

Математична фізика

Я хочу похвалити те, чого не имею, а именно знання точних наук, наприклад, математики. Ета, по словам Августина, Паскаля и многих других, самая абстрактная из человеческих наук оперирует в области не фантазии, а мысленных реальностей и чрезвычайно дисциплинирует ум. Именно из среды математиков нередко выходят хорошие организаторы, практики, волевые люди, умеющие не просто думать, но и додумывать до конца.

А. Ткачев

Прикладна математика є областю сучасної математики, основною метою якої є дослідження рівнянь, що мають "прикладне" значення. У математиці зустрічаються найрізноманітніші рівняння (алгебраїчні, диференціальні, із частинними похідними,...). Розділення математики на чисту (академічну) та прикладну є достатньо умовним. Як правило, в прикладній математиці розробляються методи дослідження і розв'язання рівнянь актуальних для механіки, фізики, хімії, економіки, біології, соціології, ..., а в чистій математиці розглядаються "абстрактні" рівняння. Втім, відомі численні приклади рівнянь, що виникали і досліджувались у чистій математиці та надалі ставали актуальними і, навіть, фундаментальними для механіки, фізики, хімії,....

Математична фізика є областю прикладної математики, основною метою якої є дослідження крайових і початково-крайових задач для рівнянь з частинними похідними, що мають "прикладне" значення. Ці задачі виникають в різних розділах механіки, фізики, хімії, економіки, біології, соціології, ..., хоча перелік таких задач математичної фізики є достатньо коротким.

1. Банахові простори.

Кожна сучасна наука має свої сталі правила, традиції і закони розвитку. Так, в математиці прийнято виводити різноманітні твердження із використанням логічно коректних (несуперечливих) міркувань. Такі твердження зазвичай ґрунтуються на загальноприйнятих фундаментальних поняттях. Для багатьох сучасних областей математики, зокрема, прикладної математики, такими фундаментальними поняттями є поняття *множини* та *відображення*.

В1.1. Множина – сукупність елементів будь-якої природи.

В1.2. Відображення φ із множини A у множину B – правило зіставлення кожному елементу із A деякого елемента із B . Позначення: $\varphi : A \rightarrow B$.

В1.3. Нехай задані множини A , B і відображення $\varphi : A \rightarrow B$. Рівнянням називається співвідношення

$$\varphi(a) = b, \quad (1.1)$$

де $a \in A$ і $b \in B$. Розв'язати рівняння (1.1) означає, що для заданого $b \in B$ необхідно знайти $a \in A$ таке, що $\varphi(a) = b$.

Основна проблема математики – **розв'язувати** різноманітні рівняння.

Образом відображення $\varphi : A \rightarrow B$ є множина

$$\text{Im } \varphi = \{\varphi(a) : a \in A\} \subseteq B.$$

Образом елементу $a \in A$ є елемент $b = \varphi(a) \in B$.

Рівняння (1.1) може бути беззмистовним для $b \in B \setminus \text{Im } \varphi$, якщо $B \neq \text{Im } \varphi$. Проте, за визначенням рівняння (1.1) завжди має сенс і розв'язок для $b \in \text{Im } \varphi$. Таким чином, іноді корисно "зменшити" B , щоб рівняння (1.1) мало розв'язок.

В1.4. Відображення $\varphi : A \rightarrow B$ називається *накладенням*, якщо

$$\text{Im } \varphi = B.$$

Для таких φ рівняння (1.1) завжди має сенс і розв'язок. Проте, описання $\text{Im } \varphi$ не завжди відомо і фактично еквівалентно розв'язанню рівняння (1.1). Наприклад, для $b, c \in \mathbf{R}$ і відображення $\varphi(x) = x^2 + bx : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ відомо, що

$$c \in \text{Im } \varphi \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + 4c \geq 0.$$

Але описання $\text{Im } \varphi$ не відомо, наприклад, для $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$, $a, \dots, e \in \mathbf{R}$ і відображення $\varphi(x) = x^n + ax^{n-1} + \dots + ex : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

З іншого боку, для $b, c \in \mathbf{R}$ і відображення $\varphi(x) = x^2 + bx : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ завжди маємо, що $c \in \text{Im } \varphi$, тобто іноді корисно "збільшити" A і B щоб рівняння (1.1) "мало" розв'язок. Точніше, іноді зручно досліджувати замість (1.1) рівняння

$$\bar{\varphi}(\bar{a}) = \bar{b} \quad \text{яке називається розширенням (1.1),} \quad (\bar{1.1})$$

де $\bar{\varphi} : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ такі, що $A \subset \bar{A}$, $B \subseteq \bar{B}$ і $\bar{\varphi}(A) = \varphi(A)$, тобто $\bar{\varphi}(a) = \varphi(a)$ для $a \in A$. Саме так (при розширенні рівнянь другого порядку) виникла множина комплексних чисел \mathbf{C} (як втім і багато інших множин, які використовуються в сучасній математиці, виникли при розширенні різноманітних рівнянь).

З появою комплексних чисел вдалося повністю описати $\text{Im } \varphi$ для $n \in \mathbf{N}$, $a, \dots, e \in \mathbf{C}$ і відображення $\varphi(x) = x^n + ax^{n-1} + \dots + ex : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$. У даному випадку $\text{Im } \varphi = \mathbf{C}$ відповідно до *основної теореми алгебри*, однак рівняння (1.1) може мати декілька розв'язків. Зазвичай корисно знати скільки існує розв'язків, але найкращим варіантом може бути єдиність розв'язку рівняння (1.1).

В1.5. Відображення $\varphi : A \rightarrow B$ називається *вкладенням*, якщо

$$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Для таких φ рівняння (1.1) має єдиний розв'язок, якщо цей розв'язок існує. Таким чином, іноді корисно "**зменшити**" A щоб розв'язок був єдиним. Наприклад, якщо відомо, що для кожного $b \in B$ розв'язків завжди два, тоді може бути корисним "**поділити**" A на дві частини і отримати ідеальний випадок.

В1.6. Відображення $\varphi : A \rightarrow B$ називається *взаємно однозначним*, якщо воно є вкладенням та накладенням.

Для таких φ рівняння (1.1) завжди має єдиний розв'язок $a \in A$ для кожного $b \in B$, що вирішує основну проблему, і множини A та B побудовані в деякому розумінні однаково, оскільки визначено відображення $\tilde{\varphi} : B \rightarrow A$, що зіставляє кожному $b \in B$ єдиний розв'язок $a \in A$ і таке, що $\varphi(\tilde{\varphi}(b)) = b$ та $\tilde{\varphi}(\varphi(a)) = a$.

В1.7. Дві множини A та B називаються *еквівалентними*, якщо існує взаємно однозначне відображення $\varphi : A \rightarrow B$. Позначення: $A \cong B$.

Основний принцип математики – **ототожнювати** еквівалентні множини.

Цей принцип є природним: якщо множини A, B, C, \dots побудовані однаково, тоді досить вивчити, наприклад, A і одночасно зрозуміти будову еквівалентних множин. Цей принцип використовується постійно. Наприклад, еквівалентність

$$\{x_1, \dots, x_n\} \cong \{1, \dots, n\} \cong \{0, \dots, n-1\}$$

означає одвічне бажання все перенумеровувати (маршрути, жителів, студентів, юридичних осіб, телефони, ...), що іноді достатньо зручно. Саме так виникла множина натуральних чисел \mathbf{N} , із скінченними підмножинами якої можна ототожнити будь-яку скінчену множину, що підкреслює корисність математики принаймні в тих областях діяльності, де використовуються скінченні множини.

В1.8. *Операцією* на множині A називається всяке відображення із $A \times A$ в A .

Образ пари (a, b) називають сумою, або добутком, або згорткою ... і пишуть, відповідно, $a + b$ або $a \cdot b$ або $a * b$

Операція $a \cdot b$ *комутативна*, якщо $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in A$.

Операція $a \cdot b$ *асоціативна*, якщо $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in A$.

В1.9. *Операцією множення на число* $\alpha \in \mathbf{C}$ (або $\alpha \in \mathbf{R}$) на множині A називається всяке відображення із $\mathbf{C} \times A = \{(\alpha, a) : \alpha \in \mathbf{C}, a \in A\}$ в A .

Образ пари (α, a) позначають через αa або $\alpha \cdot a$.

В1.10. Множина L називається *лінійним простором* над \mathbf{C} (або \mathbf{R}), якщо:

(I) на L визначена операція додавання $L \times L \ni (a, b) \mapsto a + b \in L$ така, що:

- 1) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in L$;
- 2) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in L$;
- 3) $\exists 1 \theta \in L : a + \theta = a \quad \forall a \in L$;
- 4) $\forall a \in L \quad \exists 1 (-a) \in L : a + (-a) = \theta$;

(II) на L визначена операція множення на числа $\alpha \in \mathbf{C}$ (або $\alpha \in \mathbf{R}$) така, що:

- 5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{C} \quad \forall a \in L$;
- 6) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad \forall \alpha \in \mathbf{C} \quad \forall a, b \in L$;
- 7) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{C} \quad \forall a \in L$;
- 8) $1a = a \quad \forall a \in L$.

В1.11. *Нормою* на лінійному просторі L називається всяке відображення $\eta : L \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+ = \{r \in \mathbf{R} : r \geq 0\}$ таке, що для $\forall \alpha \in \mathbf{C}$ та $\forall a, b \in L$ маємо:

- 1) $\eta(a) = 0 \Leftrightarrow a = \theta$;
- 2) $\eta(\alpha a) = |\alpha| \eta(a)$;
- 3) $\eta(a + b) \leq \eta(a) + \eta(b)$.

Лінійний простір L із деякою нормою $\eta(\cdot)$ називається *нормованим простором* (L, η) . Зазвичай позначають $\eta(a) = \|a\|_L$ або $\eta(a) = \|a\|$.

Послідовністю $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ в L називається образ кожного відображення із \mathbf{N} в L .

V1.12. Елемент $a \in L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ є *границею* послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$, якщо $\|a_n - a\|_L \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Позначення: $a_n \rightarrow a$.

V1.13. Послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *фундаментальною*, якщо $\|a_n - a_m\|_L \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$.

V1.14. Нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *повним* або *банаховим*, якщо кожна фундаментальна послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ має границю $a \in L$.

Нормований простір дійсних чисел $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ із нормою $\|a\|_{\mathbf{R}} = |a|$ як відомо є повним, але нормований простір раціональних чисел $(\mathbf{Q}, |\cdot|)$ не є повним, оскільки

$$\mathbf{Q} \ni a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \in \mathbf{R} \neq \mathbf{Q}.$$

V1.15. Відображення $\varphi : M \rightarrow L$ нормованих просторів $(M, \|\cdot\|_M)$ і $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *неперервним у точці* $a \in M$, якщо

$$\varphi(a_n) \rightarrow \varphi(a) \quad \text{для кожної послідовності} \quad a_n \rightarrow a.$$

Відображення $\varphi : M \rightarrow L$ нормованих просторів $(M, \|\cdot\|_M)$ і $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *неперервним*, якщо воно неперервне у кожній точці $a \in M$.

(Завдання для самостійної роботи: перевірити, що для нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ відображення $\varphi = \|\cdot\|_L : L \rightarrow \mathbf{R}$ є неперервним, тобто

$$\|a_n\|_L \rightarrow \|a\|_L \quad \text{для кожної послідовності} \quad a_n \rightarrow a \quad \text{і кожного} \quad a \in L.)$$

Позначимо

$$C[0, 1] = C^0[0, 1] = \{f : f \text{ неперервна функція із } [0, 1] \text{ в } \mathbf{C}\},$$

$$\|f\|_0 = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Нормований простір $(C^0[0, 1], \|\cdot\|_0)$ є повним, оскільки як відомо границя послідовності рівномірно неперервних функцій є рівномірно неперервною функцією.

В1.16. Відображення $\varphi : L \rightarrow L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *стискаючим*, якщо

$$\exists \alpha \in (0, 1) : \quad \|\varphi(a) - \varphi(b)\|_L \leq \alpha \|a - b\|_L \quad \forall a, b \in L.$$

(Завдання для самостійної роботи: перевірити, що для нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ стискаючі відображення $\varphi : L \rightarrow L$ є неперервними.)

Теорема 1.17 (Банаха про стискаючі відображення). *Нехай відображення $\varphi : L \rightarrow L$ банахового простору $(L, \|\cdot\|_L)$ є стискаючим. Тоді*

$$\exists! a_0 \in L : \quad \varphi(a_0) = a_0.$$

◁ Фіксуємо довільне $a \in L$ і розглянемо послідовність

$$a_1 = \varphi(a), \quad a_2 = \varphi(a_1) = \varphi(\varphi(a)) = \varphi^2(a),$$

$$a_3 = \varphi(a_2) = \varphi(\varphi(a_1)) = \varphi^3(a), \dots,$$

$$a_n = \varphi(a_{n-1}) = \varphi^n(a), \dots$$

Тоді

$$\|a_1 - a_2\|_L = \|\varphi(a) - \varphi(a_1)\|_L \leq \alpha \|a - a_1\|_L = \alpha \|a - \varphi(a)\|_L,$$

$$\|a_2 - a_3\|_L = \|\varphi(a_1) - \varphi(a_2)\|_L \leq \alpha^2 \|a - \varphi(a)\|_L, \dots$$

$$\|a_n - a_{n+1}\|_L \leq \alpha^n \|a - \varphi(a)\|_L, \dots$$

Для цілого $p > 1$ маємо

$$\begin{aligned} \|a_n - a_{n+p}\|_L &\leq \|a_n - a_{n+1}\|_L + \|a_{n+1} - a_{n+2}\|_L + \dots + \|a_{n+p-1} - a_{n+p}\|_L \leq \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{n+p-1}) \|a - \varphi(a)\|_L = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1 - \alpha} \|a - \varphi(a)\|_L. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\|a_n - a_{n+p}\|_L < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|a - \varphi(a)\|_L \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

і послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ є фундаментальною, оскільки $0 < \alpha < 1$.

Нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ є повним, отже,

$$\exists a_0 \in L : \quad a_n \rightarrow a_0.$$

Крім того,

$$\|\varphi(a_0) - a_n\|_L = \|\varphi(a_0) - \varphi(a_{n-1})\|_L \leq \alpha \|a_0 - a_{n-1}\|_L \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

тобто $a_n \rightarrow \varphi(a_0)$ та

$$\exists a_0 \in L : a_0 = \varphi(a_0)$$

завдяки єдиності границі. Припустимо, що $\exists a_0, b_0 \in L : a_0 = \varphi(a_0)$ і $b_0 = \varphi(b_0)$.

Тоді

$$\|a_0 - b_0\|_L = \|\varphi(a_0) - \varphi(b_0)\|_L \leq \alpha \|a_0 - b_0\|_L \Leftrightarrow \|a_0 - b_0\|_L(1 - \alpha) \leq 0.$$

Таким чином, $\|a_0 - b_0\|_L = 0$ і $a_0 = b_0$. \triangleright

Ця теорема вирішує основну проблему для конкретного класу рівнянь і підкреслює важливість **повноти і переходу до границі** при розв'язуванні рівнянь. Крім того, ця теорема дає алгоритм знаходження наближеного розв'язку рівняння $a_0 = \varphi(a_0)$ із наперед заданою точністю $\varepsilon > 0$. Дійсно, із неперервності відображення $\|\cdot\|_L$ і нерівності (1.2) випливає, що

$$\|a_n - a_0\|_L < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|a - \varphi(a)\|_L.$$

Таким чином, для кожного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке n , що $\|a_n - a_0\|_L < \varepsilon$, тобто знайти розв'язок рівняння $a_0 = \varphi(a_0)$ із наперед заданою точністю ε .

Приклад 1.18. Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння

$$y'_t = F(t, y), \quad y|_{t=t_0} = y_0, \quad (1.3)$$

де $t \in (t_0, T)$, $t_0 < T$ та $y_0 \in \mathbb{C}^n$.

Теорема 1.19 ($\exists 1$ для задачі Коші). *Припустимо, що $F \in C^0([t_0, T] \times \mathbb{C}^n)^n$*

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \text{для} \quad t \in (t_0, T) \quad \text{і} \quad y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n$$

(умова Ліпшиця із константою L). Тоді

$$\exists 1 \ y \in C^1[t_0, T]^n : \quad y'_t = F(t, y), \quad y|_{t=t_0} = y_0,$$

де $C^1[t_0, T]^n = \{f \in C^0[t_0, T]^n : f'_t \in C^0[t_0, T]^n\}$.

◁ Задача (1.3) еквівалентна такій задачі для інтегрального рівняння

$$\text{знайти } y \in C^0[t_0, T]^n : \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(t, y(t)) dt. \quad (1.4)$$

Дійсно, якщо $y \in C^1[t_0, T]^n$ є розв'язком задачі (1.3), то після інтегрування отримуємо (1.4). Відповідно, якщо $y \in C^0[t_0, T]^n$ є розв'язком задачі (1.4), то після диференціювання отримуємо (1.3), оскільки $F(t, y(t)) \in C^0[t_0, T]^n$ як суперпозиція неперервних функцій $y \in C^0[t_0, T]^n$ і $F \in C^0([t_0, T] \times \mathbf{C}^n)^n$.

Фіксуємо $t_1 \in (t_0, T]$ таке, що $L(t_1 - t_0) < 1$ і розглянемо відображення $\varphi : C^0[t_0, t_1]^n \rightarrow C^0[t_0, t_1]^n$, визначене формулою

$$\varphi(y) = y_0 + \int_{t_0}^t F(t, y(t)) dt.$$

Перевіримо, що φ є стискаючим для повного простору $(C^0[t_0, t_1]^n, \|\cdot\|_0)$. Маємо

$$\begin{aligned} \|\varphi(a) - \varphi(b)\|_0 &= \max_{t_0 \leq t \leq t_1} |\varphi(a)(t) - \varphi(b)(t)| \leq \\ &\leq \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \int_{t_0}^t |F(t, a(t)) - F(t, b(t))| dt \leq \max_{t_0 \leq t \leq t_1} L \int_{t_0}^t |a(t) - b(t)| dt \leq \\ &\leq L(t_1 - t_0) \max_{t_0 \leq t \leq t_1} |a(t) - b(t)| = L(t_1 - t_0) \|a - b\|_0 \end{aligned}$$

для $a, b \in C^0[t_0, t_1]^n$. Таким чином, φ є стискаючим для $(C^0[t_0, t_1]^n, \|\cdot\|_0)$ і тому $\exists 1$ розв'язок $y \in C^0[t_0, t_1]^n$ рівняння (1.4), зокрема, $y(t_1)$ є визначеним.

При $t_1 < T$ розіб'ємо відрізок $[t_0, T]$ на відрізки $[t_0, t_1], \dots, [t_{k-1}, t_k]$ так, щоб $L(t_j - t_{j-1}) < 1$ для $j = 1, \dots, k$ і повторимо попереднє доведення для цих відрізків, використовуючи фактично лінійність інтеграла. Тоді доведемо, що

$$\exists 1 y \in C^0[t_0, T]^n : \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(t, y(t)) dt. \triangleright$$

У доведений теоремі суттєво, що розв'язок $y(t)$ є визначеним і скінченним для кожного $t \in [t_0, T]$. Ця властивість може не виконуватися, якщо умова Ліпшиця порушена, наприклад, для додатних $y_0, F \in \mathbf{R}$ і $n = 1$ задача Коші

$$y'_t = Fy^2, \quad y|_{t=0} = y_0, \quad (1.5)$$

має розв'язок $y(t) = \frac{y_0}{1 - tFy_0}$, який не є визначеним для $t = \frac{1}{Fy_0}$.

Цей приклад пояснює суттєву відмінність між $C^0[0, Fy_0]$ і $C^0[0, Fy_0)$. Проте, іноді є корисною наступна теорема про локальну розв'язуваність задачі Коші.

Теорема 1.20 (локальне $\exists 1$ для задачі Коші). *Нехай $F \in C^0([t_0, T] \times \mathbb{C}^n)^n$ і*

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leq L(y_1, y_2) |y_1 - y_2| \quad \text{для } t \in (t_0, T) \quad \text{і } y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n,$$

де $L(y_1, y_2)$ є рівномірно обмеженою на обмежених множинах (локальна умова Ліпшиця), тобто для кожного $c > 0$

$$L' = \sup_{|y_1| < 2c, |y_2| < 2c} L(y_1, y_2) < \infty. \quad (1.6)$$

Тоді існує $T_0 > t_0$ таке, що $T \geq T_0$ і

$$\exists 1 \ y \in C^1[t_0, T_0]^n : \quad y'_t = F(t, y), \quad y|_{t=t_0} = y_0.$$

◁ Фіксуємо $c > |y_0|$, позначимо $M = \max_{[t_0, T]} |F(t, y_0)|$ та оберемо $T_0 > t_0$ так, щоб

$$M(T_0 - t_0) \leq c \quad \text{і} \quad L'(T_0 - t_0) < 1. \quad (1.7)$$

Повторюючи доведення теореми Банаха, визначимо

$$a = y_0, \quad a_1 = \varphi(a), \quad \dots, \quad a_n = \varphi^n(a)$$

для

$$\varphi(y) = y_0 + \int_{t_0}^t F(t, y(t)) dt.$$

Тоді

$$\|a - \varphi(a)\|_0 = \max_{[t_0, T_0]} \left| \int_{t_0}^t F(t, y_0) dt \right| \leq M(T_0 - t_0) \leq c,$$

зокрема, $\|a_1\|_0 \leq \|a_1 - a\|_0 + \|a\|_0 < 2c$. Припустимо по індукції виконання нерівностей $\|a_2\|_0 < 2c, \dots, \|a_n\|_0 < 2c$ і перевіримо, що також $\|a_{n+1}\|_0 < 2c$.

