_k}\right|_{x_k=1},$$

які називаються умовами 1-*періодичності для нормальних похідних.*

Розглянемо лінійний простір $\mathrm{Trig}\,[0,1]^n$ над $\mathbf{C}$ як передгільбертів з скалярним добутком

$$(u,v)_{H^1((0,1)^n)} = \int\limits_{(0,1)^n} u(x)\,\overline{v(x)}\,d\,x + \int\limits_{(0,1)^n} (\nabla u(x), \nabla\overline{v(x)})\,d\,x\,.$$

Для $u(x) = \sum_{\{m\in Z^n:\,|m|\le M\}} \phi_m\, e^{(x,m)\,2\pi\, i} \in \mathrm{Trig}\,[0,1]^n$, маємо

$$\|u\|^2_{H^1((0,1)^n)} = (u,u)_{H^1((0,1)^n)} = \sum_{\{m\in Z^n:\,|m|\le M\}} (1+|2\pi m|^2)|\phi_m|^2\,,$$

оскільки

$$\nabla u(x) = \sum_{\{m\in Z^n:\,|m|\le M\}} (2\pi m\, i)\,\phi_m\, e^{(x,m)\,2\pi\, i}.$$

B6.13. Поповнення нормованого простору $(\mathrm{Trig}[0,1]^n, \|\cdot\|_{H^1((0,1)^n)})$ позначається

$$(H^1_{per}((0,1)^n), \|\cdot\|_{H^1((0,1)^n)})$$

і називається простором *Соболєва першого порядку* інтегрованих у ступені 2 (класів еквівалентних) 1-періодичних функцій на $(0,1)^n$.

За визначенням $H^1_{per}((0,1)^n) \subset H^1((0,1)^n)$, але $H^1_{per}((0,1)^n) \neq H^1((0,1)^n)$, оскільки функції із $H^1_{per}((0,1)^n)$ зберігають в певному сенсі умови 1-періодичності. Безпосередньо перевіряється також, що

$$H^1_{per}((0,1)^n) = \{\, u(x) = \sum_{m\in Z^n} \phi_m\, e^{(x,m)\,2\pi\, i} \;:\; \sum_{m\in Z^n} (1+|2\pi m|^2)|\phi_m|^2 < \infty \,\}\,.$$

Для $s\in\mathbf{R}$ і $u(x) = \sum_{\{m\in Z^n:\,|m|\le M\}} \phi_m\, e^{(x,m)\,2\pi\, i} \in \mathrm{Trig}\,[0,1]^n$, визначені також норми

$$\|u\|^2_{H^s((0,1)^n)} = \sum_{m\in Z^n} (1+|2\pi m|^2)^s|\phi_m|^2\,.$$

B6.10. Поповнення нормованого простору $(\mathrm{Trig}\,[0,1]^n, \|\cdot\|_{H^s((0,1)^n)})$ позначається

$$(H^s_{per}((0,1)^n), \|\cdot\|_{H^s((0,1)^n)})$$

і називається простором *Соболєва s-го порядку* інтегрованих у ступені 2 (класів еквівалентних) 1-періодичних функцій на $(0,1)^n$.

7. Слабкі розв'язки основних крайових задач.

B7.1. Нехай $X, Y \subset H$ є підпросторами лінійного простору H. Тоді $H = X \oplus Y$ є *прямою сумою* X і Y, якщо

$$\forall\, a \in H \quad \exists\, 1\; x_a\,,\, y_a\, : \qquad a = x_a + y_a\,, \qquad \text{де} \quad x_a \in X \quad \text{і} \quad y_a \in Y.$$

Крім того, якщо H є гільбертовим простором $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ і $X \perp Y$ (тобто $\langle x, y\rangle_H = 0$ для $x \in X, y \in Y$), тоді

$$H = X \oplus Y$$

є *прямою ортогональною сумою* X і Y.

Теорема 7.2 (про проекцію). *Нехай* $L \subset H$ *є повний підпростір гільбертового простора* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ і $a \in H$. *Тоді* $\exists\, 1\, l_a = \mathrm{Pr}_L(a)$ (*тобто* $\langle a - l_a, l\rangle_H = 0$ $\forall\, l \in L$) *і*

$$\|\, a - l_a\| \;=\; \inf_{l \in L}\, \|\, a - l\,\|\,. \qquad \lhd\; \rhd$$

З теореми 7.2 (теореми 3.10) безпосередньо витікає наступна теорема.

Теорема 7.3 (про розкладання у пряму ортогональну суму). *Нехай* $L \subset H$ *є повний підпростір гільбертового простора* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$. *Тоді*

$$H = L \oplus L^{\perp}\,,$$

де $L^{\perp} = \{h \in H\, :\, \langle h, l\rangle_H = 0 \quad \forall\, l \in L\,\}$.

$\lhd$ Дійсно, визначимо $l_a = \mathrm{Pr}_L(a) \in L$ і $h_a = a - l_a \in L^{\perp}$. Тоді $a = l_a + h_a$. $\rhd$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що

$$L^2(0,1) = \mathbf{C} \oplus \{h \in L^2(0,1)\, :\, \int_0^1 h(x)\, d\, x\, = 0\,\}.\,)$$

B7.4. Послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *слабко збіжною* до $x \in L$ (позначення $x_k \rightharpoonup x$), якщо

$$f(x_k) \to f(x) \quad \text{при} \quad k \to \infty \qquad \forall\, f \in L^* = B(L, \mathbf{C})\,.$$

Зокрема, послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ гільбертового простору $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ є *слабко збіжною* до $x \in H$, якщо

$$\langle x_k, h\rangle_H \to \langle x, h\rangle_H \quad \text{при} \quad k \to \infty \qquad \forall\, h \in H = H^* = B(H, \mathbf{C})\,.$$

Послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *сильно збіжною* до $x \in L$ (позначення $x_k \to x$), якщо

$$\|x_k - x\|_L \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty\,.$$

Теорема 7.5. *Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормований простір і $x_k \to x$. Тоді*

$$x_k \rightharpoonup x\,.$$

$\lhd$ Дійсно, для кожного $f \in L^*$ маємо

$$|f(x_k) - f(x)| = |f(x_k - x)| \le \|f\|_{L^*}\|x_k - x\|_L \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty\,. \qquad \rhd$$

Теорема 7.6 (про слабку компактність кулі). *Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є рефлексивний лінійний простір і послідовність $\{x_k\}_{m=1}^{\infty} \subset L$ така, що*

$$\|x_m\|_L \le M \quad \textit{для деякого} \quad M \in \mathbf{R}\,.$$

Тоді існують $x \in L$ і підпослідовність $\{x_{\widetilde{m}}\}_{\widetilde{m}=1}^{\infty} \subset \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L$ такі, що

$$x_{\widetilde{m}} \rightharpoonup x\,. \qquad \lhd\ \rhd$$

Ця теорема означає, що куля $B_M = \{\, x \in L \,:\, \|x\|_L \le M \,\}$ в рефлексивному лінійному просторі L є слабо компактною.

Теорема 7.7 (про сильну компактність кулі). *Нехай для деякого $M > 0$ куля B_M є сильно компактною в лінійному нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$. Тоді*

$$\dim L < \infty. \qquad \lhd\ \rhd$$

Ця теорема означає, що сильна і слабка збіжність на лінійному нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$ співпадають тільки, якщо

$$\dim L < \infty.$$

Розглянемо гільбертів простір $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ над $\mathbf{R}$. Відображення

$$a : H \times H \to \mathbf{R}, \qquad u, v \mapsto a(u,v)$$

називається *білінійною формою* на H, якщо $a(u,v)$ неперервна і лінійна по кожному з аргументів. Білінійна форма *симетрична*, якщо

$$a(u,v) = a(v,u) \qquad \forall\, u, v \in H\,.$$

Теорема 7.8. *Нехай $a(u,v)$ є білінійною формою на H і $u_m \rightharpoonup u$. Тоді*

$$a(u_m, v) \to a(u,v) \qquad \forall v \in H\,.$$

$\triangleleft$ Фіксуємо $v \in H$ і розглянемо $f_v(u) = a(u,v)$. З визначень маємо $f_v \in H^*$ і

$$f_v(u_m) = a(u_m, v) \to f_v(u) = a(u,v) \qquad \forall v \in H\,. \qquad \triangleright$$

В7.9. Білінійна форма $a(u,v)$ називається *коерцитивною* на H, якщо

$$\exists\, \alpha > 0 : \qquad a(v,v) \ge \alpha\, \|v\|_H^2 \qquad \forall\, v \in H\,.$$

З визначень виходить, що білінійна коерцитивна симетрична форма $a(u,v)$ визначає норму $\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}$ на H, еквівалентну нормі $\|v\|_H$.

Теорема 7.10 ($\exists 1$ розв'язку варіаційної рівності у гільбертовому простору). *Нехай H є сепарабельним гільбертовим простором над* $\mathbf{R}$, $a(u,v)$ *є білінійною коерцитивною формою і* $f \in H^*$. *Тоді* $\exists 1\ u \in H$:

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in H\,. \tag{7.1}$$

Крім того, відображення $f \mapsto u$ є ліпшицевим, тобто, якщо $u, \tilde{u} \in H$ розв'язки задачі (7.1), *відповідні $f, \tilde{f} \in H^*$, тоді*

$$\|u - \tilde{u}\|_H \le (1/\alpha)\|f - \tilde{f}\|_{H^*}\,. \tag{7.2}$$

$\triangleleft$ Доведемо спочатку нерівність (7.2). Нехай $u, \tilde{u} \in H$ розв'язки задачі (7.1), відповідні $f, \tilde{f} \in H^*$, тобто

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle \qquad \forall\, v \in H,$$

$$-\,a(\tilde{u},\tilde{v}) = -\,\langle \tilde{f}, \tilde{v}\rangle \qquad \forall\, \tilde{v} \in H.$$

Вибираючи $v = u - \tilde{u}$ у першому рівнянні, $\tilde{v} = u - \tilde{u}$ у другому рівнянні і складаючи ці рівняння, отримуємо

$$a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) = \langle f - \tilde{f}, u - \tilde{u} \rangle\,.$$

Враховуючи умову коерцитивності, маємо

$$\alpha\, \|u - \tilde{u}\|_H^2 \le \|f - \tilde{f}\|_{H^*} \|u - \tilde{u}\|_H.$$

Звідки слідує (7.2) і, крім того, єдиність розв'язку (7.1) (якщо цей розв'язок існує).

H є сепарабельним гільбертовим простором. Тому існують лінійно незалежні $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ такі, що простір

$$\widetilde{H} = \{\, v \in H \,:\, v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i\,, \quad \forall\, \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad \forall\, m \in \mathbf{N} \,\}$$

є щільним в H.

Фіксуємо ціле $m > 0$ і визначимо скінченновимірний лінійний простір

$$H_m = \{\, v \in H \,:\, v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i\,, \quad \alpha_i \in \mathbf{R} \,\}\,.$$

Розглянемо наступну задачу : знайти $u_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^m w_i \in H_m$ таке, що

$$a(u_m, v) = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in H_m\,. \tag{7.3}$$

Така задача (7.3) еквівалентна системі m рівнянь

$$a(u_m, w_j) = \langle f, w_j \rangle\,, \qquad j = 1, \ldots, m\,,$$

для m компонент α_i^m вектора $u_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^m w_i$, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^m a(w_i, w_j) = \langle f, w_j \rangle\,, \qquad j = 1, \ldots, m\,. \tag{7.4}$$

Припустимо, що існують $\beta_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots n$ такі, що

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i a(w_i, w_j) = 0\,, \qquad j = 1, \ldots, m\,,$$

тоді

$$\sum_{i,j=1}^{m} \beta_i a(w_i, w_j)\beta_j = 0\,,$$

тобто

$$a(\sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j) = 0\,.$$

Таким чином, $\sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i = 0$ і тому $\beta_i = 0$, $i = 1, \ldots m$, оскільки w_i, $i = 1, \ldots m$ лінійно незалежні.

Отже, система рівнянь (7.4) має розв'язок і $\exists 1\ u_m \in H_m$:

$$a(u_m, v) = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in H_m\,.$$

Крім того, вибираючи $v = u_m$, отримуємо

$$\alpha\|u_m\|_H^2 \le a(u_m, u_m) = \langle f, u_m\rangle \le \|f\|_{H^*}\|u_m\|_H,$$

тобто

$$\|u_m\|_H \le (1/\alpha)\|f\|_{H^*} \le M.$$

Тому існують $u \in H$ і $\{u_{\widetilde{m}}\}_{\widetilde{m}=1}^{\infty} \subset \{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ (теореми 7.6 і 7.8) такі, що

$$a(u_{\widetilde{m}}, v) \to a(u, v) \qquad \forall v \in H_m \subset H,$$

тобто

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in H_m, \quad \forall\, m.$$

Залишається скористатися щільністю $\widetilde{H}$ в H. $\triangleright$

Теорема 7.11 (про еквівалентність варіаційної рівності і задачі мінімізації). *Нехай* H *є сепарабельним гільбертовим простором над* $\mathbf{R}$, $a(u, v)$ *є білінійною симетричною коерцитивною формою і* $f \in H^*$. *Тоді задача*

$$\text{знайти} \quad u \in H : \qquad a(u, v) = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in H \tag{7.1}$$

еквівалентна наступній задачі мінімізації

$$\text{знайти} \quad u \in H : \qquad E(v) \ge E(u) \qquad \forall v \in H, \tag{7.5}$$

де

$$E(v) = \|v\|_a^2 - 2\,\langle f, v\rangle = a(v, v) - 2\,\langle f, v\rangle.$$

$\triangleleft$ $(\Rightarrow)$ Нехай $u \in H$ розв'язок задачі (7.1). Тоді $\|u-v\|_a^2 \geq 0 \quad \forall\, v \in H$ і тому

$$\|u\|_a^2 + \|v\|_a^2 - 2\,a(u,v) \geq 0,$$

тобто

$$a(v,v) - 2\,\langle f, v\rangle \geq -\|u\|_a^2.$$

Звідки слідує (7.5), оскільки $-\|u\|_a^2 = a(u,u) - 2\,\langle f, u\rangle$ в силу (7.1). $\quad (\Rightarrow) \triangleright$

$\triangleleft$ $(\Leftarrow)$ Нехай $u \in H$ розв'язок задачі (7.5). Тоді для $\alpha \geq 0$ і $v \in H$ маємо

$$E(u+\alpha\, v) \geq E(u),$$

тобто $\alpha = 0$ реалізує мінімум функції $\Psi(\alpha) = E(u+\alpha\, v)$. Отже

$$\left.\frac{d\Psi(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \geq 0$$

де, наприклад,

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{a(u+\alpha\, v, u+\alpha\, v) - a(u,u)}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{a(u+\alpha\, v, u+\alpha\, v) - a(u+\alpha\, v, u) + a(u+\alpha\, v, u) - a(u,u)}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{a(u+\alpha\, v, \alpha\, v) + a(u, \alpha\, v)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} a(u+\alpha\, v, v) + a(u,v) = 2\,a(u,v).$$

Таким чином

$$2\,a(u,v) \geq 2\,\langle f, v\rangle.$$

Розглядаючи аналогічно функцію $\widetilde{\Psi}(\alpha) = E(u-\alpha\, v)$, отримуємо

$$2\,a(u,v) \leq 2\,\langle f, v\rangle. \qquad (\Leftarrow) \triangleright$$

Приклад 7.12 (задача Діріхле для рівняння Пуассона). Нехай Ω є областю в $\mathbf{R}^n$ і $H = H_0^1(\Omega)$. Тоді

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, d\,x$$

є білінійною симетричною коерцитивною формою на $H_0^1(\Omega)$.