Маємо

$$\begin{aligned} \|a_{n+1} - a_n\|_0 &\leq \max_{t_0 \leq t \leq T_0} \int_{t_0}^t |F(t, a_n(t)) - F(t, a_{n-1}(t))| dt \leq \\ &\leq \alpha \|a_n - a_{n-1}\|_0 \leq \alpha^2 \|a_{n-1} - a_{n-2}\|_0 \leq \alpha^n \|a - \varphi(a)\|_0 \leq \alpha^n c, \end{aligned}$$

відповідно до (1.6), (1.7), де $\alpha = L'(T_0 - t_0) < 1$. Таким чином,

$$\begin{aligned} \|a_{n+1}\|_0 &\leq \|a_{n+1} - a_n\|_0 + \|a_n - a_{n-1}\|_0 + \dots + \|a_1 - a\|_0 + \|a\|_0 \leq \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + 1) c + \|a\|_0 < \frac{c}{1 - \alpha} + c < 2c \end{aligned}$$

і переходячи до границі $a_n \rightarrow y$, отримаємо розв'язок задачі Коші такий, що

$$\max_{[t_0, T_0]} |y| \leq 2c. \quad \triangleright$$

Якщо $T_0 < T$, тоді можливо повторити попередню конструкцію із початкового моменту часу $t_1 = T_0$, фіксуючи $c_1 > 2c \geq |y(t_1)|$ і обчислюючи $L' = L'(c_1)$, яке залежить від c_1 , і отримати $T_1 > T_0$ таке, що

$$\max_{[t_0, T_1]} |y| \leq 2c_1.$$

Повторюючи цей процес, знайдемо $T_m > \dots > T_1 > T_0$ і розв'язок $y = y(t)$ задачі Коші такий, що $\max_{[t_0, T_m]} |y| \leq 2c_m$ для деякої константи c_m . По суті можливі два варіанти або $|y(T_m)| \rightarrow \infty$ (як в прикладі (1.5)) або розв'язок $y = y(t)$ задачі Коші буде продовжений на відрізок $[t_0, T]$ і знайдеться константа C така, що

$$\max_{[t_0, T]} |y| \leq C.$$

Більш того, якщо остання нерівність відома із деяких додаткових оцінок, тоді розв'язок $y = y(t)$ задачі Коші завжди може бути продовжений на відрізок $[t_0, T]$, оскільки варіант $|y(T_m)| \rightarrow \infty$ є неможливим.

(Завдання для самостійної роботи: перевірити, що умови теореми 1.20 виконані для прикладу (1.5).)

2. Поповнення просторів.

В2.1. Множина $A \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *обмеженою*, якщо

$$\exists M \in \mathbf{R}_+ : \quad \|a\|_L \leq M \quad \forall a \in A.$$

В2.2. Відображення $\varphi : L \rightarrow H$ лінійних просторів L і H над \mathbf{C} називається (лінійним) *оператором*, якщо

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(\alpha a) = \alpha \varphi(a), \quad \forall \alpha \in \mathbf{C}, \quad \forall a, b \in L.$$

В2.3. Оператор $\varphi : L \rightarrow H$ нормованих просторів $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(H, \|\cdot\|_H)$ називається *обмеженим*, якщо

$$\exists M \in \mathbf{R}_+ : \quad \|\varphi(a)\|_H \leq M \|a\|_L \quad \forall a \in L.$$

Найменша із констант $M \in \mathbf{R}_+$ ($\|\varphi(a)\|_H \leq M \|a\|_L$) називається нормою оператора φ і позначається $\|\varphi\|_B$.

Теорема 2.4. Оператор $\varphi : L \rightarrow H$ нормованих просторів $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(H, \|\cdot\|_H)$ є обмеженим \Leftrightarrow оператор $\varphi : L \rightarrow H$ є неперервним. $\triangleleft \triangleright$

Множина всіх обмежених операторів $\varphi : L \rightarrow H$ для нормованих просторів $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(H, \|\cdot\|_H)$ позначається $B(L, H)$.

Теорема 2.5. Множина $B(L, H)$ із природними операціями є лінійним простором. Простір $(B(L, H), \|\cdot\|_B)$ є нормованим простором і

$$\|\varphi\|_B = \sup_{\|a\|_L \leq 1} \|\varphi(a)\|_H = \sup_{a \neq \theta} \frac{\|\varphi(a)\|_H}{\|a\|_L} \quad \forall \varphi \in B(L, H).$$

Простір $(B(L, H), \|\cdot\|_B)$ є банаховим, якщо $(H, \|\cdot\|_H)$ є банаховим. $\triangleleft \triangleright$

Зокрема, нормований простір $(B(L, \mathbf{C}), \|\cdot\|_B)$ є банаховим, цей простір називається *спряженим* (або *дуальним*) до $(L, \|\cdot\|_L)$ і позначається L^* ($= (B(L, \mathbf{C}))$).

Елементи $\varphi \in L^*$ називаються *функціоналами*.

Аналогічно визначається *другий* спряжений простір $L^{**} = (L^*)^*$ для $(L, \|\cdot\|_L)$

і

$$L \subset L^{**}.$$

В2.6. Нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *рефлексивним*, якщо

$$L = L^{**}.$$

В2.7. Лінійний простір L над \mathbf{C} називається *n -вимірним*, якщо існують лінійно незалежні $e_1, \dots, e_n \in L$ такі, що $\forall a \in L, a \neq \theta$ елементи $a, e_1, \dots, e_n \in L$ є лінійно залежними (тобто $\exists \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C} : \alpha a + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \theta$).

В цьому випадку елементи $e_1, \dots, e_n \in L$ називаються базисом L і

$$L = \text{Lin} \{e_1, \dots, e_n\} \equiv \{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n : \alpha_i \in \mathbf{C}, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Дві норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ на лінійному просторі L називаються *еквівалентними*, якщо $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$:

$$\alpha \|a\|_1 \leq \|a\|_2 \leq \beta \|a\|_1 \quad \forall a \in L.$$

Нехай норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ на лінійному просторі L є еквівалентними. Тоді послідовність $\{a_n\} \subset L$ збігається (фундаментальна) в $(L, \|\cdot\|_1)$

$$\Leftrightarrow \text{послідовність } \{a_n\} \text{ збігається (фундаментальна) в } (L, \|\cdot\|_2).$$

В цьому випадку нормовані простори $(L, \|\cdot\|_1)$ і $(L, \|\cdot\|_2)$ також називаються *еквівалентними*.

Крім того, нормовані простори $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(H, \|\cdot\|_H)$ називаються *еквівалентними*, якщо існує лінійне взаємно однозначне відображення $\varphi : L \rightarrow H$ таке, що

$$\|a\|_L = \|\varphi(a)\|_H \quad \forall a \in L.$$

Еквівалентні простори ототожнюються в теорії нормованих просторів.

Теорема 2.8. Кожні дві норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ на \mathbf{C}^n (відповідно на \mathbf{R}^n) є еквівалентними. $\triangleleft \triangleright$

Теорема 2.9. Кожен нормований n -вимірний простір $(L, \|\cdot\|_L)$ над \mathbf{C} (відповідно над \mathbf{R}) є еквівалентним \mathbf{C}^n (відповідно \mathbf{R}^n). $\triangleleft \triangleright$

Позначимо через $C^0(\{1, \dots, n\}, \mathbf{C})$ множину функцій (відображень) із множини $\{1, \dots, n\}$ в \mathbf{C} .

(Завдання для самостійної роботи: перевірити, що такі функції є неперервними.)

Існує природне взаємно однозначне відображення

$$\varphi : C^0(\{1, \dots, n\}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

Дійсно, $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}$ зіставляє кожному $i \in \{1, \dots, n\}$ деяке число a_i яке визначає елемент a_i для $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

Таким чином, лінійний простір

$$C[0, 1] = C^0[0, 1] = \{f : f \text{ неперервна функція із } [0, 1] \text{ в } \mathbb{R}\}$$

є нескінченновимірним, оскільки множина $[0, 1]$ є нескінченною.

В2.10. Множина $B \subset L$ є *щільною* у нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$, якщо для кожного $a \in L$ і $\varepsilon > 0$

$$\exists b_\varepsilon \in B : \|a - b_\varepsilon\|_L \leq \varepsilon.$$

Нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *сепарабельним*, якщо існує зчисленна множина $B \subset L$, яка щільна в $(L, \|\cdot\|_L)$.

В2.11. Множина $K \subset L$ називається (секвенційно) *відносно компактною* у нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$, якщо для кожної послідовності $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ існують підпослідовність $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{a_n\}_{n=1}^\infty$ і елемент $a \in L$ такі, що

$$a_{n_k} \rightarrow a.$$

Множина $K \subset L$ є *компактною* у нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$, якщо для кожної послідовності $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ існують підпослідовність $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{a_n\}_{n=1}^\infty$ і елемент $a \in K$ такі, що $a_{n_k} \rightarrow a$. (У "відносному" випадку $a \in L$ тільки).

Теорема 2.12. Нехай множина $K \subset L$ є компактною у нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$. Тоді K є повною.

◁ Дійсно, якщо підпослідовність $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ є фундаментальною і $\varepsilon > 0$, тоді існують підпослідовність $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{a_n\}_{n=1}^\infty$ і елемент $a \in K$ такі, що

$$\|a - a_n\|_L \leq \|a - a_{n_k}\|_L + \|a_{n_k} - a_n\|_L < 2\varepsilon$$

для достатньо великих n і n_k . ▷

В2.13. Нехай задано $\varepsilon > 0$. Множина $S_\varepsilon \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається ε -сіттю для множини $K \subseteq L$, якщо

$$\forall x \in K \quad \exists x_\varepsilon \in S_\varepsilon : \quad \|x - x_\varepsilon\|_L < \varepsilon.$$

Теорема 2.14 (Хаусдорф). Множина $K \subset L$ є відносно компактною у нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L) \Rightarrow$

для кожного $\varepsilon > 0$ існує скінченна ε -сіть $S_\varepsilon \subset L$ для K . $\triangleleft \triangleright$

Теорема 2.15 (Хаусдорф). Множина $K \subset L$ є відносно компактною у нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L) \Leftarrow$

L є повним і для кожного $\varepsilon > 0$ існує скінченна ε -сіть $S_\varepsilon \subset L$ для K . $\triangleleft \triangleright$

Теорема 2.16. Множина $K \subset L$ є відносно компактною у нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L) \Rightarrow K$ є обмеженою.

\triangleleft Нехай $S_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ це скінченна 1-сіть для K і $d = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_L$. Тоді для кожного $x \in K$ маємо

$$\|x\|_L \leq \|x - x_i\|_L + \|x_i\|_L \leq 1 + d. \quad \triangleright$$

В2.17. Повний нормований простір $(\bar{L}, \|\cdot\|_L)$ називається *поповненням* нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$, якщо множина L є щільною в $(\bar{L}, \|\cdot\|_L)$.

Теорема 2.18 (про поповнення нормованих просторів). Кожен нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ має єдине поповнення $(\bar{L}, \|\cdot\|_L)$.

\triangleleft Нехай нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ не є повним. Фундаментальні послідовності $\{a_n\}, \{b_n\} \subset L$ називаються *еквівалентними* (позначення: $\{a_n\} \sim \{b_n\}$), якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - b_n\|_L = 0.$$

Із нерівності трикутника випливає, що якщо $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ і $\{b_n\} \sim \{c_n\}$, тоді $\{a_n\} \sim \{c_n\}$.

Таким чином, множина всіх фундаментальних послідовностей із $(L, \|\cdot\|_L)$ розпадається на непересічні класи еквівалентних фундаментальних послідовностей. Позначимо через \bar{L} множину таких класів (еквівалентних фундаментальних послідовностей). Якщо фундаментальна послідовність $\{a_n\}$ належить класу $\bar{a} \in \bar{L}$,

тоді пишуть $\{a_n\} \in \bar{a}$. Якщо $\{a_n\}, \{b_n\} \subset L$ фундаментальні послідовності, тоді $\{a_n + b_n\} \subset L$ і $\{\alpha a_n\} \subset L$ для деякого $\alpha \in \mathbf{C}$ також є фундаментальні послідовності. Тому на \bar{L} визначені операції додавання та множення на числа і нескладно перевірити, що \bar{L} є лінійним простором.

Для $\{a_n\} \subset L$, із нерівності трикутника, маємо

$$\|a_n\|_L \leq \|a_n - a_m\|_L + \|a_m\|_L \quad \forall n, m \in \mathbf{N}$$

і тому

$$|\|a_n\|_L - \|a_m\|_L| \leq \|a_n - a_m\|_L.$$

Отже, для кожної фундаментальної послідовності $\{a_n\} \subset L$ послідовність чисел $\alpha_n = \|a_n\|_L \subset \bar{\mathbf{R}}_+$ є фундаментальною і має границю $\alpha \in \bar{\mathbf{R}}_+$.

Таким чином, для $\bar{a} \in \bar{L}$ такого, що $\{a_n\} \in \bar{a}$ визначено відображення

$$\bar{\eta}(\bar{a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_L \quad : \quad \bar{L} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+.$$

Перевіримо, що це визначення не залежить від вибору фундаментальної послідовності $\{a_n\} \in \bar{a}$. Нехай $\{a_n\}, \{a'_n\} \in \bar{a}$ (тобто $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$). Тоді

$$\|a'_n\|_L \leq \|a'_n - a_n\|_L + \|a_n\|_L,$$

$$\|a_n\|_L \leq \|a_n - a'_n\|_L + \|a'_n\|_L$$

і

$$|\|a_n\|_L - \|a'_n\|_L| \leq \|a_n - a'_n\|_L.$$

Таким чином, маємо

$$\bar{\eta}(\bar{a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a'_n\|_L$$

(оскільки $\{a_n\} \sim \{a'_n\} \Rightarrow \lim \|a_n - a'_n\|_L = 0$) і це визначення відображення $\bar{\eta} : \bar{L} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+$ є коректним (не залежить від вибору $\{a_n\} \in \bar{a}$).

Крім того, маємо

$$\bar{\eta}(\bar{a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_L = 0 \quad \Rightarrow \quad \{a_n\} \sim \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} = \bar{0},$$

$$\bar{\eta}(\alpha \bar{a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha a_n\|_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \|a_n\|_L = \alpha \bar{\eta}(\bar{a}).$$

Із нерівності трикутника

$$\|a_n + b_n\|_L \leq \|a_n\|_L + \|b_n\|_L$$

впливає (після переходу до $\lim_{n \rightarrow \infty}$), що

$$\bar{\eta}(\bar{a} + \bar{b}) \leq \bar{\eta}(\bar{a}) + \bar{\eta}(\bar{b}).$$

Таким чином, відображення $\bar{\eta}$ є нормою на множині \bar{L} і $(\bar{L}, \bar{\eta})$ є нормованим простором.

Кожному $a \in L$ зіставимо у відповідність послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty}$. Такі послідовності називаються *стаціонарними* і є фундаментальні. Отже, визначене взаємно однозначне відображення φ із L в $L' \subset \bar{L}$, де L' є множиною класів фундаментальних послідовностей, що містять стаціонарні послідовності.

Для $a \in L$ маємо $\bar{a} = \varphi(a)$ належить L' і

$$\bar{\eta}(\varphi(a)) = \bar{\eta}(\bar{a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a\|_L = \|a\|_L,$$

де $\{a\}_{n=1}^{\infty} \in \bar{a}$. Таким чином, відображення φ встановлює еквівалентність і нормовані простори $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(L', \bar{\eta})$ можна ототожнити.

Перевіримо, що L' щільно в $(\bar{L}, \bar{\eta})$. Нехай $\bar{a} \in \bar{L}$ і $\{a_n\} \in \bar{a}$. Для кожного $k \in \mathbf{N}$ позначимо $\bar{a}_k = \varphi(a_k) \in L'$. За визначенням

$$\bar{\eta}(\bar{a} - \bar{a}_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a_k\|_L.$$

Послідовність $\{a_n\}$ є фундаментальною, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad : \quad \|a_n - a_k\|_L < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, k \geq N_\varepsilon.$$

Отже,

$$\bar{\eta}(\bar{a} - \bar{a}_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a_k\|_L \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall k \geq N_\varepsilon,$$

тобто $\forall \bar{a} \in \bar{L}$ і $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{b}_\varepsilon \in L' : \bar{\eta}(\bar{a} - \bar{b}_\varepsilon) < \varepsilon$ (L' щільно в $(\bar{L}, \bar{\eta})$).

Перевіримо, що $(\bar{L}, \bar{\eta})$ є повним. Нехай $\{\bar{a}_n\} \subset \bar{L}$ є фундаментальною послідовністю. Для кожного $n \in \mathbf{N}$ можна знайти $\bar{b}_n = \varphi(b_n) \in L'$ таке, що

$$\bar{\eta}(\bar{a}_n - \bar{b}_n) < \frac{1}{n},$$

де $\bar{b}_n = \varphi(b_n)$ є стаціонарною послідовністю відповідною $b_n \in L$ для $n \in \mathbf{N}$.

Послідовність $\{\bar{b}_n\} \subset \bar{L}$ є фундаментальною. Дійсно, для $\varepsilon > 0$ маємо

$$\bar{\eta}(\bar{b}_n - \bar{b}_m) \leq \bar{\eta}(\bar{b}_n - \bar{a}_n) + \bar{\eta}(\bar{a}_n - \bar{a}_m) + \bar{\eta}(\bar{a}_m - \bar{b}_m) < \frac{1}{n} + \bar{\eta}(\bar{a}_n - \bar{a}_m) + \frac{1}{m} \leq \varepsilon$$

для достатньо великих n і m , оскільки $\{\bar{a}_n\} \subset \bar{L}$ є фундаментальною.

Послідовність $\bar{b}_n = \varphi(b_n) \in L'$ є стаціонарною і тому

$$\bar{\eta}(\bar{b}_n - \bar{b}_m) = \|b_n - b_m\|_L.$$

Таким чином, послідовність $\{b_n\} \subset L$ є фундаментальною і існує елемент $\bar{b} \in \bar{L}$ такий, що $\{b_n\} \in \bar{b}$. Тоді для $\varepsilon > 0$ маємо

$$\bar{\eta}(\bar{b} - \bar{a}_n) \leq \bar{\eta}(\bar{b} - \bar{b}_n) + \bar{\eta}(\bar{b}_n - \bar{a}_n) < \lim_{k \rightarrow \infty} \|b_k - b_n\|_L + \frac{1}{n} \leq \|b_k - b_n\|_L + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

для достатньо великих k і n , оскільки $\{b_n\} \subset L$ є фундаментальною.

Отже, нормований простір $(\bar{L}, \bar{\eta})$ є повним.

Перевіримо, що поповнення $(\bar{L}, \bar{\eta})$ для $(L, \|\cdot\|_L)$ є єдиним (точніше, що поповнення $(\bar{L}, \bar{\eta})$ для $(L', \bar{\eta})$ є єдиним, проте $(L', \bar{\eta})$ і $(L, \|\cdot\|_L)$ ототожнюються).

Нехай $(\tilde{L}, \bar{\eta})$ є іншим повним нормованим простором таким, що L щільно в $(\tilde{L}, \bar{\eta})$. Тоді для $\tilde{a} \in \tilde{L}$ існує послідовність $\{a_n\} \subset L \subset \tilde{L}$ така, що

$$\bar{\eta}(\tilde{a} - a_n) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{тобто } a_n \rightarrow \tilde{a}).$$

Послідовність $\{a_n\} \subset L$ є фундаментальною і визначає єдиний елемент $\bar{a} \in \bar{L}$.

Таким чином, кожному $\tilde{a} \in \tilde{L}$ відповідає єдиний елемент $\bar{a} \in \bar{L}$.

Нехай $\bar{b} \in \bar{L}$. Тоді визначена фундаментальна послідовність $\{b_n\} \subset L$ така, що $\{b_n\} \in \bar{b}$. Простір $(\tilde{L}, \bar{\eta})$ є повним. Тому існує $\tilde{b} \in \tilde{L}$ таке, що

$$\bar{\eta}(\tilde{b} - b_n) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{тобто } b_n \rightarrow \tilde{b}).$$

Таким чином, кожному $\bar{b} \in \bar{L}$ відповідає єдиний елемент $\tilde{b} \in \tilde{L}$ і

$$\bar{\eta}(\bar{a} - \bar{b}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - b_n\|_L = \bar{\eta}(\tilde{a} - \tilde{b}).$$

Отже, відображення $\bar{a} \mapsto \tilde{a}$ із \bar{L} в \tilde{L} встановлює еквівалентність цих просторів.

Якщо нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ є повним, тоді $(\overline{L}, \|\cdot\|_L) = (L, \|\cdot\|_L)$ є єдиним поповненням для $(L, \|\cdot\|_L)$. \triangleright

Приклад 2.19. Розглянемо для $a, b \in \mathbf{R} : a < b$ множину

$$C^0[a, b] = \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C} : f \text{ є неперервною на } [a, b] \}$$

з нормами

$$\|f\|_0 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

(Завдання для самостійної роботи: перевірити, що $\|\cdot\|_0$ і $\|\cdot\|_p$ для фіксованого p є нормами на лінійному просторі $C^0[a, b]$.)

Відомо, що $(C^0[a, b], \|\cdot\|_0)$ є банаховим простором, оскільки границя послідовності рівномірно неперервних функцій є рівномірно неперервною функцією.

З іншого боку, $(C^0[a, b], \|\cdot\|_p)$ не є повним нормованим простором. Дійсно, розглянемо, наприклад, $(C^0[-1, 1], \|\cdot\|_1)$ і послідовність неперервних функцій

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{для } x \in [-1, -\frac{1}{n}], \\ nx, & \text{для } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ 1, & \text{для } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Для кожних $n, m \in \mathbf{N}$ маємо

$$\int_{-1}^1 |f_{n+m}(x) - f_n(x)| dx \leq$$

$$\leq \int_{-1}^1 |f_{n+m}(x) - \operatorname{sgn}(x)| dx + \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{n+m} + \frac{1}{n}.$$

Таким чином, послідовність $\{f_n\}$ є фундаментальною в $(C^0[-1, 1], \|\cdot\|_1)$ і має границю $\operatorname{sgn}(x)$, яка не є неперервною функцією.