Таким чином, для $f \in L^2(\Omega)$ задача мінімізації

$$\text{знайти} \quad u \in H_0^1(\Omega) \ : \qquad E(v) \geq E(u) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

де

$$E(v) = \int\limits_{\Omega} (\nabla v, \nabla v)\, d\, x - 2 \int\limits_{\Omega} f\, v\, d\, x,$$

еквівалентна задачі Дірихле для рівняння Пуассона

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega),$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega).$$

Приклад 7.13 (задача Дірихле для дивергентного рівняння). Нехай Ω є областю в $\mathbf{R}^n$, $H = H_0^1(\Omega)$ і симетрична матриця $A(x) \in \widetilde{L}^\infty(\Omega)^{n\times n}$ така, що $\alpha I \leq A(x)$ для $x \in \Omega$ і деякого $\alpha > 0$. Тоді

$$a(u, v) = \int\limits_{\Omega} (A(x)\nabla u(x), \nabla v(x))\, d\, x$$

є білінійною симетричною коерцитивною формою на $H_0^1(\Omega)$.

Таким чином, для $f \in H^{-1}(\Omega)$ задача (7.1) еквівалентна задачі Дірихле для дивергентного рівняння

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega),$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega).$$

Приклад 7.14 (задача Дірихле для рівняння із перенесенням). Нехай Ω є областю, $H = H_0^1(\Omega)$ і вектор $B(x) \in \widetilde{L}^\infty(\Omega)^n$ такий, що $\operatorname{div} B(x) = 0$. Тоді

$$a(u, v) = \int\limits_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x))\, d\, x + \int\limits_{\Omega} (B(x) \cdot \nabla u(x))\, v(x)\, d\, x$$

є білінійною коерцитивною формою на $H_0^1(\Omega)$, де

$$B(x) \cdot \nabla u(x) = B_1(x) \frac{\partial\, u(x)}{\partial x_1} + \ldots + B_n(x) \frac{\partial\, u(x)}{\partial x_n}\,.$$

$\triangleleft$ Перевіримо коерцитивність $a(u,v)$. Маємо

$$\int_{\Omega}(B(x)\cdot\nabla v(x))\,v(x)\,d\,x\;=\int_{\Omega}(B(x)\,v(x),\nabla v(x))\,d\,x\;=$$

$$=-\int_{\Omega}(\mathrm{div}(B(x)\,v(x))v(x)\,d\,x\;=-\int_{\Omega}(B(x)\cdot\nabla v(x))\,v(x)\,d\,x,$$

оскільки $\mathrm{div}(B(x)\,v(x))=\mathrm{div}(B(x))\,v(x)+B(x)\cdot\nabla v(x)$, тобто

$$a(v,v)=\int_{\Omega}(\nabla v(x),\nabla v(x))\,d\,x. \qquad \triangleright$$

Таким чином, для $f\in H^{-1}(\Omega)$ задача (7.1) еквівалентна задачі Діріхле для рівняння із перенесенням

$$-\Delta u\,+\,B(x)\cdot\nabla u=f\quad\text{в}\quad H^{-1}(\Omega),$$

$$u=0\quad\text{на}\quad\partial\Omega\quad\text{в}\quad H^{1}(\Omega).$$

8. Формула інтегрування частинами.

Теорема 8.1 ($\exists 1$ розв'язку варіаційної рівності у гільбертовому простору). *Нехай H є сепарабельним гільбертовим простором над $\mathbf{R}$, $a(u,v)$ є білінійною коерцитивною формою і $f \in H^*$. Тоді $\exists 1\ u \in H$:*

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in H\,. \qquad \lhd\ \S 7\ \rhd \tag{8.1}$$

Теорема 8.2 (про еквівалентність варіаційної рівності і задачі мінімізації). *Нехай H є гільбертовим простором над $\mathbf{R}$, $a(u,v)$ є білінійною симетричною коерцитивною формою і $f \in H^*$. Тоді задача* (8.1) *еквівалентна наступній задачі мінімізації*

$$\textit{знайти} \quad u \in H \ : \qquad E(v) \geq E(u) \qquad \forall v \in H, \tag{8.2}$$

де $\quad E(v) = \|v\|_a^2 - 2\,\langle f, v\rangle = a(v,v) - 2\,\langle f, v\rangle. \quad \lhd\ \S 7\ \rhd$

Теорема 8.3 (про еквівалентність варіаційної рівності і нерівності). *Нехай H є гільбертовим простором над $\mathbf{R}$, $a(u,v)$ є білінійною коерцитивною формою і $f \in H^*$. Тоді задача* (8.1) *еквівалентна задачі*

$$\textit{знайти} \quad u \in H \ : \qquad a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \qquad \forall\, v \in H, \tag{8.3}$$

яка еквівалентна задачі

$$\textit{знайти} \quad u \in H \ : \qquad a(v, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \qquad \forall\, v \in H. \tag{8.4}$$

$\lhd$ Наприклад, вибираючи $v = u - w$ і $v = u + w$ в (8.3), де $w \in H$, отримуємо

$$-a(u,w) \geq -\langle f, w\rangle \quad \text{і} \quad a(u,w) \geq \langle f, w\rangle \qquad \forall\, w \in H,$$

тобто з (8.3) $\Rightarrow$ (8.1). Вибираючи $v = w - u$ в (8.1), де $w \in H$, отримуємо

$$a(u, w-u) = \langle f, w-u\rangle \qquad \forall w \in H,$$

тобто задача (8.1) еквівалентна задачі (8.3). $\rhd$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що задача (8.3) еквівалентна задачі (8.4).)

У відмінності від задачі (8.1) для варіаційного рівняння, задачу мінімізації (8.2) та задачі (8.3) і (8.4) можна розглядати з обмеженнями на рішення, наприклад, вимагаючи щоб рішення $u \geq 0$. Точне формулювання, наприклад, для задачі (8.2) наступне.

Приклад 8.4. Нехай Ω є областю, $H = H_0^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ і

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : \quad v \geq 0 \text{ в } \Omega\} \subset H_0^1(\Omega).$$

Для $f \in L^2(\Omega)$ розглянемо задачу мінімізації

$$\text{знайти} \quad u \in K : \qquad E(v) \geq E(u) \qquad \forall v \in K, \tag{8.5}$$

де

$$E(v) = \int_\Omega (\nabla v, \nabla v)\, d\,x - 2 \int_\Omega f\, v\, d\,x.$$

Теорема 8.5. $\exists\, 1\, u \in K$ *розв'язок задачі* (8.5), *яка еквівалентна задачі*

$$\textit{знайти} \quad u \in K : \quad \int_\Omega (\nabla u, \nabla(v-u))\, d\,x \geq \int_\Omega f(v-u)\, d\,x \quad \forall\, v \in K, \tag{8.6}$$

яка еквівалентна також наступній задачі: знайти

$$u \in K : \int_\Omega (\nabla v, \nabla(v-u))\, d\,x \geq \int_\Omega f(v-u)\, d\,x \quad \forall\, v \in K. \quad \triangleleft \text{ §7, Теор. 8.8 і 9.2 } \triangleright$$

Приклад 8.6. Задача (8.6) називається *варіаційною нерівністю з перешкодою.* Якщо $u \in C^2(\overline{\Omega})$, тоді ця задача еквівалентна задачі: знайти $u \in K$:

$$-\Delta u = f \quad \text{в } \Omega_1, \qquad u = 0 \quad \text{в } \Omega_0,$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1,$$

де $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ є нормаллю до $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1$,

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}, \quad \Omega_0 = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + \nu_n \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

$\triangleleft$ Нехай $u \in K$ задовольняє (8.6) $\forall\, v \in K$ і $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$. Тоді знайдеться $\alpha \in \mathbf{R}$ таке, що $u(x) \geq \alpha > 0$ при $x \in \operatorname{supp} \varphi$. Продовжуючи φ нулем на Ω_0, маємо

$$v = u \pm \varepsilon\varphi \geq 0 \quad \text{в } \Omega$$

при $0 < \varepsilon < \alpha\, [\, \max |\varphi(x)|\,]^{-1}$, тобто $v \in K$.

Вибираючи таке $v \in K$ в (8.6), отримуємо

$$\pm\,\varepsilon \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla \varphi)\, d\,x \;\geq \pm\,\varepsilon \int\limits_\Omega f \varphi\, d\,x \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$$

або

$$\int\limits_\Omega (-\Delta u - f)\, \varphi\, d\,x \;= 0 \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)\,,$$

тобто

$$-\Delta u = f \quad \text{в } \Omega_1, \qquad u = 0 \quad \text{в } \Omega_0. \qquad \triangleright$$

Для лінійного нормованого простору X і $a, b \in X$, множина

$$[a, b] = \{\, \alpha\, a \,+ (1 - \alpha)\, b \;:\; 0 \leq \alpha \leq 1\,\}$$

називається *відрізком,* що сполучає a і b.

B8.7. Множина $K \subset X$ називається *опуклою*, якщо

$$[a, b] \subset K \qquad \forall\, a, b \in K\,.$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Нехай $\varphi \in H^1(\Omega)$ така, що $\varphi \leq 0$ на $\partial\Omega$ і

$$K = \{ v \in H_0^1(\Omega) \;:\quad v \geq \varphi \;\text{ в }\; \Omega\, \} \;\subset\; H_0^1(\Omega)\,.$$

Перевірити, що K є повним і опуклим.)

Нехай H є гільбертів простір. Кожен лінійний неперервний оператор $A : H \to H^*$ визначає білінійну форму

$$a(u, v) = \langle Au, v\rangle \qquad \forall\, u, v \in H. \tag{8.7}$$

Дійсно, білінійність $a(u, v)$ виходить з лінійності A і білінійності $\langle\cdot,\cdot\rangle$, а неперервність з нерівності

$$|\, a(u, v)\,| = |\langle Au, v\rangle| \leq \|Au\|_{H^*} \|v\|_H \leq \|A\|_{B(H,H^*)} \|u\|_H \|v\|_H.$$

З іншого боку, якщо задана білінійна форма $a(u,v)$ на H, тоді для кожного $u \in H$ відображення

$$v \mapsto a(u,v) \qquad \text{для} \quad v \in H,$$

визначає лінійний неперервний функціонал на H. Тому існує лінійний оператор $A : H \to H^*$, такий що виконана рівність (8.7).

Теорема 8.8. ($\exists\,1$ розв'язку варіаційної нерівності у гільбертовому просторі). *Нехай K є повною опуклою підмножиною гільбертового простору H, $f \in H^*$ і $a(u,v)$ є білінійною коерцитивною формою на H. Тоді*

$$\exists\ 1\ u \in K : \qquad a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall\, v \in K\,. \tag{8.8}$$

Крім того, відображення $f \mapsto u$ є ліпшицевим, тобто, якщо $u, \tilde{u} \in H$ розв'язки варіаційної нерівності (v), відповідні $f, \tilde{f} \in H^*$, тоді

$$\|u - \tilde{u}\|_H \leq (1/\alpha)\|f - \tilde{f}\|_{H^*}\,. \tag{8.9}$$

$\triangleleft$ Доведемо спочатку нерівність (8.9). Нехай $u, \tilde{u} \in H$ розв'язки варіаційної нерівності (8.8), відповідні $f, \tilde{f} \in H^*$, тобто

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall\, v \in K\,,$$

$$a(\tilde{u}, \tilde{v}-\tilde{u}) \geq \langle \tilde{f}, \tilde{v}-\tilde{u} \rangle \qquad \forall\, \tilde{v} \in K\,.$$

Обираючи $v = \tilde{u}$ в першій нерівності, $\tilde{v} = u$ в другій нерівності і складаючи ці нерівності, отримуємо

$$a(u-\tilde{u}, u-\tilde{u}) \leq \langle f - \tilde{f}, u - \tilde{u} \rangle\,.$$

Враховуючи умову коерцитивності, маємо

$$\alpha\, \|u-\tilde{u}\|_H^2 \leq \|f - \tilde{f}\|_{H^*} \|u - \tilde{u}\|_H.$$

Звідки слідує (8.9) і, крім того, єдиність розв'язку варіаційної нерівності (8.8) (якщо цей розв'язок існує). Далі, ототожнюємо H і H^*.

Доведення існування розв'язку ґрунтується на наступних лемах.