Зокрема, норми $\|\cdot\|_0$ та $\|\cdot\|_p$ на $C^0[a, b]$ не є еквівалентними.

В2.20. Поповнення $(C^0[a, b], \|\cdot\|_p)$ для фіксованого p (при $1 \leq p < \infty$) називається простором Лебега інтегрованих у ступені p функцій і позначається

$$(L^p(a, b), \|\cdot\|_p) = (\overline{C^0[a, b]}, \|\cdot\|_p).$$

3. Гільбертові простори.

В3.1. *Спряжено-білінійним* (або *півторалінійним*) функціоналом на лінійному просторі H над \mathbf{C} називається всяке відображення

$$\varphi : H \times H \rightarrow \mathbf{C}$$

таке, що для $\forall \alpha, \beta, \delta \in \mathbf{C}$ і $\forall a, b, d \in H$ маємо:

$$1) \quad \varphi(\alpha a + \beta b, d) = \alpha \varphi(a, d) + \beta \varphi(b, d);$$

$$2) \quad \varphi(a, \beta b + \delta d) = \bar{\beta} \varphi(a, b) + \bar{\delta} \varphi(a, d),$$

де риса над числом позначає комплексне спряження.

В3.2. *Спряжено-білінійний* функціонал на лінійному просторі H називається *скалярним* (або *внутрішнім*) добутком, якщо для $\forall a, b \in H$ цей функціонал задовольняє умовам:

$$i) \quad \varphi(a, b) = \overline{\varphi(b, a)};$$

$$ii) \quad \varphi(a, a) \geq 0;$$

$$iii) \quad \varphi(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = \theta.$$

Лінійний простір H із деяким скалярним добутком $\varphi(\cdot, \cdot)$ називається *передгільбертовим простором* (H, φ) .

Лінійний простір $L \subset H$ називається *підпростором* передгільбертового простору (H, φ) і є передгільбертовим простором (L, φ) .

Зазвичай позначають $\varphi(a, b) = \langle a, b \rangle_H$, $\varphi(a, b) = (a, b)_H$ або $\varphi(a, b) = \langle a, b \rangle$.

Наприклад, на \mathbf{C}^n скалярний добуток можна визначити рівністю

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k \quad \text{для} \quad a = (a_1, \dots, a_n), \quad b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{C}^n$$

або рівністю

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k,h=1}^n A_{kh} a_k \bar{b}_h \quad \text{для} \quad a, b \in \mathbf{C}^n, \quad A_{kh} \in \mathbf{C}, \quad k, h = 1, \dots, n,$$

де матриця $A = \{A_{kh}\}_{k,h=1}^n$ є ермітовою і додатною, тобто $A_{kh} = \overline{A_{hk}}$ і

$$\sum A_{kh} a_k \bar{a}_h > 0 \quad \text{для} \quad a \neq \theta.$$

На множині квадратично сумовних послідовностей

$$l^2(\mathbf{C}) = \{ a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty, \quad a_k \in \mathbf{C}, \quad k = 1, \dots, n, \dots \}$$

скалярний добуток можна визначити, наприклад, рівністю

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k \quad \text{для} \quad a = (a_1, \dots, a_n, \dots), \quad b = (b_1, \dots, b_n, \dots) \in l^2(\mathbf{C})$$

(де збіжність ряду впливає із відомої оцінки $|a_k \bar{b}_k| \leq \frac{1}{2} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$).

Теорема 3.3 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца). Для передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ визначимо

$$\| a \| = \sqrt{\langle a, a \rangle}, \quad a \in H.$$

Тоді

$$|\langle a, b \rangle| \leq \| a \| \| b \|, \quad a, b \in H.$$

◁ (Завдання для самостійної роботи.) ▷

Використовуючи цю нерівність, можна визначити кут ϕ між двома ненульовими елементами $a, b \in H$ із рівності

$$\cos(\phi) = \frac{|\langle a, b \rangle|}{\| a \| \| b \|}.$$

Зокрема, елементи $a, b \in H$ називаються ортогональними, якщо $\langle a, b \rangle = 0$.

Система елементів $e_\nu \in H$ для деякої множини індексів $\nu \in \Lambda$ називається ортонормованою, якщо

$$\langle e_\nu, e_\kappa \rangle = 0 \quad \text{для} \quad \nu \neq \kappa \quad \text{і} \quad \| e_\nu \| = 1 \quad \text{для} \quad \nu, \kappa \in \Lambda.$$

Теорема 3.4. Для передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ відображення

$$\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle} : H \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+$$

є нормою, тобто:

$$1) \quad \| a \| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \theta; \quad 2) \quad \| \alpha a \| = |\alpha| \| a \|;$$

$$3) \quad \| a + b \| \leq \| a \| + \| b \|.$$

◁ (Завдання для самостійної роботи.) ▷

Таким чином, $(H, \|\cdot\|)$ є нормованим простором.

Передгільбертові простори $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ і $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ називаються *еквівалентними*, якщо вони еквівалентні як нормовані простори $(H_1, \|\cdot\|_1)$ і $(H_2, \|\cdot\|_2)$.

Еквівалентні простори ототожнюються в теорії гільбертових просторів.

В3.5. Передгільбертовий простір $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ називається *гільбертовим*, якщо нормований простір $(H, \|\cdot\|)$ є повним (та нескінченновимірним).

Теорема 3.6 (про поповнення гільбертових просторів). *Кожен передгільбертовий простір $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ має єдине гільбертове поповнення $(\bar{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.*

◁ Відомо, що $(H, \|\cdot\|)$ має єдине поповнення \tilde{H} (що складається із класів еквівалентних фундаментальних послідовностей) як нормований простір і залишається перевірити, що \tilde{H} є гільбертовим простором.

Нехай $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{H}$ і $\{a_n\}, \{b_n\} \subset H$ фундаментальні послідовності такі, що $\{a_n\} \in \tilde{a}, \{b_n\} \in \tilde{b}$. Визначимо

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n, b_n \rangle.$$

Ця границя існує, оскільки для $n, m \in \mathbf{N}$

$$|\langle a_n, b_n \rangle - \langle a_m, b_m \rangle| \leq \|a_m - a_n\| \|b_m\| + \|b_m - b_n\| \|a_n\|,$$

тому послідовність чисел $\{\langle a_n, b_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ є фундаментальною і має границю.

Аналогічно перевіряється, що ця границя не залежить від вибору послідовностей $\{a_n\} \in \tilde{a}, \{b_n\} \in \tilde{b}$ і визначає скалярний добуток на \tilde{H} . Тобто $\bar{H} = \tilde{H}$. ▷

Приклад 3.7. Розглянемо для $a, b \in \mathbf{R} : a < b$ множину

$$C^0[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C} : f \text{ є неперервною на } [a, b]\}$$

із скалярним добутком

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall f, g \in C^0[a, b].$$

(Завдання для самостійної роботи: перевірити, що $\langle f, g \rangle$ є скалярним добутком на лінійному просторі $C^0[a, b]$.)

Таким чином, простір $(C^0[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є передгільбертовим і нерівність Коші-Буняковського-Шварца має вигляд

$$\left| \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall f, g \in C^0[a, b].$$

Норма на цьому просторі визначається рівністю

$$\|f\| = \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Простір $(C^0[a, b], \|\cdot\|_2)$ не є гільбертовим (тобто повним), оскільки існують послідовності, що збігаються до функції $\text{sgn}(x - (a+b)/2)$, яка не є неперервною.

В3.8. Поповнення $(C^0[a, b], \|\cdot\|_2)$ називається простором *квадратично інтегрованих* функцій і позначається

$$(L^2(a, b), \|\cdot\|_2) = \overline{(C^0[a, b], \|\cdot\|_2)}.$$

Таким чином, простір $(L^2(a, b), \|\cdot\|_2)$ складається із "функцій", які можуть бути наближені неперервними функціями, тобто для $f \in L^2(a, b)$ і

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in C^0[a, b] : \quad \|f - f_\varepsilon\|_2 < \varepsilon.$$

Зокрема, для $f \in L^2(a, b)$ є визначеним інтеграл $\int_a^b f dx$, як границя інтегралів від $\int_a^b f_\varepsilon dx$, тобто рівністю

$$\int_a^b f(x) dx = \langle f, 1 \rangle.$$

Такий інтеграл називається *інтегралом Лебега*.

Нехай $L \subset H$ є підпростір передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Елемент $a \in H$ називається *ортгоналим* підпростору L , якщо

$$\langle a, l \rangle = 0 \quad \forall l \in L.$$

В цьому випадку пишуть $a \perp L$.

Нехай $a \in H$. Елемент $l_a \in L$ називається *ортгоналим проекцією* a в підпростір $L \subset H$, якщо $\langle a - l_a, l \rangle = 0 \quad \forall l \in L$.

Коли така проекція існує, то пишуть $l_a = \text{Pr}_L(a)$ і така проекція l_a є єдиною. Дійсно, якщо $l_1, l_2 \in L$ такі, що

$$\langle a - l_1, l \rangle = 0, \quad \langle a - l_2, l \rangle = 0 \quad \forall l \in L,$$

тоді $\langle l_2 - l_1, l \rangle = 0 \quad \forall l \in L$ і $\langle l_2 - l_1, l_2 - l_1 \rangle = 0$, тобто $l_2 = l_1$.

(Завдання для самостійної роботи: перевірити, що $l_{\alpha a} = \alpha l_a$ і $l_{a+b} = l_a + l_b$, тобто $\text{Pr}_L(\alpha a) = \alpha \text{Pr}_L(a)$ і $\text{Pr}_L(a+b) = \text{Pr}_L(a) + \text{Pr}_L(b)$ для $a, b \in H$ і $\alpha \in \mathbb{C}$.)

Лема 3.9 (закон паралелограма). *Нехай $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є передгільбертовий простір. Тоді*

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 \quad \forall a, b \in H.$$

◁ Перевіряється безпосередньо, оскільки $\|a + b\|^2 = \langle a + b, a + b \rangle$. ▷

Теорема 3.10 (про існування єдиної ортогональної проекції). *Нехай $L \subset H$ є повний підпростір передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ і $a \in H$. Тоді*

$$\exists ! l_a = \text{Pr}_L(a) \quad i \quad \|a - l_a\| = \inf_{l \in L} \|a - l\|.$$

◁ Позначимо через η_k мінімізуючу послідовність, тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a - \eta_k\| = d = \inf_{l \in L} \|a - l\|. \quad (3.1)$$

Існування такої послідовності впливає із визначення інфімуму. Із закону паралелограма

$$\|d + b\|^2 + \|d - b\|^2 = 2\|d\|^2 + 2\|b\|^2 \quad \forall d, b \in L$$

при $d = a - \eta_k$ і $b = a - \eta_h$ отримуємо

$$\|\eta_k - \eta_h\|^2 = 2\|a - \eta_k\|^2 + 2\|a - \eta_h\|^2 - 4\left\|a - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h)\right\|^2.$$

Множина L є підпростором, тому $\frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h) \in L$ і $d^2 \leq \left\|a - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h)\right\|^2$. Отже,

$$\|\eta_k - \eta_h\|^2 \leq 2\|a - \eta_k\|^2 + 2\|a - \eta_h\|^2 - 4d^2$$

і послідовність $\{\eta_k\} \subset L$ є фундаментальною завдяки (3.1).

Таким чином, існує $l_a \in L$ таке, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = l_a$ та виконані наступні рівності $\|a - l_a\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|a - \eta_k\| = d$.

Припустимо, що $l \in L$ і $l \neq \theta$. Тоді $\eta_k + \varepsilon l \in L$ для $\varepsilon \in \mathbf{C}$ і

$$\|a - (\eta_k + \varepsilon l)\|^2 \geq d^2,$$

тобто

$$\|a - \eta_k\|^2 - \bar{\varepsilon} \langle a - \eta_k, l \rangle - \varepsilon \langle l, a - \eta_k \rangle + |\varepsilon|^2 \|l\|^2 \geq d^2.$$

При $\varepsilon = \frac{\langle a - \eta_k, l \rangle}{\|l\|^2}$ маємо

$$\|a - \eta_k\|^2 - d^2 \geq \frac{|\langle a - \eta_k, l \rangle|^2}{\|l\|^2}.$$

Звідки при $k \rightarrow \infty$ отримуємо $\langle a - l_a, l \rangle = 0 \quad \forall l \in L$. \triangleright

Лема 3.11. Нехай $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є передгільбертовий простір і $a \in H$. Тоді функціонал

$$f(x) = \langle x, a \rangle \quad \forall x \in H$$

є лінійним і обмеженим (тобто $f \in B(H, \mathbf{C})$). Крім того,

$$\|f\|_B = \|a\|_H = \sqrt{\langle a, a \rangle}.$$

\triangleleft Лінійність $f(\cdot)$ випливає із лінійності $\langle \cdot, a \rangle$, а обмеженість із нерівності

$$|f(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|x\|_H \|a\|_H \quad \forall x \in H.$$

Крім того, маємо $f(a) = \|a\|_H \|a\|_H$, тобто $\|f\|_B = \|a\|_H$. \triangleright

Лема 3.12. Нехай $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є передгільбертовий простір і $f \in B(H, \mathbf{C})$ такий, що

$$f(x) = \langle x, a \rangle \quad \forall x \in H.$$

Тоді $a \in H$ визначено однозначно.

\triangleleft Нехай $a, b \in H$ такі, що

$$f(x) = \langle x, a \rangle, \quad f(x) = \langle x, b \rangle \quad \forall x \in H.$$

Тоді $\langle x, a - b \rangle = 0 \quad \forall x \in H$. Зокрема, $\langle a - b, a - b \rangle = 0$, тобто $a = b$. \triangleright

Теорема 3.13 (Рісс). Нехай $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є гільбертовий простір і $f \in B(H, \mathbb{C})$.

Тоді

$$\exists 1 a \in H : f(x) = \langle x, a \rangle \quad \forall x \in H.$$

◁ Позначимо

$$L = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

Із лінійності f випливає, що L лінійний підпростір в H . Крім того, L є повним.

Дійсно, якщо $\{a_n\} \subset L$ є фундаментальною послідовністю, тоді

$$\exists a \in H : a_n \rightarrow a,$$

оскільки H є повним, та $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$, тобто $a \in L$.

Якщо $L = H$, тоді $f(x) = 0 \quad \forall x \in H$ і

$$\exists 1 \theta \in H : f(x) = \langle x, \theta \rangle \quad \forall x \in H.$$

Нехай $L \neq H$, тоді $\exists a \in H$ такий, що $f(a) \neq 0$.

Позначимо через $l_a \in L$ ортогональну проекцію a на L і визначимо

$$b = a - l_a.$$

Тоді $\langle b, l \rangle = 0 \quad \forall l \in L$ і $f(b) = f(a) \neq 0$.

Із лінійності f випливає, що

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(b)} b\right) = 0 \quad \forall x \in H.$$

Таким чином, маємо

$$\forall x \in H \quad x - \frac{f(x)}{f(b)} b \in L$$

і тому

$$\langle x - \frac{f(x)}{f(b)} b, b \rangle = 0 \quad \forall x \in H$$

за визначенням ортогональної проекції. Отже, маємо рівність

$$\langle x, b \rangle = f(x) \frac{\|b\|^2}{f(b)} \quad \forall x \in H.$$

Звідки, позначаючи $a = \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b$, отримуємо, що

$$\exists 1 a \in H : f(x) = \langle x, a \rangle \quad \forall x \in H. \quad \triangleright$$

Таким чином, множину лінійних обмежених функціоналів $B(H, \mathbf{C})$ на гільбертовому просторі H можна ототожнити (як нормований простір) із H , тобто $H^* = H$. Зокрема, $H = H^{**}$ і тому гільбертові простори є рефлексивними.

В3.14. Нехай $X, Y \subset H$ є заданими підпросторами лінійного простору H . Тоді $H = X \oplus Y$ є прямою сумою X і Y , якщо

$$\forall a \in H \quad \exists ! x_a, y_a : \quad a = x_a + y_a, \quad \text{де } x_a \in X \quad \text{і } y_a \in Y.$$

Крім того, якщо H є гільбертовим простором $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ і $X \perp Y$ (тобто $\langle x, y \rangle_H = 0$ для $x \in X, y \in Y$), тоді

$$H = X \oplus Y$$

є прямою ортогональною сумою X і Y .

Теорема 3.15 (про розкладання у пряму ортогональну суму). Нехай $L \subset H$ є повний підпростір гільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$. Тоді

$$H = L \oplus L^\perp,$$

де $L^\perp = \{h \in H : \langle h, l \rangle_H = 0 \quad \forall l \in L\}$.

◁ Дійсно, визначимо $l_a = \text{Pr}_L(a) \in L$ і $h_a = a - l_a \in L^\perp$. Тоді $a = l_a + h_a$. ▷

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що

$$L^2(0, 1) = \mathbf{C} \oplus \{h \in L^2(0, 1) : \int_0^1 h(x) dx = 0\}.)$$

Теорема 3.16 (про повноту ядра оператора). Нехай L є повним нормованим простором, H є нормованим простором і $A \in B(L, H)$. Тоді

$$\text{Ker } A = \{x \in L : Ax = 0\} \quad \text{є повним підпростором } L.$$

◁ Завдання для самостійної роботи. ▷

Теорема 3.17 (про повноту образу оператора). Нехай L і H є повними нормованими просторами, $A \in B(L, H)$ і існує стала α така, що

$$\alpha \|x\|_L \leq \|Ax\|_H \quad \forall x \in L.$$

Тоді $\text{Im } A = \{y \in H : y = Ax \quad \text{для } x \in L\}$ є повним підпростором H .

Крім того, для кожного $y \in \text{Im } A \quad \exists ! x \in L : Ax = y$.

◁ Завдання для самостійної роботи. ▷

4. Простори Соболева.

Теорема 4.1 (про продовження операторів по неперервності). *Нехай оператор $A \in B(L, Y)$, де Y є банаховим простором і лінійний простір $L \subset X$ є щільним в лінійному нормованому просторі X .*

Тоді $\exists \bar{A} \in B(X, Y)$:

$$\bar{A}(x) = A(x) \quad \forall x \in L \quad \text{і} \quad \|\bar{A}\|_{B(X, Y)} = \|A\|_{B(L, Y)}.$$

◁ Нехай $x \in X$ і $x \notin L$. Тоді існує $\{x_n\} \subset L$ така, що

$$x_n \rightarrow x,$$

оскільки L є щільним в X . Із нерівності

$$\|A(x_n) - A(x_m)\|_Y \leq \|A\|_{B(L, Y)} \|x_n - x_m\|_L$$

випливає, що послідовність $\{A(x_n)\} \subset Y$ є фундаментальною і має границю, оскільки Y є банаховим простором. Визначимо

$$\bar{A}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n)$$

і перевіримо, що це визначення не залежить від вибору послідовності $\{x_n\} \subset L$.

Нехай $\{x'_n\} \subset L$ така, що $x'_n \rightarrow x$ і

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n), \quad y' = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x'_n).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|y - y'\|_Y &\leq \|y - A(x_n)\|_Y + \|A(x_n) - A(x'_n)\|_Y + \|A(x'_n) - y'\|_Y \leq \\ &\leq \|y - A(x_n)\|_Y + \|A\|_{B(L, Y)} \|x_n - x'_n\|_L + \|A(x'_n) - y'\|_Y \rightarrow 0, \end{aligned}$$

тобто $y = y'$.

Лінійність \bar{A} випливає із лінійності A і лінійності границі. Крім того,

$$\|A(x_n)\|_Y \leq \|A\|_{B(L, Y)} \|x_n\|_L$$

і тому

$$\|\bar{A}(x)\|_Y \leq \|A\|_{B(L,Y)} \|x\|_L,$$

тобто $\|\bar{A}\|_{B(X,Y)} \leq \|A\|_{B(L,Y)}$. З іншого боку, при продовженні оператора норма цього оператора не може зменшитися, отже, маємо рівність

$$\|\bar{A}\|_{B(X,Y)} = \|A\|_{B(L,Y)}.$$

Нехай $\bar{A}_1 \in B(X, Y)$ і $\bar{A}_2 \in B(X, Y)$ такі, що

$$\bar{A}_1(x) = \bar{A}_2(x) = A(x) \quad \forall x \in L.$$

Для доведення єдиності необхідно перевірити, що

$$\bar{A}_1(x) = \bar{A}_2(x) \quad \forall x \in X.$$

Виберемо $x \in X$ таке, що $x \notin L$. Тоді існує послідовність $\{x_n\} \subset L$ така, що

$$x_n \rightarrow x,$$

оскільки L є щільним в X . Таким чином, маємо рівність

$$\bar{A}_1(x_n) = \bar{A}_2(x_n).$$

Враховуючи неперервність $\bar{A}_1, \bar{A}_2 \in B(X, Y)$ і обчислюючи $\lim_{n \rightarrow \infty}$, отримуємо

$$\bar{A}_1(x) = \bar{A}_2(x). \quad \triangleright$$

В4.2. Відкрита обмежена зв'язна підмножина $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ називається *областю* у \mathbf{R}^n . Замикання області Ω в \mathbf{R}^n позначається $\bar{\Omega}$ (і є компактною множиною), а

$$\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$$

називається *межею* цієї області.

Наприклад, $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$ є відкритою кулею в \mathbf{R}^n ,

$$\bar{\Omega} = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq 1\}$$

є замкнутою кулею і $\partial\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| = 1\}$ називається одиничною сферою.