Лема 8.9 (про проекцію на опуклу множину) *Нехай K є повною опуклою підмножиною H. Тоді для кожного $w \in H$*

$$\exists 1 \ \mathrm{Pr}_K(w) \in K \ : \quad \| \, w - \mathrm{Pr}_K(w) \, \|_H = \inf_{v \in K} \| \, w - v \, \|_H \, .$$

Крім того, проекція $\mathrm{Pr}_K(w)$ елементу $w \in H$ на K характеризується нерівністю

$$\langle w - \mathrm{Pr}_K(w), v - \mathrm{Pr}_K(w) \rangle \leq 0 \qquad \forall v \in K \tag{8.10}$$

і задовольняє оцінці $\|\mathrm{Pr}_K(v) - \mathrm{Pr}_K(w)\|_H \leq \|v - w\|_H$.

⊲⊲ Доведення цієї леми є аналогічним доведенню теореми 3.10. ⊳⊳

Лема 8.10. *Нехай K є повною опуклою підмножиною H і $a(u,v)$ є білінійною коерцитивною формою на H. Тоді $u \in K$ є розв'язком задачі* (8.8)

$$\Leftrightarrow \qquad u = \mathrm{Pr}_K(u - \gamma(Au - f)) \, , \tag{8.11}$$

де $\gamma > 0$ і оператор $A : H \to H$ такий, що $a(u,v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall \, u, v \in H$.

Таким чином, $u \in K$ є нерухомою точкою оператора

$$Bu = \mathrm{Pr}_K(u - \gamma(Au - f)) \, . \tag{8.12}$$

⊲⊲ Визначимо $w = u - \gamma(Au - f)$. В силу (8.10) співвідношення (8.11) еквівалентно тому, що $u \in K$ і

$$\langle (u - \gamma(Au - f)) - u, v - u \rangle \leq 0 \qquad \forall v \in K,$$

тобто $u \in K$ розв'язок варіаційної нерівності (8.8), оскільки $\gamma > 0$. ⊳⊳

Для доведення теореми 8.8 відмітимо, що

$$\|Av - Aw\|_H \leq M \, \|v - w\|_H \qquad \text{і} \qquad - \langle Av - Aw, v - w \rangle \leq -\alpha \, \|v - w\|_H^2 \, ,$$

де $M = \|A\|_{B(H,H)}$. Тому, враховуючи що $\|\mathrm{Pr}_K(v) - \mathrm{Pr}_K(w)\|_H \leq \|v - w\|_H$, маємо

$$\|Bv - Bw\|_H^2 \leq \|v - \gamma(Av - f) - w + \gamma(Aw - f)\|_H^2 =$$

$$= \|v - w - \gamma(Av - Aw)\|_H^2 =$$

$$= \|v - w\|_H^2 - 2\gamma\langle v - w, Av - Aw\rangle + \gamma^2\|Av - Aw\|_H^2 \le$$

$$\le \|v - w\|_H^2 - 2\gamma\,\alpha\,\|v - w\|_H^2 + \gamma^2 M^2\|v - w\|_H^2 =$$

$$= (1 - 2\gamma\,\alpha + \gamma^2 M^2)\|v - w\|_H^2\,,$$

де B визначено співвідношенням (8.12). Таким чином, якщо

$$0 < \gamma < 2\,\alpha/M^2\,,$$

тоді оператор B є стискаючим з постійною стиснення

$$\sqrt{(1 - 2\gamma\,\alpha + \gamma^2 M^2)} < 1$$

і теорема 8.8 витікає з теореми про стискаючі відображення. $\triangleright$

У формулу інтегрування частинами на області Ω входить інтеграл по межі $\partial\Omega$. Тому перш ніж привести цю формулу слід визначити інтеграл по межі. Для цього корисно нагадати і уточнити умови на межу областей що розглядаються.

В8.11. Область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ має *ліпшицеву межу* $\partial\Omega$, якщо $\partial\Omega$ є компактною і для кожного $x \in \partial\Omega$ існує відкрита множина $U \subset \mathbf{R}^n$, $x \in U$ і взаємно однозначне відображення $\psi\,:\,B = \{\,y \in \mathbf{R}^n\,:\,|y| < 1\,\} \to U$ такі, що

$$\psi \in \mathrm{Lip}(\overline{B}), \qquad \psi^{-1} \in \mathrm{Lip}(\overline{U}),$$

$$\psi(B_+) = U \cap \Omega, \quad \psi(B_-) = U \cap (\mathbf{R} \setminus \overline{\Omega}), \quad \psi(B_0) = U \cap \partial\Omega,$$

де $B_+ = \{\,y \in B\,:\,y_n > 0\,\}$, $B_- = \{\,y \in B\,:\,y_n < 0\,\}$ і $B_0 = \{\,y \in B\,:\,y_n = 0\,\}$.

Через компактність $\partial\Omega$, це визначення еквівалентне наступному.

В8.12. Область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ має *ліпшицеву межу*, якщо існують ціле $K > 0$, відкриті кулі $\Omega_k = \{\,x \in \mathbf{R}^n\,:\,|x| < \varrho_k\,\}$ радіусу $\varrho_k > 0$ при $k = 1, \ldots, K$ і взаємно однозначні відображення $\psi_k : B \to \Omega_k$, $k = 1, \ldots, K$ такі, що

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{K} \Omega_k, \qquad \psi_k \in \mathrm{Lip}(\overline{B}), \qquad \psi_k^{-1} \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega_k}),$$

$$\psi_k(B_+) = \Omega_k \cap \Omega, \quad \psi_k(B_-) = \Omega_k \cap (\mathbf{R} \setminus \overline{\Omega}), \quad \psi_k(B_0) = \Omega_k \cap \partial\Omega \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, K.$$

З цього визначення слідують наступні два твердження.

Теорема 8.13 (про локальні координати). *Існують функції* $\omega_k(x') \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega'_k})$ *для* $k = 1, \ldots, K$ *такі, що*

$$\Omega_k \cap \partial\Omega = \{\, x = (x', x_n) : \, x_n = \omega_k(x'), \;\; x' \in \Omega'_k \,\}$$

$$\Omega_k \subset \{\, x = (x', x_n) : \, \omega_k(x') - \varrho_k < x_n < \omega_k(x') + \varrho_k, \, x' \in \Omega'_k \} \quad \textit{при} \quad k = 1, \ldots, K$$

де $\Omega'_k = \{\, x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1} : \, |x'| < \varrho_k \,\}$, ϱ_k *і* Ω_k *визначені в* B8.12. $\triangleleft \; \triangleright$

Теорема 8.14 (про розбиття одиниці). *Існують функції* $\varphi_k(x) \in C_0^\infty(\Omega_k)$, $k = 0, 1, \ldots, K$, *які визначені на* $\cup_{k=0}^K \Omega_k$ *і такі, що*

$$\sum_{k=0}^{K} \varphi_k(x) = 1 \quad \textit{і} \quad 0 \leq \varphi_k(x) \leq 1 \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega,$$

де $\Omega_0 = \Omega$ *і* Ω_k, $k = 1, \ldots, K$ *визначені в* B8.12. (*Таким чином* $\overline{\Omega} \subset \cup_{k=0}^K \Omega_k$). $\triangleleft \; \triangleright$

Використовуючи теореми 8.13 і 8.14 інтеграл від функції $f \in C^0(\partial\Omega)$ по межі $\partial\Omega$ можна визначити рівністю

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(x)\, d\, s = \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\partial\Omega} f(x)\, \varphi_k(x)\, d\, s \; =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\Omega'_k} f(x', \omega_k(x'))\, \varphi_k(x', \omega_k(x')) \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \omega_k(x')}{\partial x'_i} \right)^2 \right)^{1/2} d\, x',$$

де інтеграли по Ω'_k визначені, оскільки обчислюються по кулі (яка є областю) $\Omega'_k = \{\, x' \in \mathbf{R}^{n-1} : \, |x'| < \varrho_k \,\}$ і відомо, що $\nabla_{x'} \omega_k(x') \in \widetilde{L}^\infty(\Omega'_k)$ при $k = 1, \ldots, K$. Відомо і безпосередньо перевіряється також, що це визначення інтеграла по межі не залежить від вибору локальних координат і розбиття одиниці.

На лінійному просторі $C^0(\partial\Omega)$ можна задати норми

$$\|f\|_{L^p(\partial\Omega)} = \left(\int\limits_{\partial\Omega} |f(x)|^p \, d\, s \right)^{1/p} \qquad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$\|f\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\partial\Omega)}$ для $f \in C^0(\partial\Omega)$ і визначити банахів простір $L^p(\partial\Omega)$ як поповнення $C^0(\partial\Omega)$ по відповідній нормі $\|f\|_{L^p(\partial\Omega)}$.

Розглянемо $u \in C^1(\overline{\Omega})^n$ і $v \in C^1(\overline{\Omega})$, тоді виконана наступна формула інтегрування частинами Стоксу (Гауса-Остроградського-Гріна-Рімана)

$$\int_\Omega (u, \nabla v)\, d\,x + \int_\Omega (\operatorname{div} u)\, v\, d\,x = \int_{\partial\Omega} (\nu, u)\, v\, d\,s, \tag{8.13}$$

де $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ є нормаллю до $\partial\Omega$ і, наприклад, $(u,\nabla v) = u_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \ldots + u_n \frac{\partial v}{\partial x_n}$.

Зокрема, якщо $u = \nabla w$ для $w \in C^2(\overline{\Omega})$, тоді

$$\int_\Omega (\nabla w, \nabla v)\, d\,x + \int_\Omega (\Delta\, w)\, v\, d\,x = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right) v\, d\,s. \tag{8.14}$$

Наприклад, для $n = 1$, $u \in C^1[0,1]$ і $v \in C^1[0,1]$, отримуємо

$$\int_0^1 u\, v'_x\, d\,x + \int_0^1 u'_x\, v\, d\,x = u(1)\, v(1) - u(0)\, v(0) \quad \text{і} \quad \int_0^1 u'_x\, d\,x = u(1) - u(0).$$

Безпосередньо з визначень виходить, що для $u \in C^1(\overline{\Omega})^n$, $w \in C^2(\overline{\Omega})$ і $v \in H_0^1(\Omega)$ формули (8.13) і (8.14) мають вигляд

$$\int_\Omega (u, \nabla v)\, d\,x + \int_\Omega (\operatorname{div} u)\, v\, d\,x = 0, \qquad \int_\Omega (\nabla w, \nabla v)\, d\,x + \int_\Omega (\Delta\, w)\, v\, d\,x = 0.$$

Розглянемо для $u, v \in H^1(\Omega)$ білінійну форму

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, d\,x.$$

Ця форма не є коерцитивною ($\exists\, \alpha > 0 \,:\, a(v,v) \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}$) при $v = 1$.

З теореми 7.3 витікає, що

$$H^1(\Omega) = \mathbf{R} \oplus H_*^1(\Omega),$$

де

$$H_*^1(\Omega) = \mathbf{R}^\perp = \{v \in H^1(\Omega)\colon \langle v, l\rangle_{H^1(\Omega)} = 0 \;\forall\, l \in \mathbf{R}\} = \{v \in H^1(\Omega)\colon \int_\Omega v\, d\,x = 0\},$$

оскільки $\langle v, l\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (\nabla v, \nabla l)\, d\,x + \int_\Omega v\, l\, d\,x = l \left(\int_\Omega v\, d\,x\right) \quad \forall\, l \in \mathbf{R}$.

Аналогічно, з теореми 7.3 витікає, що

$$L^2(\Omega) = \mathbf{R} \oplus L_*^2(\Omega),$$

де $L_*^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \,:\, \int_\Omega v\, d\,x = 0\}$.

Теорема 8.15 (нерівність Пуанкаре). *Нехай* $u \in H^1_*(\Omega)$. *Тоді існує постійна* $C = C(\Omega)$ *така, що*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}\,. \qquad \triangleleft \ \triangleright$$

Доведення цієї нерівності аналогічно доведенню нерівності Фрідріхса (§ 5).

З нерівності Пуанкаре виходить, що норми $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ і $\|\cdot\|_{H^1_*(\Omega)} = \|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)^n}$ є еквівалентними на $H^1_*(\Omega)$, тобто $H^1_*(\Omega)$ можна розглядати з скалярним добутком

$$(u, v)_{H^1_*(\Omega)} = \int\limits_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))\, d\,x$$

і білінійна форма $a(u, v) = \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, d\,x$ є коерцитивною на $H^1_*(\Omega)$.

Таким чином, для $f \in L^2_*(\Omega)$ з теореми 8.1 витікає наступне твердження.

Теорема 8.16 ($\exists 1$ слабкого розв'язку задачі Неймана для рівняння Пуассона). *Нехай* $f \in L^2_*(\Omega)$. *Тоді* $\exists 1$ *розв'язок задачі*

$$\text{знайти} \quad u \in H^1_*(\Omega): \quad \int\limits_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))\, d\,x = \int\limits_\Omega f(x)\, v(x)\, d\,x \qquad \forall\, v \in H^1_*(\Omega),$$

яка еквівалентна задачі

$$\text{знайти} \ u \in H^1_*(\Omega): \int\limits_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x)) d\,x = \int\limits_\Omega f(x) v(x) d\,x \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{8.15}$$

Якщо $u \in C^2(\overline{\Omega})$, тоді задача (8.15) еквівалентна задачі: знайти $u \in H^1_*(\Omega)$:

$$-\Delta u = f \qquad \text{в} \quad \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

яка називається однорідною *задачею Неймана* для *рівняння Пуассона.*

$\triangleleft$ Використовуючи (8.14) і (8.15), отримуємо

$$0 = \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, d\,x - \int\limits_\Omega f\, v\, d\,x = \int\limits_\Omega (-\Delta\, u - f)\, v\, d\,x + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) v\, d\,s \quad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Звідки при $v \in C_0^\infty(\Omega)$ маємо $-\Delta\, u = f$. Таким чином, при $v = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ виводимо, що

$$0 = \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\,s. \qquad \triangleright$$

Нехай функція $a(x) \in \widetilde{L}^{\infty}(\partial\Omega)$ така, що $a(x) \geq \alpha > 0$ для деякого $\alpha \in \mathbf{R}_{+}$. Розглянемо для $u, v \in H^1(\Omega)$ білінійну форму

$$b(u,v) = \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla v)\, d\, x + \int\limits_{\partial\Omega} a\, u\, v\, d\, s.$$

Буде доведено, що ця форма визначена і є коерцитивною на $H^1(\Omega)$.

Таким чином, для $f \in L^2(\Omega)$ з теореми 8.1 витікає наступне твердження.

Теорема 8.17 ($\exists 1$ слабкого розв'язку змішаної задачі для рівняння Пуассона). *Нехай* $f \in L^2(\Omega)$. *Тоді* $\exists 1$ *розв'язок задачі*

$$\text{знайти } u \in H^1(\Omega) : \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla v)\, d\, x + \int\limits_{\partial\Omega} a\, u\, v\, d\, s = \int\limits_{\Omega} f\, v\, d\, x \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \quad (8.16)$$

Якщо $u \in C^2(\overline{\Omega})$, тоді задача (8.16) еквівалентна задачі: знайти $u \in H^1(\Omega)$:

$$-\Delta u = f \qquad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + a\, u = 0 \qquad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

яка називається однорідною *змішаною задачею* для *рівняння Пуассона.*

$\triangleleft$ Використовуючи (8.14) і (8.16), отримуємо

$$0 = \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla v)\, d\, x - \int\limits_{\Omega} f\, v\, d\, x + \int\limits_{\partial\Omega} a\, u\, v\, d\, s =$$

$$= \int\limits_{\Omega} (-\Delta\, u - f)\, v\, d\, x + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + a\, u \right) v\, d\, s \quad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Звідки $-\Delta\, u = f$ при $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Таким чином, при $v = \frac{\partial u}{\partial \nu} + a\, u$ маємо

$$0 = \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + a\, u \right)^2 d\, s. \qquad \triangleright$$

Нехай $H^1_{per}((0,1)^n)$ є простір Соболєва першого порядку інтегрованих у ступені 2 (класів еквівалентних) 1-періодичних функцій на $(0,1)^n$ із значеннями в $\mathbf{C}$. За визначенням

$$H^1_{per}((0,1)^n) = \{\, u(x) = \sum_{m \in Z^n} \phi_m\, e^{(x,m)\, 2\pi\, i} \; : \quad \sum_{m \in Z^n} (1 + |2\pi m|^2) |\phi_m|^2 < \infty \,\}\,.$$

Таким чином

$$H^1_{per}((0,1)^n) = \mathbf{C} \oplus H^1_{pe*}((0,1)^n) \qquad \text{і} \qquad L^2((0,1)^n) = \mathbf{C} \oplus L^2_*((0,1)^n)\,,$$

де, наприклад, за визначенням

$$H^1_{pe*}((0,1)^n) = \{\, u(x) = \sum_{m\in Z^n} \phi_m\, e^{(x,m)\,2\pi\, i} \in H^1_{per}((0,1)^n) \;:\; \phi_0 = 0 \,\}\,.$$

Теорема 8.18 (нерівність Пуанкаре для 1-періодичних функцій). *Нехай* $u \in H^1_{pe*}((0,1)^n)$. *Тоді*

$$\|u\|_{L^2((0,1)^n)} \le \|\nabla u\|_{L^2((0,1)^n)^n}\,.$$

$\lhd$ Для $u = \sum_{m\in Z^n} \phi_m\, e^{(x,m)\,2\pi\, i}\Big|_{\phi_0=0} \in H^1_{pe*}((0,1)^n)$ маємо

$$\|u\|_{L^2((0,1)^n)} = \sum_{m\in Z^n} |\phi_m|^2\Big|_{\phi_0=0} \qquad \text{і} \qquad \|\nabla u\|_{L^2((0,1)^n)^n} = \sum_{m\in Z^n} |2\pi m|^2 |\phi_m|^2\Big|_{\phi_0=0}\,,$$

оскільки

$$\nabla u(x) = \sum_{m\in Z^n} (2\pi m\, i)\, \phi_m\, e^{(x,m)\,2\pi\, i}\Big|_{\phi_0=0}.$$

Таким чином, нерівність Пуанкаре для 1-періодичних функцій слідує з очевидної нерівності

$$|\phi_m|^2 \le |2\pi m|^2 |\phi_m|^2 \qquad \text{для} \qquad m \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}. \qquad \rhd$$

З нерівності Пуанкаре виходить, що норми $\|\cdot\|_{H^1_{per}((0,1)^n)}$ і $\|\cdot\|_{H^1_{pe*}((0,1)^n)} = \|\nabla(\cdot)\|_{L^2((0,1)^n)^n}$ є еквівалентними на $H^1_{pe*}(\Omega)$, тобто $H^1_{pe*}(\Omega)$ можна розглядати з скалярним добутком

$$(u,v)_{H^1_{pe*}((0,1)^n)} = \int_{(0,1)^n} (\nabla u(x), \nabla \overline{v(x)})\, d\,x\,.$$

Таким чином, для $f \in L^2_*((0,1)^n)$ з теореми Рісса витікає наступне твердження.

Теорема 8.19 ($\exists\, 1$ слабкого розв'язку 1-періодичної задачі для рівняння Пуассона). *Нехай* $f \in L^2_*((0,1)^n)$. *Тоді* $\exists\, 1$ *розв'язок задачі: знайти* $u \in H^1_{pe*}((0,1)^n)$:

$$\int_{(0,1)^n} (\nabla u(x), \nabla \overline{v(x)})\, d\,x \;=\; \int_{(0,1)^n} f(x)\, \overline{v(x)}\, d\,x \qquad \forall\, v \in H^1_{pe*}((0,1)^n),$$

яка еквівалентна задачі: знайти $u \in H^1_{pe*}((0,1)^n)$:

$$\int\limits_{(0,1)^n} (\nabla u(x), \nabla \overline{v(x)})\, d\,x = \int\limits_{(0,1)^n} f(x)\, \overline{v(x)}\, d\,x \qquad \forall\, v \in H^1_{per}((0,1)^n). \tag{8.17}$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що для $u \in C^2([0,1]^n)$ задача (8.17) еквівалентна задачі : знайти $u \in H^1_{pe*}((0,1)^n)$:

$$-\Delta u = f \qquad \text{в} \quad (0,1)^n,$$

$$u(x)|_{x_k=0} = u(x)|_{x_k=1} \qquad \text{і} \qquad \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right|_{x_k=0} = \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right|_{x_k=1} \qquad \text{при} \qquad k = 1, \ldots, n,$$

яка називається *1-періодичною задачею* для *рівняння Пуассона.*)

9. Теореми вкладення. Теореми про компактність.

Теорема 9.1. *Нехай K є повною опуклою підмножиною гільбертового простору H, $f \in H^*$ і $a(u,v)$ є білінійною коерцитивною формою на H. Тоді*

$$\exists\, 1\; u \in K: \qquad a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall\, v \in K\,.$$

Крім того, відображення $f \mapsto u$ є ліпшицевим, тобто, якщо $u, \tilde{u} \in H$ розв'язки варіаційної нерівності (v), відповідні $f, \tilde{f} \in H^*$, тоді

$$\|u - \tilde{u}\|_H \leq (1/\alpha)\|f - \tilde{f}\|_{H^*}\,. \tag{9.1}$$

Теорема 9.2 (Мінті). *Нехай K є повною опуклою підмножиною гільбертового простору H, $f \in H^*$ і $a(u,v)$ є білінійною коерцитивною формою на H. Тоді задача*

$$\textit{знайти}\quad u \in K: \qquad a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall\, v \in K \tag{9.2}$$

еквівалентна задачі

$$\textit{знайти}\quad u \in K: \qquad a(v, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall\, v \in K. \tag{9.3}$$

$\lhd$ Існує лінійний оператор $A : H \to H^*$ такий, що виконана рівність

$$a(u,v) = \langle A(u), v \rangle \qquad \forall\, u, v \in H.$$

$\lhd(\Rightarrow)$ Нехай $u \in K$ задовольняє (9.2) $\forall\, v \in K$, тоді

$$\langle A(v), v-u \rangle = \langle A(u), v-u \rangle + \langle A(v) - A(u), v-u \rangle.$$

Використовуючи умову коерцитивності, отримуємо

$$\langle A(v), v-u \rangle \geq \langle A(u), v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall\, v \in K,$$

тобто $u \in K$ задовольняє (9.3) $\forall\, v \in K$. $\qquad (\Rightarrow)\rhd$

$\lhd(\Rightarrow)$ Нехай $u \in K$ задовольняє (9.3) $\forall\, v \in K$. Фіксуємо $w \in K$, $t \in [0,1]$ і візьмемо $v = (1-t)u + tw = u + t(w-u)$ в (9.3), тоді

$$\langle A(v), v-u \rangle = \langle A(u + t(w-u)), t(w-u) \rangle =$$

$$= t\langle A(u + t(w-u)), w-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle = t\langle f, w-u \rangle.$$

Таким чином, при $t > 0$ маємо

$$\langle A(u + t(w - u)), w - u\rangle \geq \langle f, w - u\rangle \qquad \forall\, w \in K$$

і обчислюючи $\lim_{t\to 0+}$ отримуємо, що $u \in K$ задовольняє (9.2) $\forall\, w \in K$. $(\Rightarrow)\triangleright$

У задачі (9.3) зручно переходити до границі, наприклад, якщо розглядається послідовність розв'язків $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$ така, що

$$u_m \rightharpoonup u,$$

тоді для переходу до границі в (9.3) можна скористатися таким твердженням.

Теорема 9.3. *Нехай* $a(u, v)$ *є білінійною формою на* H *і* $u_m \rightharpoonup u$. *Тоді*

$$a(v, u_m) \to a(v, u) \qquad \forall v \in H. \qquad\qquad \triangleleft\ \S\, 7\ \triangleright$$

Проте, проблема переходу до границі в (9.3) стає складніше, коли і $f \in H^*$ залежить від $m \in \mathbf{N}$, тобто розглядається послідовність $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H^*$ в (9.3).

Приклад 9.4. Нехай задана послідовність $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H^*$ така, що

$$f_m \to f.$$

Тоді визначена послідовність $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$ як множина розв'язків задачі

$$\textit{знайти} \quad u_m \in K\ : \qquad a(v, v - u_m) \geq \langle f_m, v - u_m\rangle \qquad \forall\, v \in K \qquad (9.3_m)$$

для кожного $m \in \mathbf{N}$ і з (9.1) відразу витікає, що

$$u_m \to u,$$

де $u \in K$ розв'язок задачі (9.3).

Приклад 9.5. Нехай задана послідовність $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H^*$ така, що

$$f_m \rightharpoonup f \qquad \text{в} \qquad H^*. \qquad (9.4)$$

Тоді визначена послідовність $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$ через (9.3_m) і $\|f_m\|_{H^*} \leq C$ для деякої постійної C. Але з (9.1) витікає тільки, що

$$\|u_m\|_H \leq M$$

для деякої постійної M і тому знайдуться $u \in H$ та підпослідовність $\{u_{\widetilde{m}}\}_{\widetilde{m}=1}^{\infty} \subset \{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$ такі, що

$$u_{\widetilde{m}} \rightharpoonup u \qquad \text{в} \qquad H. \tag{9.5}$$

Останнього співвідношення не вистачає для переходу до границі в $(9.3_{\widetilde{m}})$, тобто не відомо розв'язком якої задачі є u.

Для вирішення цієї проблеми часто використовуються теореми про компактність. У відповідності з такими теоремами існує гільбертів простір V такий, що $H \subset V \subset H^*$ і з (9.5) витікає, що

$$u_{\widetilde{m}} \to u \qquad \text{в} \qquad V. \tag{9.6}$$

Останнього співвідношення і припущення (що уточнює (9.4))

$$f_m \rightharpoonup f \qquad \text{в} \qquad V \tag{9.7}$$

вже досить для переходу до границі в $(9.3_{\widetilde{m}})$ через наступне твердження.

Теорема 9.6. *Нехай* $b(u, v)$ *є білінійною формою на* H, $v_m \to v$ *і* $u_m \rightharpoonup u$ *в* H. *Тоді*

$$b(v_m, u_m) \to b(v, u).$$

$\triangleleft$ Існує $B \in B(H, H^*)$ такий, що $b(v, u) = \langle Bv, u\rangle$ для $v, u \in H$ і тому

$$|b(v_m - v, u_m)| = |\langle B(v_m - v), u_m\rangle| \leq \|B\|_{B(H,H^*)}\|v_m - v\|_H\|u_m\|_H \to 0,$$

оскільки $\|u_m\|_H \leq C$ для деякої постійної C. Отже, через теорему 9.3 маємо

$$b(v_m, u_m) = b(v_m - v, u_m) + b(v, u_m) \to b(v, u). \qquad \triangleright$$

Таким чином, використовуючи цю теорему для $b(f_m, u_m) = \langle f_m, u_m\rangle$, з $(9.3)_{\widetilde{m}}$ та (9.5)–(9.7) отримуємо, що

$$u_{\widetilde{m}} \to u \qquad \text{в} \qquad V,$$

де $u \in K$ розв'язок задачі (9.3). Тому

$$u_m \to u \quad \text{в} \quad V \qquad \text{і} \qquad u_m \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad H,$$

оскільки границя і розв'язок $u \in K$ задачі (9.3) є визначеними однозначно.

Прикладом теореми про компактність є наступне твердження.