Розглянемо для області Ω в \mathbf{R}^n лінійний простір

$$C^0(\overline{\Omega}) = \{ f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{C} : f \text{ є неперервною на } \overline{\Omega} \}.$$

Теорема 4.3 (нерівність Гельдера). Для $f, g \in C^0(\overline{\Omega})$ виконана нерівність

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{де } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

і $1 < p < \infty$. Зокрема

$$\left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} 1 dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} (\text{mes}(\Omega))^{\frac{1}{q}}. \quad \triangleleft \triangleright$$

Розглянемо на $C^0(\overline{\Omega})$ норми

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p,$$

де $\lim_{p \rightarrow \infty}$ існує, оскільки неперервні функції обмежені ($|f(x)| \leq M$) і тому обмежена послідовність чисел $\|f\|_p$ ($\|f\|_p \leq M \text{mes}(\Omega)^{1/p} \leq M \text{mes}(\Omega)$, наприклад, якщо $\text{mes}(\Omega) \geq 1$), крім того, ця послідовність є монотонною.

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити нерівність Гельдера, використовуючи те, що

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \quad \text{для} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{і} \quad \alpha, \beta \geq 0$$

і обираючи $\alpha = \frac{|f|}{\|f\|_p}$, $\beta = \frac{|g|}{\|g\|_q}$ при $\|f\|_p \neq 0$, $\|g\|_q \neq 0$ і $f, g \in C^0[a, b]$.)

В4.4. Поповнення $(C^0(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_p)$ для фіксованого p називається простором Лебега інтегрованих у ступені p функцій і позначається

$$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p) = (\overline{C^0(\overline{\Omega})}, \|\cdot\|_p).$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що $\|\cdot\|_p$ є нормою для $C^0(\overline{\Omega})$ і

$$L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \text{при} \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty.$$

Зокрема, $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ при $1 \leq p \leq \infty$.)

Таким чином, простір $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ складається із "функцій", які можуть бути наближені неперервними функціями, тобто для $f \in L^p(\Omega)$ і

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega}) : \quad \|f - f_\varepsilon\|_p < \varepsilon.$$

Для $f \in C^0(\overline{\Omega})$ є визначеним лінійний інтеграл $\int_{\Omega} f dx$. Із нерівності Гельдера випливає, що цей інтеграл є обмеженим відображенням із $C^0(\overline{\Omega})$ в \mathbf{C} . Таким чином, із теорем 4.1 і 4.3 випливає, що для $f \in L^p(\Omega)$ є визначеним лінійний інтеграл (такий інтеграл називається *інтегралом Лебега*) і

$$\left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| \leq (\text{mes}(\Omega))^{\frac{1}{q}} \|f\|_p.$$

Нехай $A \subset \overline{\Omega}$. Визначимо функцію $\chi_A(x)$ рівністю $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A$ і $\chi_A(x) = 0$ при $x \in \overline{\Omega} \setminus A$. Така функція називається *характеристичною* функцією множини $A \subset \overline{\Omega}$.

В4.5. Множина $A \subset \overline{\Omega}$ називається *вимірною*, якщо $\chi_A(x) \in L^1(\Omega)$. Функція $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{C}$ називається (абсолютно) *інтегрованою*, якщо $f \in L^1(\Omega)$.

Міра Лебега $\text{mes}(A)$ вимірної множини $A \subset \overline{\Omega}$ визначається рівністю

$$\text{mes}(A) = \int_A dx = \int_{\Omega} \chi_A dx.$$

Теорема 4.6. *Міра Лебега вимірної множини $A \subset \overline{\Omega}$ є рівною нулю (тобто $\text{mes}(A) = 0$) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ існує множина кубів $K_1, K_2, \dots, K_k \dots$ така, що*

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |K_k| < \varepsilon,$$

де $|K_k| = |b_k - a_k|^n$ позначає об'єм куба $K_k = [a_k, b_k]^n$ і $k = 1, 2, \dots$ $\triangleleft \triangleright$

Відомо, що $L^p(\Omega)$ складається із класів еквівалентності інтегрованих функцій, де f і g належать одному класу, якщо $f = g$ майже усюди, тобто

$$\text{mes}(\{x \in \Omega : f \neq g\}) = 0.$$

Крім того, відомо, що $L^p(\Omega) = \{f \in \text{інтегрованою} : \|f(x)\|_p < \infty\}$ при $1 \leq p < \infty$.

Визначимо

$$\tilde{L}^{\infty}(\Omega) = \{f \in \text{інтегрованою} : \|f(x)\|_{\infty} < \infty\}.$$

Тоді $L^{\infty}(\Omega) \subset \tilde{L}^{\infty}(\Omega)$.

Теорема 4.7 (Лузін Н.Н.). Функція $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{C}$ є інтегрованою \Rightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in C^0(\bar{\Omega}) : \quad \text{mes}(\{x \in \Omega : f \neq f_\varepsilon\}) < \varepsilon. \quad \triangleleft \triangleright$$

При $p = 2$ простір $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ є гільбертовим із скалярним добутком

$$\langle u, v \rangle_2 = (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Для такого гільбертового простору була доведена наступна теорема.

Теорема 4.8 (Рісс). Нехай $f \in B(L^2(\Omega), \mathbf{C})$. Тоді

$$\exists 1 v \in L^2(\Omega) : \quad f(u) = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx \quad \forall u \in L^2(\Omega). \quad \triangleleft \triangleright$$

Аналогічна теорема виконана для просторів $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ при $1 < p < \infty$.

Теорема 4.9. Нехай $f \in B(L^p(\Omega), \mathbf{C})$ при $1 < p < \infty$. Тоді

$$\exists 1 v \in L^q(\Omega) : \quad f(u) = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx \quad \forall u \in L^p(\Omega),$$

де $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Крім того, $\tilde{L}^\infty(\Omega) = B(L^1(\Omega), \mathbf{C})$, але $L^1(\Omega) \neq B(\tilde{L}^\infty(\Omega), \mathbf{C})$. $\triangleleft \triangleright$

Ця теорема означає, що простори $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ і $(L^q(\Omega), \|\cdot\|_q)$ взаємно спряжені:

$$L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega), \quad L^q(\Omega)^* = L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \quad \text{і} \quad 1 < p < \infty.$$

Крім того, $L^1(\Omega)^* = \tilde{L}^\infty(\Omega)$, але $\tilde{L}^\infty(\Omega)^* \neq L^1(\Omega)$. Зокрема, при $1 < p < \infty$ простір $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ є рефлексивним, оскільки

$$L^p(\Omega) = L^q(\Omega)^* = L^p(\Omega)^{**}.$$

У просторі $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ інтеграл є визначеним. Для визначення диференціювання на $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ необхідні додаткові визначення.

В4.10. Межа $\partial\Omega$ області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ має клас $C^k, k \geq 1$, якщо $\partial\Omega$ є компактною і для кожного $x \in \partial\Omega$ існує відкрита множина $U \subset \mathbf{R}^n, x \in U$ і взаємно однозначне відображення $\psi : B = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\} \rightarrow U$ такі, що

$$\psi \in C^k(\bar{B}), \quad \psi^{-1} \in C^k(\bar{U}), \quad \psi(B_+) = U \cap \Omega, \quad \psi(B_-) = U \cap (\mathbf{R} \setminus \bar{\Omega}), \quad \psi(B_0) = U \cap \partial\Omega,$$

де $B_+ = \{x \in B : x_n > 0\}$, $B_- = \{x \in B : x_n < 0\}$ і $B_0 = \{x \in B : x_n = 0\}$.

Область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ має ліпшицеву межу $\partial\Omega$, якщо $\psi \in \text{Lip}(\overline{B})$, $\psi^{-1} \in \text{Lip}(\overline{U})$, де, наприклад, за визначенням $\psi \in \text{Lip}(\overline{B})$, якщо

$$\exists L > 0 : |\psi(x) - \psi(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \overline{B}.$$

Теорема 4.11 (Радемахер.) $\psi \in \text{Lip}(\overline{B}) \Rightarrow \nabla\psi \in \tilde{L}^\infty(B)^n$. Зокрема, якобіан $J(\psi) \in \tilde{L}^\infty(B)$. $\triangleleft \triangleright$

Надалі розглядаються тільки області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, що мають ліпшицеві межі.

Визначимо на лінійному просторі

$$C^1(\overline{\Omega}) = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) : \nabla v \in C^0(\overline{\Omega})^n\}$$

норми

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_{W^{1,\infty}} = \max \{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \} \quad \text{при} \quad p = \infty,$$

де $L^p(\Omega)^n = L^p(\Omega) \times \dots \times L^p(\Omega) = \{ (f_1, \dots, f_n) : f_k \in L^p(\Omega), k = 1, \dots, n \}$.

В4.12. Поповнення нормованого простору $(C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \quad \text{при} \quad 1 \leq p \leq \infty$$

і називається простором *Соболева першого порядку* інтегрованих у ступені p (класів еквівалентних) функцій на Ω . Зокрема, для елементів із $W^{1,p}(\Omega)$ визначені інтеграл і диференціювання. У відповідності із наступним твердженням.

Теорема 4.13. Розглянемо градієнт ∇ як оператор із $(C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ в $(L^p(\Omega)^n, \|\cdot\|_{L^p(\Omega)^n})$ при $1 \leq p \leq \infty$. Тоді $\nabla \in B(C^1(\overline{\Omega}), L^p(\Omega)^n)$ і

$$\exists 1 \quad \overline{\nabla} \in B(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n) : \quad \overline{\nabla}(v) = \nabla(v) \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$$

та $\|\overline{\nabla}\|_{B(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n)} = 1$.

\triangleleft Нехай $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Тоді $\nabla u \in C^0(\overline{\Omega})^n \subset L^p(\Omega)^n$ і

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n} \leq \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \leq \max \{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \} = \|u\|_{W^{1,\infty}} \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

Залишається скористатися теоремою 4.1. \triangleright

В4.14. Нехай $u \in W^{1,p}(\Omega)$ при $1 \leq p \leq \infty$ і $E \subset \bar{\Omega}$. За визначенням

$$u \geq 0 \quad \text{на } E \quad \text{в } W^{1,p}(\Omega),$$

якщо існує послідовність $\{u_n\} \subset C^1(\bar{\Omega})$ така, що

$$u_n \geq 0 \quad \forall x \in E \quad \text{і} \quad u_n \rightarrow u \quad \text{у нормі } W^{1,p}(\Omega).$$

Якщо $-u \geq 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$, тоді пишуть $u \leq 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$. Відповідно, якщо $u \geq 0$ і $u \leq 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$, тоді за визначенням

$$u = 0 \quad \text{на } E \quad \text{в } W^{1,p}(\Omega).$$

Для цілого $l \geq 1$ визначимо лінійні простори

$$C^l(\bar{\Omega}) = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : \nabla v \in C^0(\bar{\Omega})^n, \dots, \nabla^l v \in C^0(\bar{\Omega})^{n^l}\},$$

$$C^l(\mathbf{R}^n) = \{v \in C^0(\mathbf{R}^n) : \nabla v \in C^0(\mathbf{R}^n)^n, \dots, \nabla^l v \in C^0(\mathbf{R}^n)^{n^l}\},$$

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{l=1}^{\infty} C^l(\bar{\Omega}), \quad C^\infty(\mathbf{R}^n) = \bigcap_{l=1}^{\infty} C^l(\mathbf{R}^n)$$

і розглянемо лінійний простір функцій, що є нескінченно диференційованими і мають компактні носії

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \text{supp } v \subset \Omega\},$$

де $\text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}}$ називається носієм функції v .

Теорема 4.15. Простір $C_0^\infty(\Omega)$ щільний в $L^p(\Omega)$ при $1 \leq p < \infty$, тобто для $f \in L^p(\Omega)$ і

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega) : \quad \|f - f_\varepsilon\|_p < \varepsilon.$$

Простір $C^\infty(\bar{\Omega})$ щільний в $W^{1,p}(\Omega)$ при $1 \leq p \leq \infty$ і в $L^\infty(\Omega)$. Зокрема, ці простори можуть бути визначені як поповнення $C_0^\infty(\Omega)$ і $C^\infty(\bar{\Omega})$:

$$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p) = (\overline{C_0^\infty(\Omega)}, \|\cdot\|_p), \quad (L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty) = (\overline{C^\infty(\bar{\Omega})}, \|\cdot\|_\infty),$$

$$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) = (\overline{C^\infty(\bar{\Omega})}, \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \quad \text{при} \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad \triangleleft \triangleright$$

В4.16. Поповнення нормованого простору $(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \quad \text{при} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

За визначенням, якщо $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ тоді

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Крім того, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ є повним підпростором в $W^{1,p}(\Omega)$.

(Завдання для самостійної роботи:

1. Нехай $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$, $s > 0$ і

$$\psi(x) = |x|^{-s}.$$

Перевірити, що

$$\psi \in L^p(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad ps < n; \quad \psi \in W^{1,p}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad p(s+1) < n;$$

$$(\psi - 1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad p(s+1) < n.$$

2. Нехай $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$ і

$$u(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Перевірити, що $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)^n$ при $1 \leq p < n$.

3. Нехай $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1/2\}$, $0 < s < 1/2$ і

$$v(x) = |\lg|x||^s.$$

Перевірити, що $v(x) \in W^{1,2}(\Omega)$, $v(x) \in L^p(\Omega)$ при $1 \leq p < \infty$ але $v(x) \notin \tilde{L}^\infty(\Omega)$.

Для фіксованого цілого $m \geq 1$ визначимо на лінійному просторі $C^\infty(\bar{\Omega})$ норми

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}^p + \dots + \|\nabla^m u\|_{L^p(\Omega)^{n^m}}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max \left\{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n}, \dots, \|\nabla^m u\|_{L^\infty(\Omega)^{n^m}} \right\} \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

В4.17. Поповнення нормованого простору $(C^\infty(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}) \quad \text{при} \quad 1 \leq p \leq \infty$$

і називається простором *Соболева m -го порядку* інтегрованих у ступені p (класів еквівалентних) функцій на Ω .

Поповнення нормованого простору $(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W_0^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}) \quad \text{при} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Таким чином, $W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ є повним підпростором в $W^{m,p}(\Omega)$.

Теорема 4.18. Розглянемо m -градієнт ∇^m як оператор із $(C^\infty(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ в $(L^p(\Omega)^{n^m}, \|\cdot\|_{L^p(\Omega)^{n^m}})$ при $1 \leq p \leq \infty$. Тоді $\nabla^m \in B(C^\infty(\bar{\Omega}), L^p(\Omega)^{n^m})$ і

$$\exists 1 \quad \bar{\nabla}^m \in B(W^{m,p}(\Omega), L^p(\Omega)^{n^m}) :$$

$$\bar{\nabla}^m(v) = \nabla^m(v) \quad \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega}) \quad \text{і} \quad \|\bar{\nabla}^m\|_{B(W^{m,p}(\Omega), L^p(\Omega)^{n^m})} = 1.$$

◁ Нехай $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Тоді $\nabla^m u \in C^\infty(\bar{\Omega})^{n^m} \subset L^p(\Omega)^{n^m}$ і

$$\|\nabla^m u\|_{L^p(\Omega)^{n^m}} \leq \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \dots + \|\nabla^m u\|_{L^p(\Omega)^{n^m}}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\nabla^m u\|_{L^\infty(\Omega)^{n^m}} \leq \max \{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \dots, \|\nabla^m u\|_{L^\infty(\Omega)^{n^m}} \} = \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

Залишається скористатися теоремою 4.1. ▷

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що

$$\bar{\nabla}^m(v) = \bar{\nabla}^m(v) \quad \forall v \in W^{m,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad 1 \leq p \leq \infty.)$$

Відомо, що $W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : \bar{\nabla} u \in L^p(\Omega)^n, \dots, \bar{\nabla}^m u \in L^p(\Omega)^{n^m} \}$ при $1 \leq p < \infty$. Визначимо

$$\widetilde{W}^{m,\infty}(\Omega) = \{ u \in \widetilde{L}^\infty(\Omega) : \bar{\nabla} u \in \widetilde{L}^\infty(\Omega)^n, \dots, \bar{\nabla}^m u \in \widetilde{L}^\infty(\Omega)^{n^m} \},$$

і $\widetilde{W}_0^{m,\infty}(\Omega) = \widetilde{W}^{m,\infty}(\Omega) \cap W_0^{m,1}(\Omega)$. Тоді $W^{m,\infty}(\Omega) \subset \widetilde{W}^{m,\infty}(\Omega)$.

При $p = 2$ простір $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ є гільбертовим із скалярним добутком

$$(u, v)_{W^{m,p}(\Omega)} = \int_{\Omega} u \bar{v} dx + \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \bar{v}) dx + \dots + \int_{\Omega} (\nabla^m u, \nabla^m \bar{v}) dx,$$

де зазвичай пишуть ∇ замість $\bar{\nabla}$. Такі гільбертові простори позначаються також

$$(H^m(\Omega), \|\cdot\|_{H^m(\Omega)}) = (W^{m,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,2}(\Omega)})$$

і $(H_0^m(\Omega), \|\cdot\|_{H^m(\Omega)}) = (W_0^{m,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,2}(\Omega)})$.

5. Ряди Фур'є.

Лінійний простір H над \mathbf{C} (або \mathbf{R}) із деяким скалярним добутком $\varphi(\cdot, \cdot)$ називається *передгільбертовим простором* (H, φ) . Скалярний добуток є спряжено-білінійним функціоналом $\varphi : H \times H \rightarrow \mathbf{C}$ таким, що $\forall a, b \in H$ цей функціонал задовольняє умовам

$$i) \quad \varphi(a, b) = \overline{\varphi(b, a)}; \quad ii) \quad \varphi(a, a) \geq 0;$$

$$iii) \quad \varphi(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = \theta.$$

Передгільбертовий простір (H, φ) є нормованим простором $(H, \|\cdot\|_H)$, де

$$\|a\|_H = \sqrt{\varphi(a, a)} \quad \forall a \in H.$$

Повний передгільбертовий простір (H, φ) називається *гільбертовим простором*.

Зазвичай позначають $\varphi(a, b) = \langle a, b \rangle_H$, $\varphi(a, b) = (a, b)_H$ або $\varphi(a, b) = (a, b)$.

Нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *сепарабельним*, якщо існують лінійно незалежні $\{w_i\}_{i=1}^\infty \subset L$ (тобто $\{w_i\}_{i=1}^m$ лінійно незалежні для $m \in \mathbf{N}$) такі, що лінійний простір

$$\tilde{L} = \left\{ v \in L : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{C}, \quad m \in \mathbf{N} \right\}$$

є щільним в L . Тобто $\forall v \in L, \forall \varepsilon > 0$ знайдуться $m \in \mathbf{N}$ і $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ такі, що

$$\left\| v - \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i \right\|_L < \varepsilon.$$

Якщо $\{w_i\}_{i=1}^m$ лінійно незалежні, тоді

$$\overline{\{w_i\}_{i=1}^m} = \text{Lin}\{w_1, \dots, w_m\} = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{C} \right\}$$

називається *лінійною оболонкою* елементів $\{w_i\}_{i=1}^m$. Таким чином, $\tilde{L} = \bigcup_m \overline{\{w_i\}_{i=1}^m}$

Система елементів $\{e_i\}_{i=1}^\infty \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ називається *ортонормованою*, якщо

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \text{для } i \neq j \quad \text{і} \quad \|e_i\| = 1 \quad \text{для } i, j = 1, 2, \dots$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що ортонормована система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є лінійно незалежною.)

Теорема 5.1 (Шмідт). Нехай система елементів $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ над \mathbb{C} є лінійно незалежною.

Тоді існує ортонормована система $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ така, що

$$e_m \in \overline{\{w_i\}_{i=1}^m} = \text{Lin}\{w_1, \dots, w_m\}$$

для кожного $m = 1, 2, \dots$, тобто $\overline{\{e_j\}_{j=1}^m} = \overline{\{w_i\}_{i=1}^m}$ для кожного $m = 1, 2, \dots$

◁ Визначимо $e_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$, де $\|w_1\| \neq 0$, оскільки система $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ є лінійно незалежною. Нехай

$$g_2 = w_2 - \alpha_{21}e_1.$$

Виберемо $\alpha_{21} \in \mathbb{C}$ так, щоб

$$\langle g_2, e_1 \rangle = 0.$$

Тоді $\alpha_{21} = \langle w_2, e_1 \rangle$ визначено однозначно. Визначимо $e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} \in \overline{\{w_i\}_{i=1}^2}$, де $\|g_2\| \neq 0$, оскільки, якщо $g_2 = \theta$, тоді w_1, w_2 лінійно залежні.

Далі використовується індукція. Нехай e_1, \dots, e_{k-1} вже вибрані. Розглянемо

$$g_k = w_k - \alpha_{k1}e_1 - \alpha_{k2}e_2 - \dots - \alpha_{k,k-1}e_{k-1}$$

і виберемо $\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{k,k-1} \in \mathbb{C}$ так, щоб

$$\langle g_k, e_1 \rangle = 0, \quad \langle g_k, e_2 \rangle = 0, \quad \dots, \quad \langle g_k, e_{k-1} \rangle = 0.$$

Тоді $\alpha_{k1} = \langle w_k, e_1 \rangle, \dots, \alpha_{k,k-1} = \langle w_k, e_{k-1} \rangle$ визначені однозначно. Таким чином, $e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|} \in \overline{\{w_i\}_{i=1}^k}$, де $g_k \neq \theta$, оскільки w_1, w_2, \dots, w_k лінійно незалежні. ▷

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що система $\{e^{nx2\pi\sqrt{-1}} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \subset L^2(0, 1)$ є ортонормованою.)

В5.2. Нехай система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є ортонормованою і $h \in H$. Тоді числа

$$\phi_k = \langle h, e_k \rangle$$

називаються коефіцієнтами Фур'є елемента $h \in H$ по системі $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k, \quad \text{де} \quad \phi_k = \langle h, e_k \rangle,$$

називається *рядом Фур'є* елементу $h \in H$ по системі $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 5.3. *Нехай система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є ортонормованою і $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ є коефіцієнтами Фур'є елементу $h \in H$. Тоді ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2$ є збіжним і*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \leq \|h\|_H^2. \quad (5.1)$$

◁ Для $m \in \mathbf{N}$ безпосередньо перевіряється, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^m \phi_k e_k \right\|_H^2 = \|h\|_H^2 - \sum_{k=1}^m |\phi_k|^2 \quad (5.2)$$

і тому

$$\sum_{k=1}^m |\phi_k|^2 \leq \|h\|_H^2. \quad \triangleright$$

Нерівність (5.1) називається *нерівністю Бесселя*.