Теорема 9.7 (Релліха-Кондрашова про компактність). *Нехай* $C > 0$ *і послідовність* $\{v_s\}_{s=1}^{\infty} \subset H^1(\Omega)$ *така, що*

$$\|v_s\|_{H^1(\Omega)} \leq C \qquad \forall\ s.$$

Тоді $\exists\, v \in H^1(\Omega)$ *і підпослідовність* $\{v_{\widetilde{s}}\}_{\widetilde{s}=1}^{\infty} \subset \{v_s\}_{s=1}^{\infty}$ *такі, що*

$$v_{\widetilde{s}} \rightharpoonup v \quad \text{в} \quad H^1(\Omega),$$

$$v_{\widetilde{s}} \to v \quad \text{в} \quad L^2(\Omega). \qquad \lhd\ \rhd$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Розглянемо послідовність

$$f_m = \sin(2\pi\, m\, x_1) \cdot \ldots \cdot \sin(2\pi\, m\, x_n).$$

Перевірити, що для кожної області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ виконано співвідношення

$$f_m \rightharpoonup 0 \qquad \text{в} \qquad L^2(\Omega).)$$

Приклад 9.8. Нехай $\varphi \in H^1(\Omega)$ така, що $\varphi \leq 0$ на $\partial\Omega$ і

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : \quad v \geq \varphi \ \text{ в } \ \Omega\} \subset H_0^1(\Omega)\,.$$

Розглянемо варіаційну нерівність з перешкодою

$$\text{знайти} \quad u \in K : \quad \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla(v-u))\, dx \geq \int_{\Omega} f(v-u)\, dx \quad \forall\, v \in K. \tag{9.8}$$

Нехай $f \in L^2(\Omega)$ залежить від $m \in \mathbf{N}$, тобто розглядається послідовність $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ в (9.8) і

$$f_m \rightharpoonup f \qquad \text{в} \qquad L^2(\Omega).$$

Тоді, для послідовності розв'язків задачі (9.8), з теорем 9.6 і 9.7 витікає, що

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega) \qquad \text{і} \qquad u_m \to u \quad \text{в} \quad L^2(\Omega),$$

де $u \in K$ розв'язок задачі (9.8).

Розглянемо функцію $u \in C^1[0,1]$. З формули Стоксу отримуємо

$$u(0) = -\int_0^x u'_\tau(\tau)\,d\tau + u(x). \tag{9.9}$$

Використовуючи нерівність $(\alpha+\beta)^2 \le 2\,\alpha^2 + 2\,\beta^2$ ($\Leftrightarrow 2\alpha\beta \le \alpha^2+\beta^2 \Leftrightarrow 0 \le (\alpha-\beta)^2$), маємо

$$u^2(0) \le 2\left(\int_0^x u'_\tau(\tau)\,d\tau\right)^2 + 2\,u^2(x).$$

З нерівності Гельдера виходить, що

$$\left|\int_0^x u'_\tau(\tau)\,d\tau\right| \le \left(\int_0^x (u'_\tau(\tau))^2\,d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^x 1\,d\tau\right)^{1/2} \le \left(\int_0^1 (u'_\tau(\tau))^2\,d\tau\right)^{1/2}.$$

Таким чином, інтегруючи передостанню нерівність, отримуємо

$$u^2(0) \le 2\int_0^1 (u'_\tau(\tau))^2\,d\tau + 2\int_0^1 u^2(\tau)\,d\tau = 2\,\|u\|^2_{H^1(0,1)},$$

тобто

$$|u(0)| \le \sqrt{2}\,\|u\|_{H^1(0,1)}.$$

Ця нерівність означає, що оператор обчислення значення функції

$$u \mapsto u(0) = u|_{x=0}$$

є обмеженим як оператор з $C^1[0,1]$ в $L^2(0) = \mathbf{R}$. Цей оператор називається *оператором сліду* і є визначеним як оператор з $H^1(0,1)$ в $L^2(0)$ через теорему про продовження операторів по неперервності. Такий оператор позначається

$$\mathrm{Tr}|_{x=0} \,:\, H^1(0,1) \,\to\, L^2(0).$$

Необхідно підкреслити, що для $u \in L^2(0,1)$ визначення оператора сліду не має сенсу і що $H^1(0,1) = \{v \in L^2(0.1) \,:\, v'_x \in L^2(0,1)\,\}$.

Аналогічно з (9.9) витікає, що для кожного $\alpha \in [0,1]$ оператор сліду

$$u \mapsto u(\alpha) = u|_{x=\alpha}$$

є визначеним як оператор з $H^1(0,1)$ в $L^2(\alpha)$. Такий оператор позначається $\mathrm{Tr}|_{x=\alpha}$.

Крім того, з (9.9) витікає, що для $u \in H^1(0,1)$ і $\alpha, \beta, \sigma \in [0,1]$ таких, що $0 \le \alpha + \sigma \le 1$ і $0 \le \beta - \sigma \le 1$ виконані нерівності

$$|\,u(\alpha+\sigma)-u(\alpha)\,|^2 \le \int\limits_{\alpha}^{\alpha+\sigma} (u'_\tau(\tau))^2\,d\,\tau, \quad |\,u(\beta)-u(\beta-\sigma)\,|^2 \le \int\limits_{\beta-\sigma}^{\beta} (u'_\tau(\tau))^2\,d\,\tau. \tag{9.10}$$

Для інтеграла Лебега по області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ виконано наступне твердження.

Теорема 9.9 (про абсолютну неперервність інтеграла Лебега). *Нехай* $f \in L^1(\Omega)$. *Тоді* $\forall\,\varepsilon > 0$ *існує* $\delta > 0$ *таке що*

$$\left|\int\limits_{\omega} f(x)\,d\,x\right| < \varepsilon \qquad \textit{при} \qquad \mathrm{mes}\,(\omega) = \int\limits_{\omega} d\,x < \delta$$

для кожного вимірного $\omega \subset \Omega$. $\lhd\ \rhd$

З цієї теореми і нерівностей (9.10) відразу виходить наступне твердження.

Теорема 9.10 (вкладення $H^1(0,1) \subset C^0[0,1]$). *Нехай* $v \in H^1(0,1)$. *Тоді*

$$v \in C^0[0,1],$$

тобто $H^1(0,1) \subset C^0[0,1]$ *у сенсі, що існує постійна* C *така, що для кожного* $v \in H^1(0,1)$ *існує (єдиний) представник* $\tilde{v}$ *класу* v *такий, що*

$$\|\tilde{v}\|_{C^0[0,1]} \le C\,\|v\|_{H^1(0,1)} \qquad (\textit{неперервність вкладення}).$$

Теорема вкладення для області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ формулюється таким чином.

Теорема 9.11 (Соболєва про вкладення). *Нехай* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *є областю,* $1 \le p < \infty$ *і ціле* m *таке, що*

$$m > \frac{n}{p}\,.$$

Тоді для цілого l *виконані неперервні вкладення*

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}) \qquad \textit{і} \qquad W^{m+l,p}(\Omega) \subset C^l(\overline{\Omega}) \qquad \textit{при} \qquad l \ge 0.$$

Зокрема $H^2(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ *при* $n = 2, 3$ *і* $H^1(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ *при* $n = 1$. $\lhd\ \rhd$

Насправді, вкладення $W^{m,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ в цій теоремі є не тільки неперервним, але і компактним в наступному сенсі.

Теорема 9.12 (Соболєва про компактність). *Нехай виконані умови теореми 9.11,* $C > 0$ *і послідовність* $\{v_s\}_{s=1}^{\infty} \subset W^{m,p}(\Omega)$ *така, що*

$$\|v_s\|_{W^{m,p}(\Omega)} \le C \qquad \forall\ s.$$

Тоді $\exists\, v \in W^{m,p}(\Omega)$ *і підпослідовність* $\{v_{\widetilde{s}}\}_{\widetilde{s}=1}^{\infty} \subset \{v_s\}_{s=1}^{\infty}$ *такі, що*

$$v_{\widetilde{s}} \rightharpoonup v \quad \text{в} \quad W^{m,p}(\Omega),$$

$$v_{\widetilde{s}} \to v \quad \text{в} \quad C^0(\overline{\Omega}). \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

Теорема 9.13 (про регулярність розв'язків задачі Діріхле для рівняння Пуассона). *Нехай ціле* $m \ge 0$, $\partial\Omega$ *має клас* C^{m+2}, $f \in H^{-1}(\Omega)$ *і* $u \in H_0^1(\Omega)$ *розв'язок задачі*

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega), \tag{9.11}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega).$$

Тоді

$$f \in H^m(\Omega) \quad \Rightarrow \quad u \in H^{m+2}(\Omega) \qquad (\text{ де } H^0(\Omega) = L^2(\Omega)\,). \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

З цієї теореми і теореми Соболєва відразу виходить наступне твердження.

Теорема 9.14 (про класичний розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона). *Нехай ціле* m *таке, що*

$$m > \frac{n}{2}\ ,$$

$\partial\Omega$ *має клас* C^{m+2}, $f \in H^m(\Omega)$ *і* $u \in H_0^1(\Omega)$ *розв'язок задачі (9.11). Тоді*

$$f \in C^0(\overline{\Omega}) \qquad i \qquad u \in C^2(\overline{\Omega}). \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

Відзначимо, що при виконанні умов цієї теореми виконані строгі вкладення

$$C^m(\overline{\Omega}) \subset H^m(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}).$$

Повернемося до (9.9). З цієї формули маємо

$$\int_0^1 u^2(\tau)\,d\,\tau \le 2\int_0^1 (u'_\tau(\tau))^2\,d\,\tau + 2\,u^2(0)$$

і

$$\|u\|^2_{H^1(0,1)} \le 3\int_0^1 (u'_\tau(\tau))^2\,d\,\tau + 2\,u^2(0) \le 3\int_0^1 (u'_\tau(\tau))^2\,d\,\tau + 3\,u^2(0) + 3\,u^2(1).$$

Ця нерівність означає, що білінійна форма

$$b(u,v) = \int_0^1 u'_\tau(\tau)\,v'_\tau(\tau)\,d\,\tau + \int_{\partial[0,1]} u(s)\,v(s)\,d\,s$$

є коерцитивною на $H^1(0,1)$ (дійсно, $(1/3)\|v\|^2_{H^1(0,1)} \le b(v,v)$). Отже, білінійна форма (8.16) також є коерцитивною на $H^1(0,1)$, оскільки

$$\alpha\int_{\partial[0,1]} u(s)^2\,d\,s \le \int_{\partial[0,1]} a(s)\,u(s)^2\,d\,s,$$

де $a(s) \ge \alpha > 0$ для деякого $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

У загальному випадку коерцитивність білінійної форми в (8.16) слідує з наступних двох теорем.

Теорема 9.15 (про оператор сліду). *Нехай* $v \in C^1(\overline{\Omega})$. *Тоді існує постійна* $C = C(\Omega)$ *така, що*

$$\int_{\partial\Omega} |v|^2 d\,s = \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\,\|v\|_{H^1(\Omega)}\,. \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

Ця теорема означає, що оператор обчислення значення функції

$$v \mapsto v|_{\partial\Omega}$$

є обмеженим як оператор з $C^1(\overline{\Omega})$ в $L^2(\partial\Omega)$. Цей оператор називається *оператором сліду* і є визначеним як оператор з $H^1(\Omega)$ в $L^2(\partial\Omega)$ через теорему про продовження операторів по неперервності. Такий оператор позначається

$$\mathrm{Tr}|_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega).$$

Зокрема, $\mathrm{Tr}|_{\partial\Omega}(H_0^1(\Omega)) = \theta \in L^2(\partial\Omega)$.

Теорема 9.16 (про еквівалентність норм на $H^1(\Omega)$). *Нехай* $v \in H^1(\Omega)$. *Тоді існують постійні* α, β *такі, що*

$$\alpha \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 d\,x + \int\limits_{\partial\Omega} |v|^2 d\,s \right)^{1/2} \leq \beta \|v\|_{H^1(\Omega)}. \qquad \triangleleft \ \triangleright$$

Нагадаємо, що за визначенням

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 d\,x + \int\limits_{\Omega} |v|^2 d\,x.$$

В9.17. Визначимо $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ як образ оператора сліду :

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \mathrm{Tr}|_{\partial\Omega}(H^1(\Omega)) = \{\, v \in L^2(\partial\Omega) \ : \ \exists\, \tilde{v} \in H^1(\Omega) \ : \ \ v = \mathrm{Tr}|_{\partial\Omega}(\tilde{v}) \,\}.$$

Нехай $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Розглянемо задачу : знайти $u \in H^1(\Omega)$:

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega), \tag{9.12}$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^{1/2}(\partial\Omega).$$

За визначенням існує $\tilde{\varphi} \in H^1(\Omega)$ таке, що

$$\varphi = \tilde{\varphi}|_{\partial\Omega}$$

і задачу (9.12) можна переписати у вигляді : знайти $u \in H^1(\Omega)$:

$$-\Delta(u - \tilde{\varphi}) = f + \mathrm{div}\,(\nabla\tilde{\varphi}) \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega), \tag{9.13}$$

$$(u - \tilde{\varphi}) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Вже відомо (§ 5), що $\exists\, 1$ розв'язок $(u - \tilde{\varphi}) \in H_0^1(\Omega)$ цієї задачі. Однак цій розв'язок може бути залежним від вибору продовження $\tilde{\varphi} \in H^1(\Omega)$ такого, що $\varphi = \tilde{\varphi}|_{\partial\Omega}$. Нехай $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \in H^1(\Omega)$ є такими продовженнями, що $\varphi = \tilde{\varphi}_1|_{\partial\Omega} = \tilde{\varphi}_2|_{\partial\Omega}$ та u_1, u_2 є відповідними цім продовженням розв'язки задачі (9.13). Тоді маємо, що $\tilde{u} = u_1 - u_2 \in H^1(\Omega)$ є розв'язком задачі

$$-\Delta\tilde{u} = 0 \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega),$$

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^{1/2}(\partial\Omega)$$

і тому $u_1 = u_2$.

Таким чином доведено, що $\exists 1$ розв'язок $u \in H^1(\Omega)$ задачі (9.12) і безпосередньо перевіряється, що такий розв'язок задовольняє нерівності

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u-\widetilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega)} + \|\widetilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + C\,\|\widetilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega)} \tag{9.14}$$

для деякої постійної $C > 0$.

Інфінум по всіх $\widetilde{\varphi} \in H^1(\Omega)\ :\ \varphi = \widetilde{\varphi}|_{\partial\Omega}$ можна вибрати в якості норми функції $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$:

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{\widetilde{\varphi}\in H^1(\Omega)\,:\,\varphi=\widetilde{\varphi}|_{\partial\Omega}} \|\widetilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Відомо, що нормований простір $(H^{1/2}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)})$ є банаховім, а спряжений простір до $H^{1/2}(\partial\Omega)$ позначається

$$H^{-1/2}(\partial\Omega) = H^{1/2}(\partial\Omega)^*.$$

Звідки та (9.14) маємо, що розв'язок $u \in H^1(\Omega)$ задачі (9.12) задовольняє нерівності

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\,\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)})$$

для деякої постійної $C > 0$.

10. Основні задачі

Задача Діріхле для рівняння Пуассона: знайти $u = u(x)$:

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

де $f(x)$ задана функція на Ω і $\varphi(x)$ – функція на $\partial\Omega$.

Задача Діріхле для дивергентного рівняння: знайти $u = u(x)$:

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

де симетрична матриця $A(x) \in \widetilde{L}^\infty(\Omega)^{n\times n}$ така, що $\alpha I \le A(x)$ для $x \in \Omega$ і деякого $\alpha > 0$, $f(x)$ – функція на Ω и $\varphi(x)$ – функція на $\partial\Omega$.

Задача Діріхле для рівняння з перенесенням: знайти $u = u(x)$:

$$-\Delta u + B(x)\cdot\nabla u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

де вектор-функція $B(x) \in \widetilde{L}^\infty(\Omega)^n$ така, що $\operatorname{div} B(x) = 0$, $f(x)$ – функція на Ω і $\varphi(x)$ – функція на $\partial\Omega$.

Задача Діріхле для *загального дивергентного* рівняння: знайти $u = u(x)$:

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + B(x)\cdot\nabla u + \operatorname{div}(b(x)\,u) + c(x)\,u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

де $A(x) = \{\, a_{ij}\,\}_{i,j=1}^n$ – матриця-функція на Ω, $B(x), b(x)$ – вектор-функція на Ω, $c(x)$ – функція на Ω, $f(x)$ – функція на Ω и $\varphi(x)$ – функція на $\partial\Omega$. У координатному записі це рівняння має вигляд

$$-\sum_{i,j=1}^n \partial_i\,(a_{ij}(x)\partial_j u) + \sum_{i=1}^n B_i(x)\,\partial_i u + \sum_{i=1}^n \partial_i\,(b_i(x)\,u) + c(x)\,u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $B(x) = (B_1(x), \dots, B_n(x))$, $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$ і $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Початково-краєва задача (Коші-Діріхле) для *рівняння теплопровідності*: знайти $u = u(x,t)$:

$$u'_t - \Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $f(x,t)$ задана функція на $\Omega \times (0,T)$, $\varphi(x,t)$ – функція на $\partial\Omega \times (0,T)$ і $u_0(x)$ – функція на Ω. Якщо в цієї задачі замінити оператора Лапласа на загального дивергентного оператора, тоді отримаємо початково-краєву задачу для рівняння Колмогорова-Фоккера-Планка.

Початково-краєва задача для *рівняння Шредінгера*: знайти $u = u(x,t)$:

$$i\,u'_t - \Delta u + c(x)\,u = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \qquad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $f(x,t)$ – функція на $\Omega \times (0,T)$, $\varphi(x,t)$ – функція на $\partial\Omega \times (0,T)$ і $u_0(x)$ – функція на Ω.

Початково-краєва задача для N-електронних *рівняння Шредінгера*: знайти $u = (u_1(x^1,\ldots,x^N,t),\ldots,u_N(x^1,\ldots,x^N,t))$:

$$i(u_1)'_t - \Delta_1 u_1 + c^{11}(x^1,\ldots,x^N)u_1 + \ldots + c^{1N}(x^1,\ldots,x^N)u_N = f_1 \quad \text{в} \quad \Omega^N \times (0,T),$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$i(u_N)'_t - \Delta_N u_N + c^{N1}(x^1,\ldots,x^N)u_1 + \ldots + c^{NN}(x^1,\ldots,x^N)u_N = f_N \quad \text{в} \quad \Omega^N \times (0,T),$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega^N \times (0,T), \qquad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega^N,$$

де $f = (f_1(x^1,\ldots,x^N,t),\ldots,f_N(x^1,\ldots,x^N,t))$ – вектор-функція на $\Omega^N \times (0,T)$ і $u_0(x^1,\ldots,x^N) = (u_1^0(x^1,\ldots,x^N),\ldots,u_N^0(x^1,\ldots,x^N))$ – вектор-функція на Ω^N.

Початково-краєва задача для *хвилевого рівняння*: знайти $u = u(x,t)$:

$$u''_{tt} - \Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $f(x,t)$ – функція на $\Omega \times (0,T)$, $\varphi(x,t)$ – функція на $\partial\Omega \times (0,T)$ і $u_0(x), u_1(x)$ – функції на Ω.

Задача Діріхле для (системи) *рівнянь Ламє* (теорії пружності): знайти $u = (u_1(x), \dots, u_n(x))$:

$$-\mu\,\Delta u + (\mu + \lambda)\nabla(\operatorname{div} u) = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

де $f(x)$ задана вектор-функція на Ω і $\varphi(x)$ – вектор-функція на $\partial\Omega$.

Початково-краєва задача для еволюційних *рівнянь Ламє* (теорії пружності) : знайти $u = (u_1(x,t), \dots, u_n(x,t))$:

$$u''_{tt} - \mu\,\Delta u + (\mu + \lambda)\nabla(\operatorname{div} u) = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $f(x,t)$ – вектор-функція на $\Omega \times (0,T)$, $\varphi(x,t)$ – вектор-функція на $\partial\Omega \times (0,T)$ і $u_0(x), u_1(x)$ – вектор-функції на Ω. Ця задача для неоднорідних матеріалів має наступний вигляд:

$$u''_{tt} - \operatorname{div}(\,\mu(x)\nabla u) + \nabla((\mu(x) + \lambda(x))\operatorname{div} u) = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $\mu(x), \lambda(x)$ – функції на Ω.

Початково-краєва задача для еволюційних *рівнянь Максвела*: знайти $E = (E_1(x,t), \dots, E_n(x,t)), B = (B_1(x,t), \dots, B_n(x,t))$:

$$E'_t - \operatorname{rot} B = F \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$B'_t + \operatorname{rot} E = G \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{div} B = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$[B,\nu] = \varphi_b, \qquad (E,\nu) = \varphi_e \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T),$$

$$E|_{t=0} = E_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad B|_{t=0} = B_0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $F(x,t), G(x,t)$ – вектор-функції на $\Omega \times (0,T)$, $\varphi_b(x,t)$ – вектор-функція на $\partial\Omega \times (0,T)$, $\varphi_e(x,t)$ – функція на $\partial\Omega \times (0,T)$, $E_0(x), B_0(x)$ – вектор-функції на Ω, $[\cdot,\nu]$ і $(\cdot,\nu)$ позначають векторний і скалярний добуток вектор-функції на зовнішню нормаль ν до межі $\partial\Omega$ і, наприклад, для $n=3$ оператор ротора визначається рівністю

$$\operatorname{rot} E = (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2,\ \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3,\ \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1).$$

Початково-краєва задача для еволюційних *рівнянь Нав'є-Стокса* (в'язкій нестискуваній рідині): знайти $(u,p) = (u_1(x,t), \dots, u_n(x,t), p(x,t))$:

$$u'_t - \mu\,\Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $f(x,t)$ – вектор-функція на $\Omega \times (0,T)$, $u_0(x)$ – вектор-функція на Ω і параметр μ називається *коефіцієнтом в'язкості*. Наприклад, для $n=3$ у координатному записі рівняння Нав'є-Стокса мають вигляд

$$(u_1)'_t - \mu\,\Delta u_1 + u_1\partial_1 u_1 + u_2\partial_2 u_1 + u_3\partial_3 u_1 + \partial_1 p = f_1 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$

$$(u_2)'_t \,-\, \mu\,\Delta u_2 \,+\, u_1\partial_1 u_2 \,+\, u_2\partial_2 u_2 \,+\, u_3\partial_3 u_2 \,+\, \partial_2 p = f_2 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$

$$(u_3)'_t \,-\, \mu\,\Delta u_3 \,+\, u_1\partial_1 u_3 \,+\, u_2\partial_2 u_3 \,+\, u_3\partial_3 u_3 \,+\, \partial_3 p = f_3 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$

$$\partial_1 u_1 \,+\, \partial_2 u_2 \,+\, \partial_3 u_3 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T).$$

Коли коефіцієнт в'язкості є рівним нулю (або є "дуже маленьким"), тоді розглядається початково-краєва задача для *рівнянь Ейлера* (ідеальної нестискуваній рідини): знайти $(u,p) = (u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t),p(x,t))$:

$$u'_t \,+\, u\cdot\nabla\, u \,+\, \nabla\, p = f \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$

$$(u,\nu) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\times(0,T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $f(x,t)$ – вектор-функція на $\Omega\times(0,T)$ и $u_0(x)$ – вектор-функція на Ω.

Рівняння гідродинаміки (газодинаміці - нев'язкої нестискуваній рідини) : знайти $(\varrho,u,E) = (\varrho(x,t),u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t),E(x,t))$:

$$\varrho'_t \,+\, \operatorname{div}(\varrho\, u) = 0,$$

$$(\varrho\, u)'_t \,+\, \operatorname{div}(\varrho\, u\otimes u) \,+\, \nabla\, p = f,$$

$$(\varrho\, E)'_t \,+\, \operatorname{div}(\varrho\, E\, u) \,+\, \operatorname{div}(p\, u) = 0,$$

де $p = p(\varrho,E)$ визначає *рівняння стану* і $u\otimes u \,=\, \{\, u_i u_j \,\}_{i,j=1}^n$.

Розглянемо для $n = 1$ і $\Omega = \mathbf{R}$ початково-краєву задачу для хвилевого рівняння: знайти $u = u(x,t)$:

$$u''_{tt} \,-\, a^2 u''_{xx} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,\infty),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $u_0(x), u_1(x)$ задані функції на Ω і постійна a визначає "швидкість" розповсюдження хвиль.

Розв'язок цієї задачі представляється наступною формулою Даламбера

$$u(x,t) = \frac{u_0(\,x + a\,t) + u_0(\,x - a\,t)}{2} \; + \frac{1}{2\,a} \int\limits_{x-a\,t}^{x+a\,t} u_1(\tau)\,d\,\tau.$$

Цю формулу можна переписати в наступному вигляді

$$u(x,t) = \frac{u_0(\,x + a\,t) + u_0(\,x - a\,t)}{2} \; + \frac{U(\,x + a\,t) - U(\,x - a\,t)}{2\,a}\,,$$

де $U'_x = u_1(x)$. Зокрема при $u_1 = 0$ ці формули моделюють розповсюдження двох хвиль $(1/2)u_0(\,x + a\,t)$ і $(1/2)u_0(\,x - a\,t)$, що мають швидкості a і $-a$.

Нехай фіксовані банахів простір B і число $T > 0$. Розглянемо множину неперервних відображень

$$v\,:\,[0,T] \to B.$$

Ця множина позначається через $C^0([0,T];B)$ і є лінійним нормованим простором з нормою

$$\|v\|_{C^0([0,T];B)} = \max_{0\le t\le T} \|\,v(t)\,\|_B.$$

На просторі $C^0([0,T];B)$ можливо також задати норми

$$\|v\|_{L^p((0,T);B)} = \left(\int\limits_0^T \|\,v(\tau)\,\|_B^p \;d\,\tau \right)^{1/p} \qquad \text{при} \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|v\|_{L^\infty((0,T);B)} = \lim_{p\to\infty} \|v\|_{L^p((0,T);B)} \qquad \text{для} \qquad v \in C^0([0,T];B).$$

Визначимо банахів простір $L^p((0,T);B)$ як поповнення $C^0([0,T];B)$ по відповідній нормі та позначимо

$$\widetilde{L}^\infty((0,T);B) = \{\, v \in L^1((0,T);B)\,:\,\|v\|_{L^\infty((0,T);B)} < \infty \,\}.$$

Нехай Ω є областю в $\mathbf{R}^n$. Розглянемо початково-краєву задачу для рівняння теплопровідності: знайти $u = u(x,t)$:

$$u'_t \,-\, \Delta u \,=\, f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T), \tag{10.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \qquad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Помножимо скалярно перше рівняння в (10.1) на функцію $v \in C_0^\infty(\Omega)$, проінтегруємо отриману рівність по Ω і по частинам. Тоді

$$\int\limits_\Omega u_t' \, v \, dx + \int\limits_\Omega (\nabla u \, , \nabla v) \, dx = \int\limits_\Omega f \, v \, dx. \tag{10.2}$$

Слабким розв'язком задачі (10.1) називається елемент

$$u \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$$

такий, що $u_t' \in L^2((0,T); H^{-1}(\Omega))$, $u|_{t=0} = u_0$ в $L^2(\Omega)$ і виконана інтегральна тотожність (10.2) для будь-якої функції $v \in C_0^\infty(\Omega)$ і майже всіх $t \in (0,T)$.

Теорема 10.1 (Ліонса про вкладення). *Нехай* $u \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$ *і* $u_t' \in L^2((0,T); H^{-1}(\Omega))$. *Тоді* $u \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ *і*

$$\left(\int\limits_\Omega u^2 \, dx \right)_t' = 2 \int\limits_\Omega u_t' \, u \, dx. \qquad \lhd \, \rhd$$

Теорема10.2 (про існування слабкого розв'язку початково-краєвої задачі для рівняння теплопровідності). *Нехай* $f \in L^2((0,T); L^2(\Omega))$ *і* $u_0 \in L^2(\Omega)$. *Тоді існує єдиний слабкий розв'язок* $u \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$ *задачі (10.1),*

$$u \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$$

і для майже всіх $t \in (0,T)$ *виконана енергетична рівність*

$$\int\limits_\Omega \frac{u^2}{2} \, dx + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f \, u \, dx \, d\tau + \int\limits_\Omega \frac{u_0^2}{2} \, dx \, .$$

$\lhd$ Простір $H_0^1(\Omega)$ є сепарабельним. Тому знайдуться лінійно незалежні елементи $\{w_i\}_{i=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ такі, що множина

$$\widetilde{H} = \{ \, v \in H_0^1(\Omega) \, : \, v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i \, , \quad \forall \, \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad \forall \, m \in \mathbf{N} \, \}$$

є щільною в $H_0^1(\Omega)$.