Із рівності (5.2) для кожного $m \in \mathbf{N}$ відразу випливає, що

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \phi_k e_k \rightarrow h \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty \quad (\text{тобто} \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k) \\ \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 = \|h\|_H^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ця рівність називається *рівністю Парсеваля-Стеклова*. Якщо рівність (5.3) виконується для кожного $h \in H$, тоді ортонормована система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ називається *замкнутою в сенсі Стеклова*.

Теорема 5.4 (про мінімальність коефіцієнтів Фур'є) *Нехай система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є ортонормованою і $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ є коефіцієнтами Фур'є елементу $h \in H$. Тоді для кожного $m \in \mathbf{N}$ маємо*

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \left\| h - \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k \right\|_H^2 = \left\| h - \sum_{k=1}^m \phi_k e_k \right\|_H^2.$$

◁ Для $m \in \mathbf{N}$ безпосередньо перевіряється, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k \right\|_H^2 = \|h\|_H^2 - \sum_{k=1}^m |\phi_k|^2 + \sum_{k=1}^m |\phi_k - \alpha_k|^2$$

і тому мінімум правої частини досягається при $\alpha_k = \phi_k$ для $k = 1, \dots, m$. \triangleright

Теорема 5.5. *Нехай система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є ортонормованою і щільною в H . Тоді для кожного $h \in H$ маємо*

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k.$$

◁ Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ є щільною в H . Тобто $\forall h \in H, \forall \varepsilon > 0$ знайдуться $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ і $\alpha_1, \dots, \alpha_{N_\varepsilon}$ такі, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \alpha_k e_k \right\|_H^2 < \varepsilon.$$

Звідки та із мінімальності коефіцієнтів Фур'є $\phi_k = \langle h, e_k \rangle$ випливає, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \phi_k e_k \right\|_H^2 < \varepsilon.$$

Крім того, для $m \geq N_\varepsilon$ із рівності (5.2) маємо

$$0 \leq \left\| h - \sum_{k=1}^m \phi_k e_k \right\|_H^2 = \|h\|_H^2 - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |\phi_k|^2 - \sum_{k=N_\varepsilon+1}^m |\phi_k|^2 < \varepsilon - \sum_{k=N_\varepsilon+1}^m |\phi_k|^2 < \varepsilon.$$

Таким чином,

$$\sum_{k=1}^m \phi_k e_k \rightarrow h \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty \quad (\text{тобто} \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k) \quad \triangleright$$

Теорема 5.6 (Фур'є). *Нехай $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ така, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ збігається. Тоді для кожної ортонормованої системи $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ гільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ збігається і є рядом Фур'є деякого $h \in H$, тобто*

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \quad \text{де} \quad \alpha_k = \langle h, e_k \rangle.$$

◁ Для $m, p \in \mathbf{N}$ із рівності

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{m+p} \alpha_k e_k \right\|_H^2 = \sum_{k=m+1}^{m+p} |\alpha_k|^2$$

випливає, що послідовність $s_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k$ є фундаментальною. Простір H є повним і тому $\exists 1 h \in H : h = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.

Крім того, для $k \in \mathbf{N}$ із неперервності скалярного добутку випливає, що

$$\langle h, e_k \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle s_m, e_k \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i, e_k \right\rangle = \alpha_k. \quad \triangleright$$

Теорема 5.7 (про щільність у гільбертовому просторі). *Нехай H є гільбертовим простором. Тоді ортонормована система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ щільна в H*

$$\Leftrightarrow h \in H : \langle h, e_k \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad h = \theta.$$

$\triangleleft (\Rightarrow)$ Нехай система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ щільна в H , тоді $\forall h \in H$ виконана рівність Парсеваля-Стеклова (5.3) і тому $\langle h, e_k \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \|h\|_H = 0$. $(\Rightarrow) \triangleright$

$\triangleleft (\Leftarrow)$ Нехай $h \in H$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k, \quad \text{де} \quad \phi_k = \langle h, e_k \rangle,$$

є рядом Фур'є для h . Із нерівності Бесселя (5.1) випливає, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2$ збігається. Тоді із теореми 5.6 отримуємо, що $\exists h_0 \in H$:

$$h_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k, \quad \text{де} \quad \phi_k = \langle h_0, e_k \rangle.$$

Таким чином, $\langle h - h_0, e_k \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}$ і тому $h = h_0$, тобто кожен $h \in H$ може бути наближений лінійною комбінацією

$$\sum_{k=1}^m \phi_k e_k$$

елементів системи $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Це означає, що $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ щільна в H . $(\Leftarrow) \triangleright$

В5.8. Система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору L називається *базисом*, якщо для кожного $l \in L$ знайдуться $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$:

$$l = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

Теорема 5.9. *У кожному сепарабельному передгільбертовому просторі H існує ортонормований базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$.*

\triangleleft Ця теорема випливає із визначень та теорем 5.1 і 5.5. \triangleright

Теорема 5.10 (про еквівалентність). *Кожен сепарабельний гільбертовий простір H над \mathbf{C} (відповідно над \mathbf{R}) є еквівалентним гільбертовому простору*

$$l^2(\mathbf{C}) = \left\{ \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty, \quad \alpha_k \in \mathbf{C}, \quad k = 1, \dots, n, \dots \right\}$$

(відповідно $l^2(\mathbf{R})$).

◁ В H існує ортонормований базис $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ згідно з теоремою 5.9. Визначимо відображення $\varphi : H \rightarrow l^2(\mathbf{C})$ співвідношенням

$$h \mapsto \{\phi_k\}_{k=1}^\infty, \quad \text{де} \quad \phi_k = \langle h, e_k \rangle.$$

Із теореми 5.3 випливає, що це відображення визначене (тобто $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbf{C})$), а із теореми 5.6 випливає, що відображення φ є лінійним і взаємно однозначним.

Крім того, якщо $h \mapsto \varphi(h) = \{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ і $l \mapsto \varphi(l) = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$, то із неперервності скалярного добутку випливає, що

$$\begin{aligned} \langle h, l \rangle_H &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^m \phi_k e_k, \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \right\rangle_H = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \phi_k \bar{\alpha}_k = \sum_{k=1}^\infty \phi_k \bar{\alpha}_k = \langle \varphi(h), \varphi(l) \rangle_{l^2}, \\ \|h\|_H^2 &= \sum_{k=1}^\infty |\phi_k|^2 = \|\varphi(h)\|_{l^2}^2, \quad \|l\|_H^2 = \sum_{k=1}^\infty |\alpha_k|^2 = \|\varphi(l)\|_{l^2}^2, \end{aligned}$$

тобто відображення φ зберігає скалярний добуток і норми. ▷

Із теореми 5.10 безпосередньо випливає наступне твердження.

Теорема 5.11 (про еквівалентність гільбертових просторів). *Сепарабельні гільбертові простори H_1 і H_2 над \mathbf{C} (відповідно над \mathbf{R}) є еквівалентними.* ◁ ▷

Із наведених теорем безпосередньо випливає також наступне твердження.

Теорема 5.12 (про поповнення передгільбертових просторів). *Нехай визначена ортонормована система $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ у сепарабельному передгільбертовому просторі $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$. Тоді поповнення цього простору $(\bar{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ визначається рівністю*

$$\bar{H} = \left\{ h = \sum_{k=1}^\infty \phi_k e_k : \{\phi_k\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbf{C}) \right\}$$

та

$$\langle h, l \rangle_H = \sum_{k=1}^\infty \phi_k \bar{\alpha}_k \quad \text{для} \quad h = \sum_{k=1}^\infty \phi_k e_k \quad \text{і} \quad l = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k e_k. \quad \triangleleft \triangleright$$

Наприклад, при $i = \sqrt{-1}$ система $\{e^{x m 2\pi i} : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \subset C^0[0, 1]$ є ортонормованою (щодо $L^2(0, 1)$ -добутку) у сепарабельному просторі $C^0[0, 1]$ та

$$\overline{C^0[0, 1]} = L^2(0, 1) = \left\{ h(x) = \sum_{m=-\infty}^\infty \phi_m e^{x m 2\pi i} : \sum_{m=-\infty}^\infty |\phi_m|^2 < \infty \right\},$$

$$\langle h, l \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 h(x) \bar{l}(x) dx = \sum_{m=-\infty}^\infty \phi_m \bar{\alpha}_m, \quad \|h\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{m=-\infty}^\infty |\phi_m|^2$$

для $h = \sum_{m=-\infty}^\infty \phi_m e^{x m 2\pi i}$ і $l = \sum_{m=-\infty}^\infty \alpha_m e^{x m 2\pi i}$ (де $e^{\varrho i} = \cos \varrho + i \sin \varrho$, $\varrho \in [0, 2\pi]$).

Аналогічно, ця система $\{e^{x m 2\pi i} : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \subset C^\infty[0, 1]$ є ортонормованою в $C^\infty[0, 1]$ (щодо $L^2(0, 1)$ -добутку) і тому

$$\overline{C^\infty[0, 1]} = L^2(0, 1) = \left\{ h(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m e^{x m 2\pi i} : \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi_m|^2 < \infty \right\}.$$

Більш того, сепарабельний простір *тригонометричних поліномів*

$$\text{Trig}[0, 1] = \left\{ h \in C^\infty[0, 1] : h(x) = \sum_{m=-M}^M \phi_m e^{x m 2\pi i}, \quad \phi_m \in \mathbf{C}, \quad M \in \mathbf{N} \right\}$$

є щільним в $L^2(0, 1)$ (оскільки $\overline{C^0[0, 1]} = L^2(0, 1)$). Таким чином, отримуємо

$$\overline{\text{Trig}[0, 1]} = L^2(0, 1) = \left\{ h(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m e^{x m 2\pi i} : \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi_m|^2 < \infty \right\}.$$

Для $x \in \mathbf{R}^n$ і $m \in \mathbf{Z}^n$ визначимо

$$e^{(x, m) 2\pi i} = e^{(x_1 m_1 + \dots + x_n m_n) 2\pi i} = e^{x_1 m_1 2\pi i} \cdot \dots \cdot e^{x_n m_n 2\pi i},$$

$$\text{Trig}[0, 1]^n = \left\{ h \in C^\infty[0, 1]^n : h(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n : |m| \leq M} \phi_m e^{(x, m) 2\pi i}, \quad \phi_m \in \mathbf{C}, \quad M \in \mathbf{N} \right\}.$$

Безпосередньо перевіряється, що система $\{e^{(x, m) 2\pi i} : m \in \mathbf{Z}^n\} \subset \text{Trig}[0, 1]^n$ є ортонормованою в $\text{Trig}[0, 1]^n$ (щодо $L^2((0, 1)^n)$ -добутку) і тому

$$\overline{\text{Trig}[0, 1]^n} = L^2((0, 1)^n) = \left\{ h(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \phi_m e^{(x, m) 2\pi i} : \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} |\phi_m|^2 < \infty \right\},$$

$$\langle h, l \rangle_{L^2((0, 1)^n)} = \int_{(0, 1)^n} h(x) \overline{l(x)} dx = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \phi_m \bar{\alpha}_m, \quad \|h\|_{L^2((0, 1)^n)}^2 = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} |\phi_m|^2$$

для $h = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \phi_m e^{(x, m) 2\pi i}$ і $l = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i}$, де $\phi_m = \int_{(0, 1)^n} h(x) e^{-(x, m) 2\pi i} dx$.

Для кожного $k = 1, \dots, n$ функція $h(x) \in \text{Trig}[0, 1]^n$ задовольняє умовам

$$h(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_k + 1, \dots, x_n),$$

які називаються умовами *1-періодичності* та можуть бути записані у вигляді $h(x) = h(x + m) \forall x \in \mathbf{R}^n, \forall m \in \mathbf{Z}^n$. Крім того, для кожного $l = 1, \dots, n$ і $k = 1, \dots, n$ функція $h(x) \in \text{Trig}[0, 1]^n$ задовольняє також умовам

$$\left. \frac{\partial^l h(x)}{\partial x_k} \right|_{x_k=0} = \left. \frac{\partial^l h(x)}{\partial x_k} \right|_{x_k=1},$$

які називаються умовами *1-періодичності для нормальних похідних*.

Розглянемо лінійний простір $\text{Trig}[0, 1]^n$ над \mathbf{C} як передгільбертовий із скалярним добутком

$$(u, v)_{H^1((0,1)^n)} = \int_{(0,1)^n} u(x) \overline{v(x)} dx + \int_{(0,1)^n} (\nabla u(x), \nabla \overline{v(x)}) dx.$$

Для $u(x) = \sum_{\{m \in \mathbf{Z}^n : |m| \leq M\}} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} \in \text{Trig}[0, 1]^n$ маємо

$$\|u\|_{H^1((0,1)^n)}^2 = (u, u)_{H^1((0,1)^n)} = \sum_{\{m \in \mathbf{Z}^n : |m| \leq M\}} (1 + |2\pi m|^2) |\alpha_m|^2,$$

оскільки

$$\nabla u(x) = \sum_{\{m \in \mathbf{Z}^n : |m| \leq M\}} (2\pi m i) \alpha_m e^{(x,m)2\pi i}.$$

В5.13. Поповнення нормованого простору $(\text{Trig}[0, 1]^n, \|\cdot\|_{H^1((0,1)^n)})$ позначається

$$(H_{per}^1((0, 1)^n), \|\cdot\|_{H^1((0,1)^n)})$$

і називається простором *Соболева першого порядку* інтегрованих у ступені 2 (класів еквівалентних) 1-періодичних функцій на $(0, 1)^n$.

За визначенням $H_{per}^1((0, 1)^n) \subset H^1((0, 1)^n)$, але $H_{per}^1((0, 1)^n) \neq H^1((0, 1)^n)$, оскільки функції із $H_{per}^1((0, 1)^n)$ зберігають в певному сенсі умови 1-періодичності.

Безпосередньо перевіряється також, що

$$H_{per}^1((0, 1)^n) = \left\{ u(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} : \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} (1 + |2\pi m|^2) |\alpha_m|^2 < \infty \right\}.$$

Для $s \in \mathbf{R}$ та $u(x) = \sum_{\{m \in \mathbf{Z}^n : |m| \leq M\}} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} \in \text{Trig}[0, 1]^n$ визначені також норми

$$\|u\|_{H^s((0,1)^n)}^2 = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} (1 + |2\pi m|^2)^s |\alpha_m|^2.$$

В5.14. Поповнення нормованого простору $(\text{Trig}[0, 1]^n, \|\cdot\|_{H^s((0,1)^n)})$ позначається

$$(H_{per}^s((0, 1)^n), \|\cdot\|_{H^s((0,1)^n)})$$

і називається простором *Соболева s-го порядку* інтегрованих у ступені 2 (класів еквівалентних) 1-періодичних функцій на $(0, 1)^n$.

Таким чином, для фіксованого $s \in \mathbf{R}$ за визначенням

$$H_{per}^s((0, 1)^n) = \left\{ u(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} : \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} (1 + |2\pi m|^2)^s |\alpha_m|^2 < \infty \right\}$$

є сепарабельним гільбертовим простором функцій вигляду $u(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i}$ (де ряд збігається у нормі $\|\cdot\|_{H^s((0,1)^n)}$ і коефіцієнти $\alpha_m \in \mathbf{C}$ для $m \in \mathbf{Z}^n$ такі, що $\sum_{m \in \mathbf{Z}^n} (1 + |2\pi m|^2)^s |\alpha_m|^2 < \infty$) із скалярним добутком

$$\langle h, l \rangle_{H_{per}^s((0,1)^n)} = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} (1 + |2\pi m|^2)^s \alpha_m \bar{\beta}_m$$

для $h(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i}$ і $l(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \beta_m e^{(x,m)2\pi i}$. Зокрема, маємо

$$H_{per}^0((0,1)^n) = L^2((0,1)^n) \quad \text{і} \quad H_{per}^s((0,1)^n) \subset H_{per}^{s'}((0,1)^n) \quad \text{при} \quad s > s'.$$

Для $s \neq 0$ система $\{e^{(x,m)2\pi i}, m \in \mathbf{Z}^n\}$ неортонормована в $H_{per}^s((0,1)^n)$, але

$$e_m(x) = (1 + |2\pi m|^2)^{-s/2} e^{(x,m)2\pi i} \quad \text{для} \quad m \in \mathbf{Z}^n$$

є ортонормованою системою в $H_{per}^s((0,1)^n)$, оскільки $\langle e_m, e_m \rangle_{H_{per}^s((0,1)^n)} = 1$. Ряд Фур'є функції $u(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} \in H_{per}^s((0,1)^n)$ за цією системою має вигляд

$$u(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \phi_m e_m = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \phi_m (1 + |2\pi m|^2)^{-s/2} e^{(x,m)2\pi i}$$

де

$$\phi_m = \langle u, e_m \rangle_{H_{per}^s((0,1)^n)} = (1 + |2\pi m|^2)^{s/2} \alpha_m \quad \text{для} \quad m \in \mathbf{Z}^n$$

є коефіцієнтами Фур'є, які належать $l^2(\mathbf{Z}^n, \mathbf{C})$ відповідно до теореми 5.10.

Таким чином, для кожного $s \in \mathbf{R}$ система $\{e^{(x,m)2\pi i}, m \in \mathbf{Z}^n\}$ є базисом у просторі Соболева $H_{per}^s((0,1)^n)$ із коефіцієнтами розкладання $\{\alpha_m\}_{m \in \mathbf{Z}^n}$ для $u = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i}$, які визначаються через коефіцієнти Фур'є $\{\phi_m\}_{m \in \mathbf{Z}^n}$ рівностями

$$\alpha_m = (1 + |2\pi m|^2)^{-s/2} \phi_m \quad \text{та} \quad \alpha_m = \langle u, e^{(x,m)2\pi i} \rangle_{L^2((0,1)^n)} \quad \text{для} \quad m \in \mathbf{Z}^n.$$

Для $h = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \phi_m e^{(x,m)2\pi i}$, $l = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} \in L^2((0,1)^n)$ скалярний добуток визначається формулою

$$\langle h, l \rangle_{L^2((0,1)^n)} = \int_{(0,1)^n} h(x) \overline{l(x)} dx = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \phi_m \bar{\alpha}_m.$$

Для фіксованого $s \in \mathbf{R}$ із нерівності Коші-Буняковського-Шварца випливає, що

$$\begin{aligned} |\langle h, l \rangle_{L^2((0,1)^n)}| &= \left| \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} (1 + |2\pi m|^2)^{-s/2} \phi_m (1 + |2\pi m|^2)^{s/2} \bar{\alpha}_m \right| \leq \quad (5.4) \\ &\leq \|h\|_{H_{per}^{-s}((0,1)^n)} \|l\|_{H_{per}^s((0,1)^n)}, \end{aligned}$$

тому вираз $\langle h, l \rangle_{L^2((0,1)^n)}$ є визначеним і коли $h \in H_{per}^{-s}((0,1)^n)$ та $l \in H_{per}^s((0,1)^n)$. Такий вираз називається *дуальністю* між $H_{per}^{-s}((0,1)^n)$ і $H_{per}^s((0,1)^n)$ та позначається

$$\langle h, l \rangle_s = \langle h, l \rangle_{H_{per}^{-s}((0,1)^n), H_{per}^s((0,1)^n)}.$$

Таким чином, для $h = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} \in H_{per}^{-s}((0,1)^n)$ при $s \in \mathbf{R}$ є визначеним "узагальнений" інтеграл

$$\int_{(0,1)^n} h(x) dx = \langle h, 1 \rangle_s = \alpha_0,$$

який співпадає із "звичайним" інтегралом при $s = 0$ та задовольняє нерівності

$$\left| \int_{(0,1)^n} h(x) dx \right| \leq \|h\|_{H_{per}^{-s}((0,1)^n)}.$$

Зокрема, із цієї нерівності випливає, що можна визначити "узагальнений" інтеграл також як продовження по неперервності оператора "звичайного" інтегрування, що розглядається як обмежений оператор із $(\text{Trig}[0,1]^n, \|\cdot\|_{H_{per}^{-s}((0,1)^n)})$ в \mathbf{C} .

Крім того, із нерівності (5.4) і теореми Рісса випливає, що простори $H_{per}^{-s}((0,1)^n)$ та $H_{per}^s((0,1)^n)$ є взаємно спряженими, тобто

$$H_{per}^{-s}((0,1)^n)^* = H_{per}^s((0,1)^n) \quad \text{та} \quad H_{per}^s((0,1)^n)^* = H_{per}^{-s}((0,1)^n).$$

Втім, кожен сепарабельний гільбертовий простір можна ототожнити із $l^2(\mathbf{C})$, але корисно розглядати і функції із $H_{per}^s((0,1)^n)$, оскільки показник s є показником *регулярності* функцій, що буде пояснено надалі прикладами.

Для кожного $s \in \mathbf{R}$ із теореми 3.15 випливає, що

$$H_{per}^s((0,1)^n) = \mathbf{C} \oplus H_{pe*}^s((0,1)^n),$$

де

$$\begin{aligned} H_{pe*}^s((0,1)^n) &= \mathbf{C}^\perp = \{v \in H_{per}^s((0,1)^n) : \langle v, l \rangle_{H_{per}^s((0,1)^n)} = 0 \quad \forall l \in \mathbf{C}\} = \\ &= \{v(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} \in H_{per}^s((0,1)^n) : \alpha_0 = 0\}. \end{aligned}$$

Для $Z_*^n = Z^n \setminus \{0\}$, фіксованого $s \in \mathbf{R}$ і $u(x) = \sum_{m \in Z_*^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} \in H_{pe*}^s((0,1)^n)$ визначені норми

$$\|u\|_{H_{per}^s((0,1)^n)}^2 = \sum_{m \in Z_*^n} (1 + |2\pi m|^2)^s |\alpha_m|^2$$

і

$$\|u\|_{*s}^2 = \|u\|_{H_{pe*}^s((0,1)^n)}^2 = \sum_{m \in Z_*^n} |m|^{2s} |\alpha_m|^2.$$

Теорема 5.15 (про еквівалентність Пуанкаре норм Соболева для 1-періодичних функцій). Для фіксованого $s \in \mathbf{R}$ на просторі $H_{pe*}^s((0,1)^n)$ норми $\|\cdot\|_{*s}$ і $\|\cdot\|_{H_{per}^s((0,1)^n)}$ є еквівалентними, тобто знайдуться постійні $\alpha, \beta > 0$ такі, що

$$\alpha \|u\|_{*s} \leq \|u\|_{H_{per}^s((0,1)^n)} \leq \beta \|u\|_{*s} \quad (5.5)$$

для кожного $u \in H_{per}^s((0,1)^n)$.

◁ Наприклад, для $s > 0$ і кожного $m \in \mathbf{Z}_*^n$ маємо нерівності

$$|m|^{2s} \leq (1 + |2\pi m|^2)^s \leq (1 + 4\pi^2)^s |m|^{2s}.$$

Тому для $u = \sum_{m \in Z_*^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} \in H_{pe*}^s((0,1)^n)$ отримуємо

$$\|u\|_{*s}^2 = \sum_{m \in Z_*^n} |m|^{2s} |\alpha_m|^2 \leq \sum_{m \in Z_*^n} (1 + |2\pi m|^2)^s |\alpha_m|^2 \leq (1 + 4\pi^2)^s \sum_{m \in Z_*^n} |m|^{2s} |\alpha_m|^2,$$

де ряди є збіжними, оскільки за визначенням

$$H_{pe*}^s((0,1)^n) = \left\{ u = \sum_{m \in Z_*^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} : \sum_{m \in Z_*^n} (1 + |2\pi m|^2)^s |\alpha_m|^2 < \infty \right\}.$$

Аналогічно розглядається випадок $s \leq 0$. ▷

При $s = 1$ нерівність (5.5) називається *нерівністю Пуанкаре*.

Таким чином, для фіксованого $s \in \mathbf{R}$ можна вважати, що

$$H_{pe*}^s((0,1)^n) = \left\{ u = \sum_{m \in Z_*^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} : \sum_{m \in Z_*^n} |m|^{2s} |\alpha_m|^2 < \infty \right\}$$

є сепарабельним гільбертовим простором із скалярним добутком

$$\langle h, l \rangle_{H_{per}^s((0,1)^n)} = \sum_{m \in Z_*^n} |m|^{2s} \alpha_m \bar{\beta}_m$$

для $h(x) = \sum_{m \in Z_*^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i}$ і $l(x) = \sum_{m \in Z_*^n} \beta_m e^{(x,m)2\pi i}$.

Приклад 5.16. Нехай $n = 1$ і $u = \chi_{[1/4, 3/4]}(x)$ є характеристичною функцією відрізка $[1/4, 3/4] \subset [0, 1]$. Обчислимо коефіцієнти розвинення цієї функції у ряд $u = \alpha_0 + \sum_{m \in \mathbf{Z}_*} \alpha_m e^{x m 2\pi i}$. За визначенням $\alpha_0 = 1/2$ і при $m \neq 0$ маємо

$$\alpha_m = \langle u, e^{2\pi i m x} \rangle_{L^2(0,1)} = \int_{1/4}^{3/4} e^{-2\pi i m x} dx = \frac{-1}{2\pi i m} e^{-2\pi i m x} \Big|_{1/4}^{3/4}.$$

Тому $\alpha_m = 0$ при $m = 2l$, $\alpha_m = -(2\pi m)^{-1}$ при $m = 4l + 1$ і $\alpha_m = (2\pi m)^{-1}$ при $m = 4l + 3$ для $l \in \mathbf{Z}_*$. Таким чином,

$$u = \frac{1}{2} - \sum_{m \in \mathbf{Z}_*: m=1 \bmod 4} (2\pi m)^{-1} e^{x m 2\pi i} + \sum_{m \in \mathbf{Z}_*: m=3 \bmod 4} (2\pi m)^{-1} e^{x m 2\pi i}$$

і

$$u \in H_{per}^s(0, 1) \quad \text{при} \quad s < \frac{1}{2},$$

оскільки

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}_*: m=1 \bmod 2} \frac{|m|^{2s}}{|2\pi m|^2} = \sum_{m \in \mathbf{Z}_*: m=1 \bmod 2} \frac{(2\pi)^{-2}}{|m|^{2-2s}} < \infty \quad \text{лише при} \quad s < \frac{1}{2}.$$

Теорема 5.17 (Соболева про вкладення для 1-періодичних функцій ($n = 1$)).

Нехай $n = 1$ і $u \in H_{per}^s(0, 1)$ при $\frac{1}{2} < s$. Тоді

$$u \in C^0[0, 1],$$

тобто $H_{per}^s(0, 1) \subset C^0[0, 1]$ у сенсі, що існує постійна C така, що для кожного $u \in H_{per}^s(0, 1)$ існує (єдиний) представник \tilde{u} класу u такий, що

$$\|\tilde{u}\|_{C^0[0,1]} \leq C \|u\|_{H_{per}^s(0,1)} \quad (\text{неперервність вкладення}).$$

◁ Можна вважати, що $u = \sum \alpha_m e^{x m 2\pi i} \in H_{pe*}^s(0, 1)$ при $\frac{1}{2} < s$. Тоді

$$|u|^2 = \left| \sum \alpha_m |m|^s |m|^{-s} e^{x m 2\pi i} \right|^2 \leq \left| \sum \alpha_m^2 |m|^{2s} \right| \left| \sum |m|^{-2s} \right| = c \|u\|_{*s}^2,$$

оскільки $c = \sum |m|^{-2s} < \infty$ при $\frac{1}{2} < s$. Таким чином, отримуємо

$$\|u\|_{C^0[0,1]} = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| \leq C \|u\|_{H_{per}^s(0,1)}$$

принаймні, якщо $u \in \text{Trig}[0, 1]$. Із цієї нерівності випливає, що послідовність

$$s_k = \sum_{m \in \mathbf{Z}_0: |m| \leq k} \alpha_m e^{x m 2\pi i}$$

є фундаментальною в $C^0[0, 1]$, оскільки ця послідовність є фундаментальною в $H_{per}^s(0, 1)$. Тому існує єдине $\tilde{u} \in C^0[0, 1]$ таке, що $\|\tilde{u} - s_k\|_{C^0[0,1]} \rightarrow 0$, оскільки $(C^0[0, 1], \|\cdot\|_{C^0[0,1]})$ є повним. Крім того, неперервна функція $\tilde{u} \in C^0[0, 1]$ є представником класу $u \in H_{pe*}^s(0, 1)$, оскільки цей клас однозначно визначається коефіцієнтами $\{\alpha_m\}_{m \in Z_*}$ у відповідності із теоремою 5.6. \triangleright

Приклад 5.18. Нехай $n = 2$ і $u = \chi_{[1/4, 3/4]^2}(x_1, x_2)$ є характеристичною функцією квадрату $[1/4, 3/4]^2 \subset [0, 1]^2$. Обчислимо коефіцієнти розвинення цієї функції у ряд $u = \alpha_0 + \sum_{m \in Z_*^2} \alpha_m e^{(x, m)2\pi i}$. За визначенням $\alpha_0 = 1/4$ і

$$\alpha_{(m_1, 0)} = \langle u, e^{2\pi i m_1 x_1} \rangle_{L^2(0,1)^2} = \frac{1}{2} \int_{1/4}^{3/4} e^{-2\pi i m_1 x_1} dx_1 = \frac{-1}{4\pi i m_1} e^{-2\pi i m_1 x_1} \Big|_{1/4}^{3/4},$$

$$\alpha_{(0, m_2)} = \langle u, e^{2\pi i m_2 x_2} \rangle_{L^2(0,1)^2} = \frac{1}{2} \int_{1/4}^{3/4} e^{-2\pi i m_2 x_2} dx_2 = \frac{-1}{4\pi i m_2} e^{-2\pi i m_2 x_2} \Big|_{1/4}^{3/4},$$

$$\alpha_{(m_1, m_2)} = 4 \alpha_{(m_1, 0)} \alpha_{(0, m_2)} = \frac{1}{4\pi m_1 \pi m_2} e^{-2\pi i m_1 x_1} \Big|_{1/4}^{3/4} e^{-2\pi i m_2 x_2} \Big|_{1/4}^{3/4}$$

при $m_1 \neq 0$ і $m_2 \neq 0$. Таким чином, як в прикладі 5.16, отримуємо

$$u \in H_{per}^s((0, 1)^2) \quad \text{при} \quad s < \frac{1}{2}.$$

(Завдання для самостійної роботи: Нехай $\varepsilon > 0$, $x \in (0, 1)^n$,

$$r = \left(\left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 + \dots + \left(x_n - \frac{1}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$u(x) = r^{-\varepsilon} - 2^\varepsilon$ при $r^{-\varepsilon} \geq 2^\varepsilon$ та $u(x) = 0$ при $r^{-\varepsilon} < 2^\varepsilon$. Перевірити, що

$$u \in H_{per}^s((0, 1)^2) \quad \text{при} \quad s < \frac{n}{2} - \varepsilon. \quad (5.6))$$

Теорема 5.19 (Соболева про вкладення для 1-періодичних функцій). *Нехай*

$$s > \frac{n}{2}.$$

Тоді для цілого l виконані неперервні вкладення

$$H_{per}^s((0, 1)^n) \subset C^0([0, 1]^n) \quad \text{та} \quad H_{per}^{s+l}((0, 1)^n) \subset C^l([0, 1]^n) \quad \text{при} \quad l \geq 0.$$

◁ Нехай $u = \sum \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} \in H_{pe^*}^{s+1}((0,1)^n)$ при $\frac{n}{2} < s$ і, наприклад, $l = 1$.

Тоді

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2 &= \left| \sum (2\pi i m) \alpha_m |m|^s |m|^{-s} e^{(x,m)2\pi i} \right|^2 \leq \\ &\leq \left| \sum \alpha_m^2 |m|^{2(s+1)} \right| \left| (2\pi)^2 \sum |m|^{-2s} \right| = c \|u\|_{*(s+1)}^2, \end{aligned}$$

оскільки $c = (2\pi)^2 \sum |m|^{-2s} < \infty$ при $\frac{n}{2} < s$. Дійсно, визначимо множину

$$M_j = \{ m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbf{Z}_*^n : \max_{1 \leq k \leq n} |m_k| = j \}.$$

Число елементів в M_j не перевищує $2n(2j)^{n-1}$. Наприклад, для $n = 2$ при $j \geq 2$ до M_j належать

$$(j, j), (j, j-1), (j, j-2), \dots, (j, 0), (j, -1), \dots, (j, -j),$$

$$-(j, j), -(j, j-1), -(j, j-2), \dots, -(j, 0), -(j, -1), \dots, -(j, -j)$$

і аналогічні вектори (m_1, m_2) , в яких m_1 і m_2 переставлені місцями, за виключенням $(j, j), (j, -j), (-j, j), (-j, -j)$. Для кожного $m \in M_j$ маємо $|m|^2 \geq j$ і тому

$$s_j = \sum_{m \in M_j} |m|^{-2s} \leq 2n (2j)^{n-1} j^{-2s}$$

для $j \geq 1$, звідки маємо, що

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}_*^n} |m|^{-2s} = \sum_{j=1}^{\infty} s_j \leq 2n \sum_{j=1}^{\infty} j^{-(2s-n+1)}$$

і ряд $\sum |m|^{-2s}$ збігається при $2s - n + 1 > 1$ ($\Leftrightarrow 2s > n$).

Таким чином, отримуємо

$$\|\nabla u\|_{C^0([0,1]^n)} \leq C \|u\|_{H_{pe^*}^{s+1}((0,1)^n)}.$$

Аналогічно, можна встановити, що

$$\|u\|_{C^0([0,1]^n)} \leq C \|u\|_{H_{pe^*}^s((0,1)^n)}$$

і доведення цієї теореми завершується як і доведення теореми 5.17 з урахуванням, якщо необхідно, індукції по l . ▷

Теорема вкладення для області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ формулюється наступним чином.

Теорема 5.20 (Соболева про вкладення). *Нехай область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ та ціле s таке, що*

$$s > \frac{n}{p}.$$

Тоді для цілого l виконані неперервні вкладення

$$W^{s,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega}) \quad \text{і} \quad W^{s+l,p}(\Omega) \subset C^l(\bar{\Omega}) \quad \text{при} \quad l \geq 0.$$

Зокрема $H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ при $n = 2, 3$ і $H^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ при $n = 1$. $\triangleleft \triangleright$

(Завдання для самостійної роботи: Нехай $M \subset \mathbf{Z}^n$ є скінченною множиною, $\alpha_m \in \mathbf{C}$ та дійсні числа σ_m є додатними при $m \in M$. Перевірити, що

$$\left(\sum_{m \in M} \alpha_m \right)^2 \leq \left(\sum_{m \in M} \sigma_m \alpha_m^2 \right) \left(\sum_{m \in M} \sigma_m^{-1} \right). \quad (5.7)$$

Теорема 5.21 (про оператор сліду). *Припустимо, що ціле d і дійсне s задовольняють нерівностям $1 \leq d < n$ і*

$$s > \frac{d}{2}.$$

Нехай $u \in \text{Trig}[0, 1]^n \cap H_{pe^}^s((0, 1)^n)$. Тоді існує постійна $C = C(s, d)$ така, що*

$$\|u|_{x_1=0, \dots, x_d=0}\|_{H_{pe^*}^{s-d/2}((0, 1)^{n-d})} \leq C \|u\|_{H_{pe^*}^s((0, 1)^n)}. \quad (5.8)$$

\triangleleft Для $x \in [0, 1]^n$ і $m \in \mathbf{Z}^n$ позначимо $\tilde{x}_1 = (x_1, \dots, x_d)$, $\tilde{x}_2 = (x_{d+1}, \dots, x_n)$, $\tilde{m}_1 = (m_1, \dots, m_d)$ і $\tilde{m}_2 = (m_{d+1}, \dots, m_n)$, тоді можна вважати, що

$$m = \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2$$

у сенсі виконання рівності $m = (m_1, \dots, m_d, 0, \dots, 0) + (0, \dots, 0, m_{d+1}, \dots, m_n)$.

За визначенням

$$u = \sum_m \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i} = \sum_{\tilde{m}_2} \sum_{\tilde{m}_1} \alpha_{\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2} e^{(\tilde{x}_1, \tilde{m}_1) 2\pi i} e^{(\tilde{x}_2, \tilde{m}_2) 2\pi i}$$

і

$$u|_{\tilde{x}_1=0} = \sum_{\tilde{m}_2} \beta_{\tilde{m}_2} e^{(\tilde{x}_2, \tilde{m}_2) 2\pi i} \quad \text{для} \quad \beta_{\tilde{m}_2} = \sum_{\tilde{m}_1} \alpha_{\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2}.$$

Надалі із нерівності (5.7) випливає, що

$$\begin{aligned} |\tilde{m}_2|^{2s-d} \beta_{\tilde{m}_2}^2 &\leq \left(\sum_{\tilde{m}_1} (|\tilde{m}_1|^2 + |\tilde{m}_2|^2)^s \alpha_{\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2}^2 \right) |\tilde{m}_2|^{2s-d} \sum_{\tilde{m}_1} (|\tilde{m}_1|^2 + |\tilde{m}_2|^2)^{-s} \leq \\ &\leq c \sum_{\tilde{m}_1} (|\tilde{m}_1|^2 + |\tilde{m}_2|^2)^s \alpha_{\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2}^2, \end{aligned} \quad (5.9)$$

оскільки $c = |\tilde{m}_2|^{2s-d} \sum_{\tilde{m}_1 \in \mathbf{Z}^d} (|\tilde{m}_1|^2 + |\tilde{m}_2|^2)^{-s} < \infty$ як при доведенні теореми 5.19.

Таким чином, обчислюючи суму $\sum_{\tilde{m}_2}$ від (5.9) маємо нерівність (5.8). \triangleright

Ця теорема означає, що відображення обчислення значення функції

$$u \mapsto u|_{x_1=0, \dots, x_d=0}$$

є обмеженим як оператор із $\text{Trig}[0, 1]^n \cap H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$ в $H_{pe^*}^{s-d/2}((0, 1)^{n-d})$. Цей оператор називається *оператором d-сліду* або просто *сліду* і є визначеним як оператор із $H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$ в $H_{pe^*}^{s-d/2}((0, 1)^{n-d})$ згідно з теоремою про продовження операторів по неперервності (теорема 4.1). Такий оператор позначається

$$\text{Tr}|_{x_1=0, \dots, x_d=0} : H_{pe^*}^s((0, 1)^n) \rightarrow H_{pe^*}^{s-d/2}((0, 1)^{n-d}).$$

Нехай $\sigma \in \mathbf{R}^n$ і $u \in H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$, тоді визначено відображення

$$T_\sigma : u(x) \mapsto u(x + \sigma) = \sum_m (\alpha_m e^{(\sigma, m)2\pi i}) e^{(x, m)2\pi i},$$

яке називається *оператором зсуву на вектор $\sigma \in \mathbf{R}^n$* . Із визначень і рівності $\alpha_m^2 = \alpha_m \bar{\alpha}_m = (\alpha_m e^{(\sigma, m)2\pi i})(\bar{\alpha}_m e^{-(\sigma, m)2\pi i})$ для $m \in \mathbf{Z}^n$ відразу ж випливає, що

$$\|T_\sigma(u)\|_{*(s)} = \|u\|_{*(s)},$$

тобто оператор зсуву є ізометрією простору $H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$ для кожного $\sigma \in \mathbf{R}^n$.

Із цієї рівності і теореми 5.21 отримуємо при $1 \leq d < n$, що відображення обчислення значення функції

$$u \mapsto u|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d}$$

є обмеженим оператором із $H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$ в $H_{pe^*}^{s-d/2}((0, 1)^{n-d})$ при $\sigma \in [0, 1]^d$ і $s > d/2$. Більш того, і теорему 5.19 можна розглядати як твердження про обмеженість відображення обчислення значення функції

$$u \mapsto u|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_n=\sigma_n}$$

з $H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$ в $\mathbf{C} = H_{pe^*}^{s-n/2}((0, 1)^{n-n})$ при $d = n$, $\sigma \in [0, 1]^n$ і $s > n/2$. В силу (5.6) таке відображення може бути невизначеним при $\sigma \in [0, 1]^n$ і $s < n/2$.

Таким чином, для кожного $k = 1, \dots, n$ при $\sigma \in [0, 1]^n$ і $s > 1/2$ мають сенс і виконані умови 1-періодичності

$$u|_{x_k=\sigma_k} = u|_{x_k=\sigma_k+1} \quad \text{в} \quad H_{pe^*}^{s-1/2}((0, 1)^{n-1})$$

для $u \in H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$ (тобто $u(x) = u(x + m) \forall x \in \mathbf{R}^n, \forall m \in \mathbf{Z}^n$), оскільки ці умови виконані для $u \in \text{Trig}[0, 1]^n$.

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що для кожного $l = 1, \dots$ і $k = 1, \dots, n$ при $s > 1/2 + l$ і $u \in H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$ мають сенс і виконані умови 1-періодичності для нормальних похідних

$$\left. \frac{\partial^l u(x)}{\partial^l x_k} \right|_{x_k=0} = \left. \frac{\partial^l u(x)}{\partial^l x_k} \right|_{x_k=1} \quad \text{в} \quad H_{pe^*}^{s-l-1/2}((0, 1)^{n-1}).)$$

Теорема 5.22 (про ліпшицевість обчислення сліду). Нехай ціле d і дійсне s задовольняють нерівностям $1 \leq d \leq n$ і

$$s > \frac{d}{2}.$$

Тоді існує постійна $C = C(s, d)$ така, що

$$\|u|_{x_1=\sigma_1+\tau_1, \dots, x_d=\sigma_d+\tau_d} - u|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d}\|_{H_{pe^*}^{s-d/2}((0, 1)^{n-d})} \leq |\tau| C \|u\|_{H_{pe^*}^{s+1}((0, 1)^n)}$$

для $u \in H_{pe^*}^{s+1}((0, 1)^n)$ і $\sigma, \tau \in \mathbf{R}^d$.