Фіксуємо ціле $m > 0$ і визначимо скінченновимірний простір

$$H_m = \{ \, v \in H_0^1(\Omega) \, : \, v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i \, , \quad \alpha_i \in \mathbf{R} \, \} \, .$$

Розглянемо наступну задачу : знайти $u_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}(t) w_i$ таке, що

$$\int\limits_{\Omega} u_m'\, w_j\, dx + \int\limits_{\Omega} (\nabla u_m, \nabla w_j)\, dx = \int\limits_{\Omega} f(t)\, w_j\, dx, \qquad t \in (0,T), \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{10.3}$$

$$u_m|_{t=0} = \mathrm{Pr}_{H_m}(u_0).$$

Ця задача є задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь щодо функцій $\alpha_{1m}(t), \ldots, \alpha_{mm}(t)$:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\int\limits_{\Omega} w_i\, w_j\, dx \right) \alpha_{im}'(t) + \sum_{i=1}^{m} \left(\int\limits_{\Omega} (\nabla w_i, \nabla w_j)\, dx \right) \alpha_{im}(t) = \int\limits_{\Omega} f(t)\, w_j\, dx$$

$$t \in (0,T), \qquad j = 1, \ldots, m,$$

$$u_m|_{t=0} = \mathrm{Pr}_{H_m}(u_0).$$

Така задача має єдине рішення, оскільки матриця $\int\limits_{\Omega} w_i\, w_j\, dx$ має обернену (§ 7).

Помножимо рівняння цієї задачі на $\alpha_{jm}(t)$ і підсумуємо по $j = 1, \ldots, m$, отримуємо

$$\int\limits_{\Omega} u_m'(t)\, u_m(t)\, dx + \int\limits_{\Omega} (\nabla u_m(t)\, , \nabla u_m(t))\, dx = \int\limits_{\Omega} f(t)\, u_m(t)\, dx.$$

З цієї рівності виходить, що

$$\left(\|u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)_t' + 2\, \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} = 2 \int\limits_{\Omega} f(t)\, u_m(t)\, dx \le$$

$$\le 2\, \|f(t)\|_{L^2(\Omega)^n} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \le \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + C\, \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Інтегруючи цю нерівність по $t \in (0,s)$, маємо

$$\|u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int\limits_0^s \|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\, dt \le$$

$$\le \|\mathrm{Pr}_{H_m}(u_0)\|^2_{L^2(\Omega)} + C \int\limits_0^s \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt.$$

Таким чином, для деякої постійної $M > 0$ виконані нерівності

$$\|u_m\|_{\widetilde{L}^\infty((0,T);L^2(\Omega))} + \|\nabla u_m\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega)^n)} \le M$$

і існують $u \in \widetilde{L}^{\infty}((0,T);L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ і підпослідовність

$$u_{\widetilde{m}} \in \widetilde{L}^{\infty}((0,T);L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$$

такі, що

$$u_{\widetilde{m}} \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L^2((0,T);H_0^1(\Omega)), \tag{10.4}$$

$$u_{\widetilde{m}} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{в} \quad \widetilde{L}^{\infty}((0,T);L^2(\Omega)), \tag{10.5}$$

де за визначенням $u_{\widetilde{m}} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ в $\widetilde{L}^{\infty}((0,T);L^2(\Omega))$, якщо $u_{\widetilde{m}}, u \in \widetilde{L}^{\infty}((0,T);L^2(\Omega))$ і

$$\int_0^T\int_\Omega u_m(t,x)\,\psi(t,x)\,dxdt \to \int_0^T\int_\Omega u(t,x)\,\psi(t,x)\,dxdt \quad \text{для} \quad \psi \in L^1((0,T);L^2(\Omega)).$$

Помножимо рівняння (10.3) на функцію $\varphi \in C^1[0,T]$ таку що $\varphi(T) = 0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0,T]$ і по частинам. Тоді

$$\int_0^T\int_\Omega u_m(t)\varphi'(t)w_j\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega (\nabla u_m(t), \varphi(t)\nabla w_j)\,dxdt = \tag{10.6}$$

$$= \int_\Omega u_m(0)\varphi(0)w_j\,dx + \int_0^T\int_\Omega f(t)\,\varphi(t)w_j\,dxdt,$$

Співвідношень (10.4) і (10.5) досить, щоб перейти до межі в (10.6) і отримати, що

$$\int_0^T\int_\Omega u(t)\varphi'(t)v\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega (\nabla u(t), \varphi(t)\nabla v)\,dxdt = \tag{10.7}$$

$$= \int_\Omega u_0\varphi(0)v\,dx + \int_0^T\int_\Omega f(t)\varphi(t)v\,dxdt,$$

для будь-якого $v \in \widetilde{H}$ і тому для будь-якого $v \in H_0^1(\Omega)$.

З (10.7) при $\varphi \in C_0^{\infty}(0,T)$ витікає, що виконана інтегральна тотожність (10.2).

Помножимо тотожність (10.2) на функцію $\varphi \in C^1[0,T]$ таку що $\varphi(T) = 0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0,T]$ і по частинам. Тоді

$$\int_0^T\int_\Omega u(t)\varphi'(t)v\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega (\nabla u(t), \varphi(t)\nabla v)\,dxdt = \tag{10.8}$$

$$= \int_\Omega u|_{t=0}\varphi(0)v\,dx + \int_0^T\int_\Omega f(t)\varphi(t)v\,dxdt,$$

для будь-якого $v \in H_0^1(\Omega)$. Порівнюючи (10.7) і (10.8) при $\varphi(0) = 1$ отримуємо

$$\int_\Omega u|_{t=0}\,v\,dx = \int_\Omega u_0\,v\,dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Таким чином, виконана рівність $u|_{t=0} = u_0$ в $L^2(\Omega)$.

Крім того, з (10.2) витікає, що

$$\int_\Omega u'_t\,v\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx - \int_\Omega (\nabla u\,, \nabla v)\,dx.$$

З цієї рівності отримуємо, що $u'_t \in L^2((0,T); H^{-1}(\Omega))$. Дійсно,

$$\|u'_t\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}=1}\left|\int_\Omega f\,v\,dx - \int_\Omega (\nabla u\,, \nabla v)\,dx\,dx\right| \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

і тому

$$\|u'_t\|^2_{L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))} \leq C^2\int_0^T \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt < \infty\,.$$

З (10.2) при $v = u(t)$ (для майже всіх $t \in (0,T)$) також маємо

$$\left(\int_\Omega \frac{u^2}{2}\,dx\right)'_t + \int_\Omega (\nabla u\,, \nabla u)\,dx = \int_\Omega f\,u\,dx$$

і (інтегруючи) отримуємо енергетичну рівність, з якої одразу виходить єдиність слабкого розв'язку задачі (10.2). $\triangleright$

11. Початково-краєва задача для рівнянь Нав'є-Стокса

Нехай Ω є областю в $\mathbf{R}^n$. Визначимо лінійний простір

$$D(\Omega) = \{\, v \in C_0^\infty(\Omega)^n \,:\, \operatorname{div} v = 0 \,\}$$

і позначимо через $V(\Omega)$ і $H(\Omega)$ поповнення цього простору по нормах $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^n}$ і $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)^n}$, відповідно. Відомо і безпосередньо перевіряється, що

$$V(\Omega) = \{\, v \in H_0^1(\Omega)^n \,:\, \operatorname{div} v = 0 \,\}, \quad H(\Omega) = \{\, v \in L^2(\Omega)^n \,:\, \operatorname{div} v = 0 \,\}.$$

Розглянемо для $n = 2{,}3{,}4$ початково-краєву задачу для рівнянь Нав'є-Стокса: знайти $(u,p) = (u_1(x,t), \ldots, u_n(x,t), p(x,t))$:

$$u_t' - \mu\,\Delta u + u\cdot\nabla\,u + \nabla\,p = f \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T), \tag{11.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T),$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\times(0,T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Помножимо скалярно рівняння (11.1) на вектор-функцію $v \in D(\Omega)$, проінтегруємо отриману рівність по Ω і по частинам. Тоді

$$\int_\Omega (u_t'\,, v)\,dx + \mu\int_\Omega (\nabla u\,, \nabla v)\,dx + \int_\Omega (u\cdot\nabla u\,, v)\,dx = \int_\Omega (f, v)\,dx. \tag{11.2}$$

Слабким розв'язком рівнянь Нав'є-Стокса називається елемент

$$u \in L^2((0,T); V(\Omega))$$

такий, що $u_t' \in L^1((0,T); V(\Omega)^*)$, $u|_{t=0} = u_0$ в $H(\Omega)$ і виконана інтегральна тотожність (11.2) для будь-якої вектор-функції $v \in D(\Omega)$ і майже всіх $t \in (0,T)$.

Теорема 11.1 (Соболєва про вкладення $L^q(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$). *Нехай $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ є областю і $u \in H_0^1(\Omega)$. Тоді існують постійні $C_1 = C_1(q,\Omega)$ і $C_2 = C_2(\Omega)$ такі, що*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C_1\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \text{при} \qquad n = 2 \qquad \text{і} \qquad 1 \le q < \infty\,;$$

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \textit{при} \qquad n = 3\,;$$

$$\|u\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \textit{при} \qquad n \geq 3\,. \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

З формули Стоксу і нерівності Гельдера виходить, що

$$\left| \int_\Omega (u\cdot\nabla u\,,v)\,dx \right| = \left| \int_\Omega (u\cdot\nabla v\,,u)\,dx \right| \leq \int_\Omega |\,(u\cdot\nabla v\,,u)\,|\;dx \leq$$

$$\leq \|u\|^2_{L^4(\Omega)^n} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{n\times n}} \leq C_2\,\|u\|^2_{V(\Omega)} \|v\|_{V(\Omega)},$$

і

$$\|u\cdot\nabla u\|_{V(\Omega)^*} = \sup_{\|v\|_{V(\Omega)}=1} \left| \int_\Omega (u\cdot\nabla u\,,v)\,dx \right| \leq C_2 \|u\|^2_{V(\Omega)}$$

Тому всі інтеграли в (11.2) є визначеними.

Теорема11.2(про існування слабкого розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса).*Нехай* $f \in L^2((0,T);L^2(\Omega)^n)$ *і* $u_0 \in H(\Omega)$. *Тоді слабкий розв'язок* $u \in L^2((0,T);V(\Omega))$ *рівнянь Нав'є-Стокса існує,*

$$u \in \widetilde{L}^\infty((0,T);H(\Omega))$$

і для майже всіх $t \in (0,T)$ *виконана енергетична нерівність*

$$\int_\Omega \frac{|u|^2}{2}\,dx \;+\; \mu \int_0^t \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,d\tau \;\leq \int_\Omega \frac{|u_0|^2}{2}\,dx \;+ \int_0^t \int_\Omega (f,u)\,dx\,d\tau\,.$$

$\triangleleft$ Простір $V(\Omega)$ є сепарабельним. Тому знайдуться лінійно незалежні $\{w_i\}_{i=1}^\infty \subset V(\Omega)$ такі, що множина

$$\widetilde{V} = \{\, v \in V(\Omega)\,:\, v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i\,, \quad \forall\,\alpha_i \in \mathbf{R}, \quad \forall\, m \in \mathbf{N}\,\}$$

є щільною в $V(\Omega)$.

Фіксуємо ціле $m > 0$ і визначимо скінченновимірний простір

$$V_m = \{\, v \in V(\Omega)\,:\, v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i\,, \quad \alpha_i \in \mathbf{R}\,\}\,.$$

Розглянемо наступну задачу : знайти $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) w_i$ таке, що

$$\int_\Omega (u'_m\,,w_j)\,dx + \mu\int_\Omega (\nabla u_m\,,\nabla w_j)\,dx + \int_\Omega (u_m\cdot\nabla u_m\,,w_j)\,dx = \int_\Omega (f(t),w_j)\,dx, \quad (11.3)$$

$$t \in (0,T), \qquad j = 1,\ldots,m,$$

$$u_m|_{t=0} = \mathrm{Pr}_{V_m}(u_0).$$

Ця задача є задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь щодо функцій $\alpha_{1m}(t),\ldots,\alpha_{mm}(t)$:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{\Omega}(w_i\,,w_j)\,dx\right)\alpha'_{im}(t) + \,\mu\sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{\Omega}(\nabla w_i\,,\nabla w_j)\,dx\right)\alpha_{im}(t)\,+$$

$$+\,\sum_{i,l=1}^{m}\left(\int\limits_{\Omega}(w_i\cdot\nabla w_i\,,w_j)\,dx\right)\alpha_{im}(t)\alpha_{lm}(t) = \int\limits_{\Omega}(f(t),w_j)\,dx$$

$$t \in (0,T), \qquad j = 1,\ldots,m,$$

$$u_m|_{t=0} = \mathrm{Pr}_{V_m}(u_0).$$

Така задача має єдине рішення. Помножимо рівняння цієї задачі на $\alpha_{jm}(t)$ і підсумуємо по $j = 1,\ldots,m$, отримуємо

$$\int\limits_{\Omega}(u'_m(t)\,,u_m(t))\,dx\,+\,\mu\int\limits_{\Omega}(\nabla u_m(t)\,,\nabla u_m(t))\,dx\,=\int\limits_{\Omega}(f(t),u_m(t))\,dx. \tag{11.4}$$

З цієї рівності виходить, що

$$\left(\|u_m(t)\|^2_{H(\Omega)}\right)'_t + 2\mu\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}} = 2\int\limits_{\Omega}(f(t),u_m(t))\,dx\,\le$$

$$\le\,2\,\|f(t)\|_{L^2(\Omega)^n}\|u_m(t)\|_{H(\Omega)} \le \mu\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}} + C\,\|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n}.$$

Інтегруючи цю нерівність по $t \in (0,s)$, маємо

$$\|u_m(s)\|^2_{H(\Omega)} + \mu\int\limits_0^s\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}}\,dt\,\le$$

$$\le\,\|\mathrm{Pr}_{V_m}(u_0)\|^2_{H(\Omega)} + C\int\limits_0^s\|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\,dt.$$

Таким чином, для деякої постійної $M > 0$ виконані нерівності

$$\|u_m\|_{\widetilde{L}^\infty((0,T);H(\Omega))} + \|\nabla u_m\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega)^{n\times n})} \le M$$

і існують $u \in \widetilde{L}^{\infty}((0,T);H(\Omega)) \cap L^2((0,T);V(\Omega))$ і підпослідовність

$$u_{\widetilde{m}} \in L^2((0,T);V(\Omega))$$

такі, що

$$u_{\widetilde{m}} \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L^2((0,T);V(\Omega)) \quad \text{і} \quad u_{\widetilde{m}} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{в} \quad \widetilde{L}^{\infty}((0,T);H(\Omega)). \tag{11.5}$$

З додаткових оцінок можна також отримати, що

$$u_{\widetilde{m}} \to u \quad \text{в} \quad L^2((0,T);H(\Omega)). \tag{11.6}$$

Помножимо рівняння (11.3) на функцію $\varphi \in C^1[0,T]$ таку що $\varphi(T) = 0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0,T]$ і по частинам. Тоді

$$\int_0^T \int_\Omega (u_m(t), \varphi'(t) w_j)\, dxdt + \mu \int_0^T \int_\Omega (\nabla u_m(t), \varphi(t) \nabla w_j)\, dxdt + \tag{11.7}$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega (u_m(t) \cdot \nabla u_m(t), \varphi(t) w_j) dxdt = \int_\Omega (u_m(0), \varphi(0) w_j) dx + \int_0^T \int_\Omega (f(t), \varphi(t) w_j) dxdt,$$

Співвідношень (11.5) і (11.6) досить, щоб перейти до межі в (11.7) і отримати, що

$$\int_0^T \int_\Omega (u(t), \varphi'(t) v)\, dxdt + \mu \int_0^T \int_\Omega (\nabla u(t), \varphi(t) \nabla v)\, dxdt + \tag{11.8}$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega (u(t) \cdot \nabla u(t), \varphi(t) v) dxdt = \int_\Omega (u_0, \varphi(0) v) dx + \int_0^T \int_\Omega (f(t), \varphi(t) v) dxdt,$$

для будь-якого $v \in \widetilde{V}$ і тому для будь-якого $v \in V(\Omega)$.

З (11.8) при $\varphi \in C_0^{\infty}(0,T)$ витікає, що виконана інтегральна тотожність (11.2).

З тотожності (11.2) отримуємо також, що

$$\int_\Omega (u_t', v)\, dx = \int_\Omega (f, v)\, dx - \mu \int_\Omega (\nabla u\,, \nabla v)\, dx - \int_\Omega (u \cdot \nabla u\,, v)\, dx.$$

З цієї рівності маємо $u_t' \in L^1((0,T);V(\Omega)^*)$. Дійсно, наприклад, з формули Стоксу і нерівності Гельдера виходить, що

$$\left| \int_\Omega (u \cdot \nabla u\,, v)\, dx \right| = \left| \int_\Omega (u \cdot \nabla v\,, u)\, dx \right| \le \int_\Omega |\,(u \cdot \nabla v\,, u)\,|\; dx \le$$

$$\leq \|u\|^2_{L^4(\Omega)^n}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{n\times n}} \leq C_2\,\|u\|^2_{V(\Omega)}\|v\|_{V(\Omega)}.$$

Тому

$$\|u\cdot\nabla u\|_{V(\Omega)^*} = \sup_{\|v\|_{V(\Omega)}=1}\left|\int_\Omega (u\cdot\nabla u\,,v)\,dx\right| \leq C_2\|u\|^2_{V(\Omega)}$$

і інтегруючи цю нерівність, маємо

$$\|u\cdot\nabla u\|_{L^1((0,T);V(\Omega)^*)} = \int_0^T \|u\cdot\nabla u\|_{V(\Omega)^*}dt \leq C_2\int_0^T \|u\|^2_{V(\Omega)}dt < \infty\,.$$

Крім того, відомо, що з $u\in\widetilde{L}^\infty((0,T);H(\Omega))$ і $u'_t\in L^1((0,T);V(\Omega)^*)$ витікає, що u слабо неперервна як функція з $[0,T]$ в H (тобто $\forall v\in H$ функція $t\mapsto \int_\Omega (u(t),v)\,dx$ є неперервною)

Помножимо тотожність (11.2) на функцію $\varphi\in C^1[0,T]$ таку що $\varphi(T)=0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0,T]$ і по частинам. Тоді

$$\int_0^T\int_\Omega (u(t),\varphi'(t)v)\,dxdt + \mu\int_0^T\int_\Omega (\nabla u(t),\varphi(t)\nabla v)\,dxdt + \tag{11.9}$$

$$+\int_0^T\int_\Omega (u(t)\cdot\nabla u(t),\varphi(t)v)dxdt = \int_\Omega (u|_{t=0},\varphi(0)v)dx + \int_0^T\int_\Omega (f(t),\varphi(t)v)dxdt,$$

для будь-якого $v\in V(\Omega)$. Порівнюючи (11.8) і (11.9) при $\varphi(0)=1$ отримуємо

$$\int_\Omega (u|_{t=0},v)\,dx = \int_\Omega (u_0,v)\,dx \qquad \forall\, v\in V(\Omega).$$

Таким чином, виконана рівність $u|_{t=0}=u_0$ в $H(\Omega)$.

Інтегруючи (11.4) знаходимо, що

$$\|u_m(t)\|^2_{H(\Omega)} + 2\mu\int_0^t \|\nabla u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}}\,ds = \|\mathrm{Pr}_{V_m}(u_0)\|^2_{H(\Omega)} + 2\int_0^t\int_\Omega (f(s),u_m(s))\,dxds.$$

Помножимо це рівняння на функцію $\varphi\in C_0^\infty((0,T))$ таку, що $\varphi\geq 0$ і проінтегруємо отриману рівність по $(0,T)$. Тоді

$$\int_0^T\left(\|u_m(t)\|^2_{H(\Omega)} + 2\mu\int_0^t \|\nabla u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}}\,ds\right)\varphi(t)\,dt =$$

$$= \int_0^T \left(\|\mathrm{Pr}_{V_m}(u_0)\|^2_{H(\Omega)} + 2\int_0^t \int_\Omega (f(s), u_m(s))\, dx ds \right) \varphi(t)\, dt.$$

Використовуючи (11.5), перейдемо до нижньої границі в цій рівності. У результаті отримаємо

$$\int_0^T \left(\|u(t)\|^2_{H(\Omega)} + 2\mu \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}}\, ds \right) \varphi(t)\, dt \le$$

$$\le \int_0^T \left(\|u_0\|^2_{H(\Omega)} + 2\int_0^t \int_\Omega (f(s), u(s))\, dx ds \right) \varphi(t)\, dt.$$

Ця нерівність еквівалентна енергетичній нерівності. $\triangleright$

Лема 11.2 (Соболєва про вкладення $L^4(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$ при $n = 2, 3$). *Нехай $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ є областю і $u \in H^1_0(\Omega)$. Тоді*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \le 2^{1/4} \|u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \qquad \textit{при} \qquad n = 2\,;$$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \le 2^{1/2} \|u\|^{1/4}_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|^{3/4}_{L^2(\Omega)} \qquad \textit{при} \qquad n = 3\,. \qquad \triangleleft \ \triangleright$$

Теорема 11.3 (про регулярність слабкого розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса при $n = 2, 3$). *Нехай $u \in L^2((0,T); V(\Omega)) \cap \widetilde{L}^\infty((0,T); H(\Omega))$ є слабким розв'язком рівнянь Нав'є-Стокса. Тоді*

$$u'_t \in L^2((0,T); V(\Omega)^*), \quad u \in L^4((0,T); L^4(\Omega)) \cap C^0([0,T]; H(\Omega)) \qquad \textit{при} \quad n = 2;$$

$$u'_t \in L^{4/3}((0,T); V(\Omega)^*), \quad u \in L^{8/3}((0,T); L^4(\Omega)) \qquad \textit{при} \quad n = 3. \qquad \triangleleft \ \triangleright$$

Теорема 11.4 (про єдиність слабкого розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса при $n = 2, 3$). *Нехай $\{u\} \subset L^2((0,T); V(\Omega)) \cap \widetilde{L}^\infty((0,T); H(\Omega))$ є слабкими розв'язками рівнянь Нав'є-Стокса. Тоді*

$$\textit{слабкий розв'язок є єдиним} \qquad \textit{при} \qquad n = 2;$$

$$\textit{якщо } \{u\} \subset L^8((0,T); L^4(\Omega)) \textit{ тоді слабкий розв'язок є єдиним} \quad \textit{при} \quad n = 3.$$

$\triangleleft$ ($n = 2$) Припустимо, що u_1 і u_2 є розв'язками задачі (11.2). Тоді різниця $u = u_1 - u_2$ задовольняє співвідношенню

$$\left(\|u(t)\|^2_{H(\Omega)}\right)'_t + 2\mu\, \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}} = -2 \int_\Omega (u(t) \cdot \nabla u_2(t), u(t))\, dx \le$$

$$\leq\ 2\,\|u\|^2_{L^4(\Omega)^n}\|\nabla u_2\|_{L^2(\Omega)^{n\times n}} \leq\ 2^{3/2}\|u\|_{L^2(\Omega)^n}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^{n\times n}}\|\nabla u_2\|_{L^2(\Omega)^{n\times n}}\ \leq$$

$$\leq\ 2\mu\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}} +\ \frac{1}{\mu}\,\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\|\nabla u_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}}$$

через лему 11.2. Таким чином, маємо

$$\left(\|u(t)\|^2_{H(\Omega)}\right)'_t \leq\ \frac{1}{\mu}\,\|u(t)\|^2_{H(\Omega)}\|\nabla u_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}}$$

або

$$\left(\exp\left(-\frac{1}{\mu}\int\limits_0^t \|\nabla u_2(s)\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}}\,ds\right)\cdot\|u(t)\|^2_{H(\Omega)}\right)'_t \leq\ 0,$$

тобто $\|u(t)\|^2_{H(\Omega)} \leq\ 0$ при $t\in[0,T]$. $(n=2)$ ▷

◁ $(n=3)$ Припустимо, що u_1 і u_2 є розв'язками задачі (11.2). Тоді різниця $u=u_1-u_2$ задовольняє співвідношенню

$$\left(\|u(t)\|^2_{H(\Omega)}\right)'_t + 2\mu\,\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}} = 2\int\limits_\Omega (u(t)\cdot\nabla u(t), u_2(t))\,dx\ \leq$$

$$\leq\ 2\|u\|_{L^4(\Omega)^n}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^{n\times n}}\|u_2\|_{L^4(\Omega)^n} \leq\ 2^{3/2}\|u\|^{1/4}_{H(\Omega)}\|\nabla u\|^{7/4}_{L^2(\Omega)^{n\times n}}\|u_2\|_{L^4(\Omega)^n}\ \leq$$

$$\leq\ 2\mu\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)^{n\times n}} +\ C\,\|u(t)\|^2_{H(\Omega)}\|u_2(t)\|^8_{L^4(\Omega)^n}$$

через лему 11.2 (і нерівність $ab\ \leq\ \frac{1}{p}(\varepsilon a)^p + \frac{1}{q}(\frac{b}{\varepsilon})^q$, виконану при $a,b,\varepsilon\ >\ 0$ і $p,q\geq 1$ таких, що $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$). Таким чином, маємо

$$\left(\exp\left(-\frac{1}{\mu}\int\limits_0^t \|u_2(s)\|^8_{L^4(\Omega)^n}\,ds\right)\cdot\|u(t)\|^2_{H(\Omega)}\right)'_t \leq\ 0,$$

оскільки функція $t\mapsto\|u_2(t)\|^8_{L^4(\Omega)^n}$ є інтегрованою. $(n=3)$ ▷

Теорема 11.5 (Фурсікова А.В. про щільну єдиність слабкого розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса при $n=3$). *Нехай* $n=3$ *і* $u_0\in V(\Omega)$. *Тоді існує множина* $F=\{f\}\subset L^2((0,T);H(\Omega))$, *яка щільна в*

$$L^q((0,T);V(\Omega)^*)\quad \textit{для фіксованого}\quad q\quad \textit{при}\quad 1\leq q<\frac{4}{3},$$

і слабкий розв'язок задачі Діріхле для рівнянь Нав'є-Стокса, відповідний u_0 *і фіксованому* $f\in F$, *є единим.* ◁ ▷

Рекомендована література

1. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1988. 512с.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1989. 624 с.

3. Ладыженская О. А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* – М.: Наука, 1970. 288 с.

4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.* – М.: Наука, 1965. 520 с.

5. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики.* – М.:Наука, 1989. 384с.

6. Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса.* – М.: Мир, 1981. 408 с.

7. Шубин М.А. *Лекции об уравнениях математической физики.* – М.: МЦНМО, 2003. 303 с.

Додаткова література

1. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. *Численные методы и программное обеспечение.* – М.: Мир, 2002. 348 с.

2. Мазья В.Г. *Пространства С.Л. Соболева.* – Л.: Наука, 1985. 416 с.

3. Эванс Л.К., Гариепи Р.Ф. *Теория меры и тонкие свойства функций.* – Н.: Научная книга, 2002. 216 с.