◁ Як і при доведенні теореми 5.21 для $u = \sum_m \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i}$ маємо

$$u|_{\tilde{x}_1=\sigma+\tau} = \sum_{\tilde{m}_2} \beta_{\tilde{m}_2}^{\sigma+\tau} e^{(\tilde{x}_2, \tilde{m}_2) 2\pi i} \quad \text{для} \quad \beta_{\tilde{m}_2}^{\sigma+\tau} = \sum_{\tilde{m}_1} e^{(\sigma+\tau, \tilde{m}_1) 2\pi i} \alpha_{\tilde{m}_1+\tilde{m}_2},$$

$$u|_{\tilde{x}_1=\sigma} = \sum_{\tilde{m}_2} \beta_{\tilde{m}_2}^{\sigma} e^{(\tilde{x}_2, \tilde{m}_2) 2\pi i} \quad \text{для} \quad \beta_{\tilde{m}_2}^{\sigma} = \sum_{\tilde{m}_1} e^{(\sigma, \tilde{m}_1) 2\pi i} \alpha_{\tilde{m}_1+\tilde{m}_2}$$

і

$$u|_{\tilde{x}_1=\sigma+\tau} - u|_{\tilde{x}_1=\sigma} = \sum_{\tilde{m}_2} (\beta_{\tilde{m}_2}^{\sigma+\tau} - \beta_{\tilde{m}_2}^{\sigma}) e^{(\tilde{x}_2, \tilde{m}_2) 2\pi i}.$$

Надалі із нерівності (5.7) як в (5.9) випливає, що

$$|\tilde{m}_2|^{2s-d} (\beta_{\tilde{m}_2}^{\sigma+\tau} - \beta_{\tilde{m}_2}^{\sigma})^2 \leq c \sum_{\tilde{m}_1} (|\tilde{m}_1|^2 + |\tilde{m}_2|^2)^s \alpha_{\tilde{m}_1+\tilde{m}_2}^2 (e^{(\tau, \tilde{m}_1) 2\pi i} - 1)^2.$$

Тому із співвідношень

$$\begin{aligned} (e^{(\omega, m) 2\pi i} - 1)^2 &= (\cos((\omega, m) 2\pi) - 1)^2 + (\sin((\omega, m) 2\pi))^2 = & (5.10) \\ &= 2(1 - \cos((\omega, m) 2\pi)) = 4(\sin((\omega, m) \pi))^2 \leq 4\pi^2(\omega, m)^2 \leq 4\pi^2|\omega|^2|m|^2 \end{aligned}$$

виконаних для $\omega \in \mathbf{R}^n$ і $m \in \mathbf{Z}^n$ впливає, що

$$|\tilde{m}_2|^{2s-d} (\beta_{\tilde{m}_2}^{\sigma+\tau} - \beta_{\tilde{m}_2}^{\sigma})^2 \leq 4\pi^2 c |\tau|^2 \sum_{\tilde{m}_1} (|\tilde{m}_1|^2 + |\tilde{m}_2|^2)^s \alpha_{\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2}^2 (|\tilde{m}_1|^2 + |\tilde{m}_2|^2)$$

та обчислюючи $\sum_{\tilde{m}_2}$, маємо необхідну нерівність. \triangleright

Теорема 5.23 (про неперервність обчислення сліду). *Нехай ціле d і дійсне s задовольняють нерівностям $1 \leq d \leq n$ і*

$$s > \frac{d}{2}.$$

Тоді для $u \in H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$ і $\sigma, \tau \in \mathbf{R}^d$ маємо

$$\|u|_{x_1=\sigma_1+\tau_1, \dots, x_d=\sigma_d+\tau_d} - u|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d}\|_{H_{pe^*}^{s-d/2}((0,1)^{n-d})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\tau| \rightarrow 0.$$

\triangleleft Як і при доведенні теореми 5.22 для $u = \sum_m \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i}$ отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{m}_2} |\tilde{m}_2|^{2s-d} (\beta_{\tilde{m}_2}^{\sigma+\tau} - \beta_{\tilde{m}_2}^{\sigma})^2 &\leq c \sum_{m=\tilde{m}_1+\tilde{m}_2} |m|^{2s} \alpha_m^2 (e^{(\tau, \tilde{m}_1) 2\pi i} - 1)^2 \leq \\ &\leq c \sum_{|m| \leq M} |m|^{2s} \alpha_m^2 (e^{(\tau, \tilde{m}_1) 2\pi i} - 1)^2 + 4c \sum_{|m| > M} |m|^{2s} \alpha_m^2, \end{aligned}$$

оскільки $(e^{(\tau, \tilde{m}_1) 2\pi i} - 1)^2 \leq 4$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна обрати та фіксувати $M \in \mathbf{Z}$ так, щоб

$$4c \sum_{|m| > M} |m|^{2s} \alpha_m^2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

де враховано, що $u \in H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$. Надалі можна обрати достатньо мале $\delta > 0$ так, щоб

$$c \sum_{|m| \leq M} |m|^{2s} \alpha_m^2 (e^{(\tau, \tilde{m}_1) 2\pi i} - 1)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $|\tau| < \delta$, оскільки $(e^{(\tau, \tilde{m}_1) 2\pi i} - 1) \rightarrow 0$ при $|\tau| \rightarrow 0$ і $|m| \leq M$. Таким чином,

$$\|u|_{x_1=\sigma_1+\tau_1, \dots, x_d=\sigma_d+\tau_d} - u|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d}\|_{H_{pe^*}^{s-d/2}((0,1)^{n-d})} < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\tau| < \delta. \quad \triangleright$$

Для $\sigma \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ різницеvim співвідношенням для $u \in H_{pe*}^s((0, 1)^n)$ називається елемент $u^\sigma \in H_{pe*}^s((0, 1)^n)$, який визначається рівністю

$$u^\sigma = \frac{u(x + \sigma) - u(x)}{|\sigma|}.$$

Для $u = \sum_m \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i}$ маємо

$$u^\sigma = \sum_m \alpha_m (e^{(\sigma, m) 2\pi i} - 1) |\sigma|^{-1} e^{(x, m) 2\pi i}. \quad (5.11)$$

Із співвідношень (5.10) випливає, що для $u \in H_{pe*}^{s+1}((0, 1)^n)$ всі різницеві співвідношення u^σ рівномірно обмежені у нормі $H_{pe*}^s((0, 1)^n)$, тобто

$$\|u^\sigma\|_{*s} \leq 2\pi \|u\|_{*(s+1)} \quad \text{для кожного} \quad \sigma \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$

Насправді виконано і таке зворотне твердження.

Теорема 5.24. *Нехай $u \in H_{pe*}^s((0, 1)^n)$ для $s \in \mathbf{R}$ та існує стала C така, що*

$$\|u^\sigma\|_{*s} \leq C \quad \text{для кожного} \quad \sigma \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$

Тоді $u \in H_{pe*}^{s+1}((0, 1)^n)$.

◁ Для $u = \sum \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i} \in \text{Trig}[0, 1]^n$ із умов теореми і (5.11) випливає, що

$$\sum_m \alpha_m^2 |m|^{2s} (e^{(\sigma, m) 2\pi i} - 1)^2 |\sigma|^{-2} \leq C^2 \quad \text{для кожного} \quad \sigma \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$

Для $\sigma = (0, \dots, \sigma_l, 0, \dots, 0)$ при $\sigma_l \rightarrow 0$ маємо $(e^{(\sigma, m) 2\pi i} - 1)^2 |\sigma|^{-2} \rightarrow 4\pi^2 |m_l|^2$ і тому

$$4\pi^2 \sum_m \alpha_m^2 |m|^{2s} |m_l|^2 \leq C^2 \quad \text{для} \quad 1 \leq l \leq n.$$

Таким чином, доведена нерівність $\|u\|_{*(s+1)}^2 \leq n C^2 / (4\pi^2)$. ▷

Теорема 5.25. *Нехай $u \in H_{pe*}^t((0, 1)^n)$ і $r, s, t \in \mathbf{R}$ такі, що $r < s < t$.*

Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує постійна C_ε така, що

$$\|u\|_{*s}^2 \leq \varepsilon \|u\|_{*t}^2 + C_\varepsilon \|u\|_{*r}^2.$$

◁ Для $\delta > 0$ маємо $1 \leq \delta^{t-s} + \left(\frac{1}{\delta}\right)^{s-r}$, оскільки або $\delta \geq 1$, або $\delta^{-1} \geq 1$.

Таким чином, при $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{t-s}} |m|^2$ для $m \in \mathbf{Z}_*^n$ отримуємо

$$|m|^{2s} \leq \varepsilon |m|^{2t} + \varepsilon^{\frac{r-s}{t-s}} |m|^{2r}.$$

Звідки випливає необхідна нерівність при $C_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{r-s}{t-s}}$. ▷

Теорема 5.26. Для фіксованого $s \in \mathbf{R}$ розглянемо оператор градієнта ∇ як лінійний оператор із $(\text{Trig}[0, 1]^n, \|\cdot\|_{*(s+1)})$ в $(H_{pe^*}^s((0, 1)^n)^n, \|\cdot\|_{H_{pe^*}^s((0, 1)^n)^n})$. Тоді $\nabla \in B(\text{Trig}[0, 1]^n, H_{pe^*}^s((0, 1)^n)^n)$,

$$\exists 1 \quad \bar{\nabla} \in B(H_{pe^*}^{s+1}((0, 1)^n), H_{pe^*}^s((0, 1)^n)^n) : \quad \bar{\nabla}(v) = \nabla(v) \quad \forall v \in \text{Trig}[0, 1]^n$$

i

$$\|\bar{\nabla}\|_{B(H_{pe^*}^{s+1}((0, 1)^n), H_{pe^*}^s((0, 1)^n)^n)} = 2\pi.$$

◁ Нехай $u = \sum_{\{m \in Z_*^n : |m| \leq M\}} \alpha_m e^{(x, m)2\pi i} \in \text{Trig}[0, 1]^n$. Тоді

$$\nabla u(x) = \sum_{\{m \in Z_*^n : |m| \leq M\}} \Lambda_m e^{(x, m)2\pi i},$$

де $\Lambda_m = 2\pi i \alpha_m m = 2\pi i \alpha_m (m_1, \dots, m_n)$. Таким чином, $\Lambda_m^2 = 4\pi^2 |m|^2 \alpha_m^2$ і

$$\|\nabla u\|_{H_{pe^*}^s((0, 1)^n)^n}^2 = \sum_{m \in Z_*^n} |m|^{2s} \Lambda_m^2 = 4\pi^2 \sum_{m \in Z_*^n} |m|^{2(s+1)} \alpha_m^2 = 4\pi^2 \|u\|_{*(s+1)}^2.$$

Залишається скористатися теоремою 4.1. ▷

Таким чином, для "функції" $u \in H_{pe^*}^{s+1}((0, 1)^n)$ визначені частинні похідні

$$\partial_k u = \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad \text{при} \quad k = 1, \dots, n$$

як елементи простору $H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$ для $s \in \mathbf{R}$.

Аналогічно для $u = (u_1, \dots, u_n) = \sum (\alpha_m^1, \dots, \alpha_m^n) e^{(x, m)2\pi i} \in H_{pe^*}^{s+1}((0, 1)^n)^n$ можна визначити оператор дивергенції із $H_{pe^*}^{s+1}((0, 1)^n)^n$ в $H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$ рівністю

$$\text{div } u = \partial_1 u + \dots + \partial_n u = 2\pi i \sum_m (m_1 \alpha_m^1 + \dots + m_n \alpha_m^n) e^{(x, m)2\pi i}.$$

Теорема 5.27 (слабка апроксимація похідних). Нехай $s \in \mathbf{R}$ і ціле k таке, що $1 \leq k \leq n$.

Тоді для $u \in H_{pe^*}^{s+1}((0, 1)^n)$ і $\sigma = (0, \dots, 0, \sigma_k, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$ при $\sigma_k > 0$ маємо

$$\|u^\sigma - \partial_k u\|_{H_{pe^*}^s((0, 1)^n)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\sigma| \rightarrow 0.$$

◁ Враховуючи (5.11), для $u = \sum_m \alpha_m e^{(x, m)2\pi i}$ отримуємо

$$u^\sigma - \partial_k u = \sum_m \alpha_m \left(\frac{e^{\sigma_k m_k 2\pi i} - 1}{\sigma_k} - m_k 2\pi i \right) e^{(x, m)2\pi i} =$$

$$= \sum_m \alpha_m m_k 2\pi i \left(e^{\sigma_k \theta m_k 2\pi i} - 1 \right) e^{(x, m) 2\pi i}$$

при $0 < \theta < 1$, де врахована формула Тейлора ($e^{i\varrho} = \cos(\varrho) + i \sin(\varrho) = 1 + \varrho e^{i\theta\varrho}$).

Таким чином, як і при доведенні теореми 5.23, маємо

$$\|u^\sigma - \partial_k u\|_{H_{pe^*}^s((0,1)^n)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\sigma| \rightarrow 0. \quad \triangleright$$

Аналогічно доводяться наступні два твердження.

Теорема 5.28 (слабка апроксимація похідних із оцінкою). *Нехай $s \in \mathbf{R}$ і ціле k таке, що $1 \leq k \leq n$. Тоді існує постійна $C = C(s)$ така, що*

$$\|u^\sigma - \partial_k u\|_{H_{pe^*}^s((0,1)^n)} \leq |\sigma| C \|u\|_{H_{pe^*}^{s+2}((0,1)^n)}$$

для $u \in H_{pe^*}^{s+2}((0,1)^n)$ і $\sigma = (0, \dots, 0, \sigma_k, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$ при $\sigma_k > 0$. $\triangleleft \triangleright$

Теорема 5.29 (слабка формула Тейлора першого порядку). *Нехай $s \in \mathbf{R}$ і ціле k таке, що $1 \leq k \leq n$. Тоді існує постійна $C = C(s)$ така, що*

$$\|u(x + \sigma) - u(x) - \sigma_1 \partial_1 u(x) - \dots - \sigma_n \partial_n u(x)\|_{H_{pe^*}^s((0,1)^n)} \leq |\sigma|^2 C \|u\|_{H_{pe^*}^{s+2}((0,1)^n)}$$

для $u \in H_{pe^*}^{s+2}((0,1)^n)$ і $\sigma \in \mathbf{R}^n$. $\triangleleft \triangleright$

Композиція операторів $-\text{div}$ і ∇ називається *оператором Лапласа*, який позначається $-\Delta$, визначається для $u = \sum \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i} \in H_{pe^*}^{s+2}((0,1)^n)$ рівностями

$$-\Delta u = -\text{div}(\nabla u) = -\partial_1^2 u - \dots - \partial_n^2 u = (2\pi)^2 \sum_m |m|^2 \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i}$$

та є неперервним лінійним відображенням із $H_{pe^*}^{s+2}((0,1)^n)$ в $H_{pe^*}^s((0,1)^n)$, а також із $H_{pe^*}^\infty((0,1)^n)$ в $H_{pe^*}^\infty((0,1)^n)$ та із $H_{pe^*}^{-\infty}((0,1)^n)$ в $H_{pe^*}^{-\infty}((0,1)^n)$, де за визначенням $H_{pe^*}^\infty((0,1)^n) = \bigcap_{s \in \mathbf{R}} H_{pe^*}^s((0,1)^n)$ та $H_{pe^*}^{-\infty}((0,1)^n) = \bigcup_{s \in \mathbf{R}} H_{pe^*}^s((0,1)^n)$.

Теорема 5.30 ($\exists 1$ слабкого розв'язку 1-періодичної задачі для рівняння Пуассона). *Нехай $s \in \mathbf{R}$ і $f \in H_{pe^*}^s((0,1)^n)$. Тоді $\exists 1$ розв'язок задачі:*

$$\text{знайти} \quad u \in H_{pe^*}^{s+2}((0,1)^n) : \quad -\Delta u = f \quad \text{в} \quad H_{pe^*}^s((0,1)^n). \quad (5.12)$$

\triangleleft Дійсно, якщо $f = \sum_m \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i} \in H_{pe^*}^s((0,1)^n)$, тоді

$$u = (2\pi)^{-2} \sum_m |m|^{-2} \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i}$$

визначає розв'язок $u \in H_{pe^*}^{s+2}((0,1)^n)$ задачі (5.12). \triangleright

Відображення $f \mapsto u$, яке зіставляє кожному $f \in H_{pe*}^s((0, 1)^n)$ єдиний розв'язок $u \in H_{pe*}^{s+2}((0, 1)^n)$ задачі (5.12), позначається через $(-\Delta)^{-1}$ і називається *зворотним оператором* до оператора Лапласа. Таким чином, $u = (-\Delta)^{-1}f$ та

$$(-\Delta)^{-1} : H_{pe*}^s((0, 1)^n) \rightarrow H_{pe*}^{s+2}((0, 1)^n)$$

є неперервним лінійним взаємно однозначним відображенням.

Із теореми (Соболева) 5.19 і теореми 5.30 отримуємо наступне твердження.

Теорема 5.31 (про класичний розв'язок 1-періодичної задачі для рівняння Пуассона). *Нехай $s \in \mathbf{R}$ таке, що*

$$s > \frac{n}{2},$$

$f \in H_{pe}^s((0, 1)^n)$ та $u \in H_{pe*}^{s+2}((0, 1)^n)$ є розв'язком задачі (5.12). Тоді*

$$f \in C^0([0, 1]^n) \quad i \quad u \in C^2([0, 1]^n). \quad \triangleleft \triangleright$$

При $n = 3$ для вектор-функції

$$u = (u_1, u_2, u_3) = \sum (\alpha_m^1, \alpha_m^2, \alpha_m^3) e^{(x, m) 2\pi i} \in H_{pe*}^{s+1}((0, 1)^3)^3$$

оператор ротора із $H_{pe*}^{s+1}((0, 1)^3)^3$ в $H_{pe*}^s((0, 1)^3)^3$ визначається рівністю

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u &= \operatorname{rot} (u_1, u_2, u_3) = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) = \\ &= 2\pi i \sum_m (m_2 \alpha_m^3 - m_3 \alpha_m^2, m_3 \alpha_m^1 - m_1 \alpha_m^3, m_1 \alpha_m^2 - m_2 \alpha_m^1) e^{(x, m) 2\pi i}. \end{aligned}$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що для $u, v \in H_{pe*}^s((0, 1)^3)^3$ і $w \in H_{pe*}^s((0, 1)^3)$ виконуються рівності

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} u &= 0, \quad \operatorname{div} \Delta u = \Delta \operatorname{div} u, \quad \operatorname{rot} \nabla w = 0, \\ -\Delta u &= -\nabla \operatorname{div} u + \operatorname{rot} \operatorname{rot} u. \end{aligned} \quad (5.13)$$

При $n = 2$ і $n > 3$ прийнято визначати два оператори ротора rot^* і rot так, щоб виконувалася рівність $-\Delta = -\nabla \operatorname{div} + \operatorname{rot}^* \operatorname{rot}$, аналогічна (5.13). Наприклад, при $n = 2$ для вектор-функції $u = (u_1, u_2) = \sum (\alpha_m^1, \alpha_m^2) e^{(x, m) 2\pi i}$ із $H_{pe*}^{s+1}((0, 1)^2)^2$ та функції $v = \sum \beta_m e^{(x, m) 2\pi i} \in H_{pe*}^{s+1}((0, 1)^2)$ визначають

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u &= \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = 2\pi i \sum_m (m_1 \alpha_m^2 - m_2 \alpha_m^1) e^{(x, m) 2\pi i} \in H_{pe*}^s((0, 1)^2), \\ \operatorname{rot}^* v &= (\partial_2 v, -\partial_1 v) = 2\pi i \sum_m (m_2 \beta_m, -m_1 \beta_m) e^{(x, m) 2\pi i} \in H_{pe*}^s((0, 1)^2)^2. \end{aligned}$$

Теорема 5.32 (формула інтегрування частинами). *Нехай фіксовано $s \in \mathbf{R}$, $u \in H_{pe^*}^s((0, 1)^n)^n$ і $v \in H_{pe^*}^{-s+1}((0, 1)^n)$. Тоді*

$$\int_{(0,1)^n} (-\operatorname{div} u) \bar{v} \, dx = \int_{(0,1)^n} (u, \nabla \bar{v}) \, dx. \quad (5.14)$$

◁ Для вектор-функцій

$$u = (u_1, \dots, u_n) = \sum (\alpha_m^1, \dots, \alpha_m^n) e^{(x,m)2\pi i} \in H_{pe^*}^s((0, 1)^n)^n,$$

$$w = (w_1, \dots, w_n) = \sum (\beta_m^1, \dots, \beta_m^n) e^{(x,m)2\pi i} \in H_{pe^*}^{-s}((0, 1)^n)^n$$

за визначенням маємо

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)^n} (u, \bar{w}) \, dx &= \int_{(0,1)^n} u_1 \bar{w}_1 \, dx + \dots + \int_{(0,1)^n} u_n \bar{w}_n \, dx = \\ &= \sum \alpha_m^1 \bar{\beta}_m^1 + \dots + \sum \alpha_m^n \bar{\beta}_m^n. \end{aligned}$$

Таким чином, якщо $v = \sum \gamma_m e^{(x,m)2\pi i} \in H_{pe^*}^{-s+1}((0, 1)^n)$, то

$$\int_{(0,1)^n} (u, \nabla \bar{v}) \, dx = \sum \alpha_m^1 (-2\pi i m_1) \bar{\gamma}_m + \dots + \sum \alpha_m^n (-2\pi i m_n) \bar{\gamma}_m$$

та

$$\int_{(0,1)^n} (-\operatorname{div} u) \bar{v} \, dx = (-2\pi i) \sum \alpha_m^1 m_1 \bar{\gamma}_m + \dots + \sum \alpha_m^n m_n \bar{\gamma}_m. \quad \triangleright$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що для $u \in H_{pe^*}^s((0, 1)^3)^3$ і $v \in H_{pe^*}^{-s+1}((0, 1)^3)^3$ виконується формула інтегрування частинами

$$\int_{(0,1)^3} (\operatorname{rot} u, \bar{v}) \, dx = \int_{(0,1)^3} (u, \overline{\operatorname{rot} v}) \, dx.)$$

Теорема 5.33 (про розкладання Ходжа). *Нехай $s \in \mathbf{R}$ і $v \in H_{pe^*}^s((0, 1)^3)^3$. Тоді існують $\varphi \in H_{pe^*}^{s+1}((0, 1)^3)$ і $\psi \in H_{pe^*}^{s+1}((0, 1)^3)^3$ такі, що*

$$v = \nabla \varphi + \operatorname{rot} \psi. \quad (5.15)$$

◁ Із теореми 5.30 випливає, що

$$\exists 1 \, u \in H_{pe^*}^{s+2}((0, 1)^3)^3 : \quad -\Delta u = v. \quad (5.16)$$

Таким чином, враховуючи (5.13), маємо (5.15) із $\varphi = -\operatorname{div} u$ та $\psi = \operatorname{rot} u$. \triangleright

Теорема 5.34 (представлення Вейля соленоїдальних векторів). *Нехай $s \in \mathbf{R}$, $v \in H_{pe*}^s((0,1)^3)^3$ та $\operatorname{div} v = 0$. Тоді існує $\psi \in H_{pe*}^{s+1}((0,1)^3)^3$ таке, що*

$$v = \operatorname{rot} \psi.$$

◁ Застосовуючи оператор дивергенції до (5.16), отримуємо $\Delta\varphi = 0$. Таким чином, $\varphi = 0$ і розкладання (5.15) має вигляд $v = \operatorname{rot} \psi$. ▷

Аналогічно доводиться наступне твердження.

Теорема 5.35 (представлення Вейля безвихорівих векторів). *Нехай $s \in \mathbf{R}$, $v \in H_{pe*}^s((0,1)^3)^3$ та $\operatorname{rot} v = 0$. Тоді існує $\varphi \in H_{pe*}^{s+1}((0,1)^3)$ таке, що*

$$v = \nabla\varphi. \quad \triangleleft \triangleright$$

Для $s \in \mathbf{R}$ і $u = \sum \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} \in H_{pe*}^{s+2}((0,1)^n)$ за визначенням

$$-\Delta u = (2\pi)^2 \sum_m |m|^2 \alpha_m e^{(x,m)2\pi i}.$$

Це визначення дозволяє задати для кожного $r \in \mathbf{R}$ і $u = \sum \alpha_m e^{(x,m)2\pi i}$ із $H_{pe*}^{s+2r}((0,1)^n)$ степінь $(-\Delta)^r$ оператора $-\Delta$ рівністю

$$(-\Delta)^r u = (2\pi)^{2r} \sum_m |m|^{2r} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i},$$

яка є неперервним лінійним оператором із $H_{pe*}^{s+2r}((0,1)^n)$ в $H_{pe*}^s((0,1)^n)$ таким, що $(-\Delta)^r(-\Delta)^t = (-\Delta)^{r+t}$, $\nabla(-\Delta)^r = (-\Delta)^r \nabla$ і $\operatorname{div}(-\Delta)^r = (-\Delta)^r \operatorname{div}$ для $t \in \mathbf{R}$.

Безпосередньо із визначень також випливає, що норма

$$\|u\|_{*s} = \|(-\Delta)^{s/2} u\|_{*0} = \left(\int_{(0,1)^n} ((-\Delta)^{s/2} u)^2 dx \right)^{1/2}$$

еквівалентна нормі $\|u\|_{*s}$ для $u \in H_{pe*}^s((0,1)^n)$.

Для $n = 3$ і $u \in H_{pe*}^{s+1}((0,1)^3)^3$ із формул інтегрування частинами та рівності $-\Delta = -\nabla \operatorname{div} + \operatorname{rot} \operatorname{rot}$ маємо

$$\begin{aligned} \|u\|_{*(s+1)}^2 &= \int_{(0,1)^3} ((-\Delta)(-\Delta)^{s/2} u, (-\Delta)^{s/2} \bar{u}) dx = \\ &= \int_{(0,1)^3} ((-\Delta)^{s/2} (\operatorname{div} u))^2 dx + \int_{(0,1)^3} ((-\Delta)^{s/2} (\operatorname{rot} u))^2 dx = \|\operatorname{div} u\|_{*(s)}^2 + \|\operatorname{rot} u\|_{*(s)}^2, \end{aligned}$$

тобто $H_{pe*}^{s+1}((0,1)^3)^3 = \{u \in H_{pe*}^{-\infty}((0,1)^3)^3 : \operatorname{div} u \in H_{pe*}^s((0,1)^3), \operatorname{rot} u \in H_{pe*}^s((0,1)^3)^3\}$.

6. Слабка збіжність.

В6.1. Послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *слабко збіжною* до $x \in L$ (позначення $x_k \rightharpoonup x$), якщо

$$f(x_k) \rightarrow f(x) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty \quad \forall f \in L^* = B(L, \mathbf{C}).$$

Зокрема, послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ гільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ є *слабко збіжною* до $x \in H$, якщо

$$\langle x_k, h \rangle_H \rightarrow \langle x, h \rangle_H \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty \quad \forall h \in H = H^* = B(H, \mathbf{C}).$$

Припустимо, що $x_k \rightharpoonup x$ і $x_k \rightharpoonup y$, тоді $f(x - y) = 0 \quad \forall f \in L^*$. Звідки маємо $x = y$, тобто слабка границя є єдиною.

Теорема 6.2 (Банаха-Штейнхауса). *Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормованим простором і $x_k \rightharpoonup x$. Тоді існує стала $C > 0$ така, що*

$$\sup_k \|x_k\|_L \leq C. \quad \triangleleft \triangleright$$

В6.3. Розглянемо послідовність $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$, множина межових точок якої позначається через $\lim \text{Pt} \{\alpha_k\}$ (тобто $\alpha_0 \in \lim \text{Pt} \{\alpha_k\}$, якщо існує підпослідовність $\{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що $\alpha_l \rightarrow \alpha_0$). *Верхня та нижня границі цієї послідовності визначаються рівностями*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \sup \{ \alpha : \alpha \in \lim \text{Pt} \{\alpha_k\} \},$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \inf \{ \alpha : \alpha \in \lim \text{Pt} \{\alpha_k\} \}.$$

Відомо і безпосередньо перевіряється, що кожна обмежена послідовність має верхню та нижню границі. Крім того, послідовність $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ є збіжною

$$\Leftrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha_k.$$

Теорема 6.4. *Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормованим простором і $x_k \rightharpoonup x$. Тоді*

$$\|x\|_L \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_L. \quad \triangleleft \triangleright$$

Приклад 6.5. Нехай $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L = l^2(\mathbf{R})$ і $x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots) \in l^2(\mathbf{R})$ має всі елементи $x_k^i = 0$ за виключенням $x_k^k = 1$, тоді $x_k \rightharpoonup 0$ але $\|x_k\|_{l^2(\mathbf{R})} = 1$.

Таким чином, існують слабо збіжні послідовності $x_k \rightharpoonup x$, для яких

$$\|x\|_L < \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_L. \quad (6.1)$$

В6.6. Послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *сильно збіжною* до $x \in L$ (позначення $x_k \rightarrow x$), якщо

$$\|x_k - x\|_L \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Теорема 6.7. Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормованим простором і $x_k \rightarrow x$. Тоді

$$x_k \rightharpoonup x.$$

◁ Дійсно, для кожного $f \in L^*$ маємо

$$|f(x_k) - f(x)| = |f(x_k - x)| \leq \|f\|_{L^*} \|x_k - x\|_L \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad \triangleright$$

Із цієї теореми відразу ж випливає, що якщо

$$x_k \rightharpoonup x \quad \text{і} \quad x_k \rightarrow y,$$

тоді $x = y$, оскільки $\|x_k\|_L \rightarrow \|y\|_L$ для $x_k \rightarrow y$. Проте, із (6.1) випливає, що існують слабо збіжні послідовності $x_k \rightharpoonup x$, які не є сильно збіжними.

Теорема 6.8 (про слабку неперервність операторів). Нехай $(L, \|\cdot\|_L), (H, \|\cdot\|_H)$ є нормованими просторами, $A \in B(L, H)$ та $x_k \rightharpoonup x$. Тоді

$$Ax_k \rightharpoonup Ax.$$

◁ Дійсно, для кожного $\varphi \in H^*$ маємо

$$\varphi(Ax_k) = f(x_k),$$

де $f \in L^*$. Аналогічно $\varphi(Ax) = f(x)$. Враховуючи що $x_k \rightharpoonup x$, отримуємо

$$f(x_k) \rightarrow f(x)$$

і тому $\varphi(Ax_k) \rightarrow \varphi(Ax)$ для кожного $\varphi \in H^*$, тобто $Ax_k \rightharpoonup Ax$. ▷

Таким чином, обмежені оператори завжди є слабо (та сильно) неперервними.

Теорема 6.9. Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормованим простором і $x_k \rightarrow x$. Тоді знайдуться $\alpha_k^l \in \mathbf{C}$ і $K_l \in \mathbf{N}$ при $k, l \in \mathbf{N}$ такі, що послідовність

$$\tilde{x}_l = \sum_{k=1}^{K_l} \alpha_k^l x_k \rightarrow x \quad \text{при} \quad l \rightarrow \infty. \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 6.10. Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормованим простором. Тоді

$$x_k \rightarrow x \quad \Leftrightarrow$$

i) $\sup_k \|x_k\|_L \leq C$; ii) $f(x_k) \rightarrow f(x)$ для будь-якого f із деякої множини лінійних функціоналів, лінійні комбінації яких щільні в L^* . $\triangleleft \triangleright$

Теорема 6.11 (про слабку збіжність у сепарабельному гільбертовому просторі). Нехай H є сепарабельним гільбертовим простором із ортонормованою системою $\{e_m\}_{m=1}^\infty \subset H$. Тоді

$$x_k \rightarrow x \quad \Leftrightarrow \quad i) \quad \sup_k \|x_k\|_H \leq C; \quad ii) \quad \langle x_k, e_m \rangle \rightarrow \langle x, e_m \rangle \quad \forall m \in \mathbf{N}.$$

$\triangleleft(\Rightarrow)$ Одразу випливає із визначень та теореми 6.2 $(\Rightarrow)\triangleright$

$\triangleleft(\Leftarrow)$ Нехай $h \in H$ і $\varepsilon > 0$. Тоді знайдуться $l, K \in \mathbf{N}$ і $\phi_m \in \mathbf{C}$ такі, що

$$\left\| h - \sum_{m=1}^l \phi_m e_m \right\|_H < \varepsilon$$

і $|\langle x_k - x, \sum_{m=1}^l \phi_m e_m \rangle| < \varepsilon$ для $k \geq K$ завдяки ii). Таким чином, маємо

$$|\langle x_k - x, h \rangle| \leq |\langle x_k - x, \sum_{m=1}^l \phi_m e_m \rangle| + |\langle x_k - x, h - \sum_{m=1}^l \phi_m e_m \rangle| < \varepsilon(1 + 2C),$$

оскільки із i) випливає, що

$$|\langle x_k - x, h - \sum_{m=1}^l \phi_m e_m \rangle| \leq \|x_k - x\|_H \left\| h - \sum_{m=1}^l \phi_m e_m \right\|_H < 2C\varepsilon. \quad (\Leftarrow)\triangleright$$

Із цієї теореми відразу ж випливає, що слабка збіжність послідовності $x_k \rightarrow x$ еквівалентна сильній збіжності цієї послідовності для скінченновимірного простору L . Дійсно, таке L є еквівалентним простору \mathbf{C}^n , який можна розглядати як гільбертовий простір із ортонормованою системою $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ і збіжність із ii) треба перевіряти тільки для скінченної множини індексів m .

Теорема 6.12. Нехай H є гільбертовим простором. Тоді

$$x_k \rightarrow x \quad \Leftrightarrow \quad i) \quad x_k \rightarrow x; \quad ii) \quad \|x_k\|_H \rightarrow \|x\|_H.$$

\triangleleft Дійсно, $\|x_k - x\|_H^2 = \langle x_k, x_k \rangle - \langle x, x \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, x_k \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x_k, x \rangle \rightarrow 0$. \triangleright

Теорема 6.13 (Тихонова А.Н. про слабку компактність кулі). *Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є рефлексивним нормованим простором і послідовність $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset L$ така, що*

$$\sup_k \|x_k\|_L \leq C \quad \text{для деякого } C \in \mathbf{R}.$$

Тоді існують $x \in L$ і підпослідовність $\{x_l\}_{l=1}^\infty \subset \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset L$ такі, що

$$x_l \rightharpoonup x. \quad \triangleleft \triangleright$$

Ця теорема означає, що куля $B_c = \{x \in L : \|x\|_L \leq c\}$ в рефлексивному лінійному просторі L є слабо компактною.

Теорема 6.14 (про сильну компактність кулі). *Нехай для деякого $c > 0$ куля B_c є сильно компактною в лінійному нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$. Тоді*

$$\dim L < \infty. \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 6.15 (Релліха-Кондрашова про компактність для 1-періодичних функцій). *Нехай $r, s \in \mathbf{R}$, $r < s$ і послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$ така, що*

$$\sup_k \|v_k\|_{*s} \leq C \quad \text{для деякого } C \in \mathbf{R}.$$

Тоді існують $v \in H_{pe^}^s((0, 1)^n)$ і підпослідовність $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset \{v_k\}_{k=1}^\infty$ такі, що*

$$v_l \rightharpoonup v \quad \text{в } H_{pe^*}^s((0, 1)^n),$$

$$v_l \rightarrow v \quad \text{в } H_{pe^*}^r((0, 1)^n).$$

\triangleleft Твердження про існування $v \in H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$ і слабо збіжної підпослідовності випливає із теореми Тихонова. Для $\varepsilon > 0$ і $v_l = \sum_m \alpha_m^l e^{(x, m)2\pi i} \in H_{pe^*}^s((0, 1)^n)$ маємо

$$\begin{aligned} & \|v_{l_1} - v_{l_2}\|_{*r} = \\ &= \sum_{m \neq 0, |m| < M} |m|^{2r-2s} |m|^{2s} |\alpha_m^{l_1} - \alpha_m^{l_2}|^2 + \sum_{|m| \geq M} |m|^{2r-2s} |m|^{2s} |\alpha_m^{l_1} - \alpha_m^{l_2}|^2 \leq \\ &\leq \sum_{m \neq 0, |m| < M} |m|^{2s} |\alpha_m^{l_1} - \alpha_m^{l_2}|^2 + |M|^{2r-2s} \sum_{|m| \geq M} |m|^{2s} (|\alpha_m^{l_1}|^2 + 2|\alpha_m^{l_1}||\alpha_m^{l_2}| + |\alpha_m^{l_2}|^2) \leq \\ &\leq \sum_{m \neq 0, |m| < M} |m|^{2s} |\alpha_m^{l_1} - \alpha_m^{l_2}|^2 + 4C|M|^{2r-2s} < \sum_{m \neq 0, |m| < M_0} |m|^{2s} |\alpha_m^{l_1} - \alpha_m^{l_2}|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

для достатньо великого M_0 . Фіксуємо таке M_0 . Слабка збіжність послідовності еквівалентна сильній збіжності цієї послідовності в $H_{pe*}^s((0, 1)^n)$ -нормі для скінченновимірному простору тригонометричних поліномів із $m \neq 0$ і $|m| < M_0$. Таким чином, знайдеться J таке, що

$$\|v_{l_1} - v_{l_2}\|_{*r} < \sum_{m \neq 0, |m| < M_0} |m|^{2s} |\alpha_m^{l_1} - \alpha_m^{l_2}|^2 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

при $l_1, l_2 \geq J$, тобто послідовність $\{v_l\}_{l=1}^\infty$ є фундаментальною і тому $v_l \rightarrow v$, оскільки $H_{pe*}^r((0, 1)^n)$ є повним. \triangleright

Теорема про компактність для області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ формулюється таким чином.

Теорема 6.16 (Релліха-Кондрашова про компактність). *Нехай $C > 0$ і послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset H^1(\Omega)$ така, що*

$$\sup_k \|v_k\|_{H^1(\Omega)} \leq C.$$

Тоді існують $v \in H^1(\Omega)$ і підпослідовність $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset \{v_k\}_{k=1}^\infty$ такі, що

$$v_l \rightharpoonup v \quad \text{в } H^1(\Omega),$$

$$v_l \rightarrow v \quad \text{в } L^2(\Omega). \quad \triangleleft \triangleright$$

Ця теорема для послідовності $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ випливає із теореми 6.15. Дійсно, продовжуючи нулем елементи цієї послідовності зовні Ω , можна вважати, що $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset H_{per}^1((0, 1)^n)$ і $\sup_k \|v_k\|_{H_{per}^1((0, 1)^n)} \leq C$ для відповідного C . У загальному випадку, цю теорему також можна вивести із теореми 6.15, проте процес продовження зовні Ω елементів відповідної послідовності $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset H^1(\Omega)$ (такої, що $\sup_k \|v_k\|_{H_{per}^1((0, 1)^n)} \leq C$) є складнішим.

Вже було доведено наступне твердження (Теорема 5.19).

Теорема 6.17 (Соболева про вкладення для 1-періодичних функцій). *Нехай*

$$s > \frac{n}{2}.$$

Тоді маємо неперервне вкладення $H_{per}^s((0, 1)^n) \subset C^0([0, 1]^n)$. $\triangleleft \triangleright$

Насправді, вкладення $H_{per}^s((0, 1)^n) \subset C^0([0, 1]^n)$ в теоремі Соболева є не тільки неперервним, але і компактним в наступному сенсі.

Теорема 6.18 (Соболева про компактність для 1-періодичних функцій). *Нехай $s > \frac{n}{2}$, $C > 0$ і послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset H_{per}^s((0, 1)^n)$ така, що*

$$\sup_k \|v_k\|_s \leq C.$$

Тоді існують $v \in H_{per}^s((0, 1)^n)$ і підпослідовність $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset \{v_k\}_{k=1}^\infty$ такі, що

$$v_l \rightharpoonup v \quad \text{в } H_{per}^s((0, 1)^n),$$

$$v_l \rightarrow v \quad \text{в } C^0([0, 1]^n).$$

◁ Можна знайти $r \in \mathbf{R}$ таке, що $s > r > \frac{n}{2}$ і вважати, що $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset H_{pe*}^s((0, 1)^n)$, оскільки підпростір констант є одновимірним. Тому, твердження про існування $v \in H_{pe*}^s((0, 1)^n)$ і сильно збіжної підпослідовності $v_l \rightarrow v$ в $H_{pe*}^r((0, 1)^n)$ випливає із теореми 6.15. Крім того, із теореми 6.17 маємо

$$\|v_{l_1} - v_{l_2}\|_{C^0([0, 1]^n)} \leq C \|v_{l_1} - v_{l_2}\|_{H_{pe*}^r((0, 1)^n)}$$

для деякого $C > 0$. Тому існує єдине $\tilde{v} \in C^0([0, 1]^n)$ таке, що $\|\tilde{v} - v_l\|_{C^0([0, 1]^n)} \rightarrow 0$, оскільки $(C^0([0, 1]^n), \|\cdot\|_{C^0([0, 1]^n)})$ є повним. Крім того, функція $\tilde{v} \in C^0([0, 1]^n)$ є представником класу $v \in H_{per}^s((0, 1)^n)$, оскільки цей клас однозначно визначається коефіцієнтами $\{\alpha_m\}_{m \in \mathbf{Z}_*^n}$ у відповідності із теоремою 5.6. ▷

Теорема про компактність для області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ формулюється таким чином.

Теорема 6.19 (Соболева про компактність). *Нехай $1 \leq p < \infty$, ціле m таке, що $m > \frac{n}{p}$ і послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset W^{m,p}(\Omega)$ така, що*

$$\sup_k \|v_k\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C \quad \text{для деякого } C \in \mathbf{R}.$$

Тоді існують $v \in W^{m,p}(\Omega)$ і підпослідовність $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset \{v_k\}_{k=1}^\infty$ такі, що

$$v_l \rightharpoonup v \quad \text{в } W^{m,p}(\Omega),$$

$$v_l \rightarrow v \quad \text{в } C^0(\bar{\Omega}). \quad \triangleleft \triangleright$$

Твердження цієї теореми для $p = 2$ та $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ випливають із теореми 6.18. У загальному випадку, доведення теореми 6.19 є складнішим, оскільки теорія рядів Фур'є в $L^p((0, 1)^n)$ є набагато складнішою при $p \neq 2$.

Теорема 6.20 (про компактність сліду для 1-періодичних функцій). *Припустимо, що ціле d і дійсні s, r задовольняють нерівностям $1 \leq d < n$ та*

$$s > r > \frac{d}{2}.$$

Нехай $\sigma \in [0, 1]^n$, $C > 0$ і послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset H_{per}^s((0, 1)^n)$ така, що

$$\sup_k \|v_k\|_s \leq C.$$

Тоді існують $v \in H_{per}^s((0, 1)^n)$ і підпослідовність $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset \{v_k\}_{k=1}^\infty$ такі, що

$$v_l|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d} \rightharpoonup v|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d} \quad \text{в} \quad H_{per}^{s-d/2}((0, 1)^{n-d}),$$

$$v_l|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d} \rightarrow v|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d} \quad \text{в} \quad H_{per}^{r-d/2}((0, 1)^{n-d}).$$

◁ Можна вважати, що $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset H_{pe*}^s((0, 1)^n)$. Тому твердження про існування $v \in H_{pe*}^s((0, 1)^n)$ і сильно збіжної підпослідовності $v_l \rightarrow v$ в $H_{pe*}^r((0, 1)^n)$ випливає із теореми 6.15. Крім того, із теореми 5.21 маємо

$$v_l|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d} \rightharpoonup v|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d} \quad \text{в} \quad H_{per}^{s-d/2}((0, 1)^{n-d}),$$

оскільки оператор сліду є (слабко) неперервним та

$$\|v_{l_1}|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d} - v_{l_2}|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d}\|_{H_{pe*}^{r-d/2}((0, 1)^{n-d})} \leq C \|v_{l_1} - v_{l_2}\|_{H_{pe*}^r((0, 1)^n)}$$

для деякого $C > 0$. Таким чином, послідовність $\{v_l|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d}\}_{l=1}^\infty$ є фундаментальною і тому $v_l|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d} \rightarrow v|_{x_1=\sigma_1, \dots, x_d=\sigma_d}$ в $H_{per}^{r-d/2}((0, 1)^{n-d})$. ▷

Розглянемо гільбертовий простір $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ над \mathbf{R} . Відображення

$$a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}, \quad u, v \mapsto a(u, v)$$

називається *білінійною формою* на H , якщо $a(u, v)$ неперервна і лінійна по кожному із аргументів. Білінійна форма *симетрична*, якщо

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in H.$$

Кожен лінійний неперервний оператор $A : H \rightarrow H^*$ визначає білінійну форму

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in H. \quad (6.2)$$

Дійсно, білінійність $a(u, v)$ випливає із лінійності A і білінійності $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а неперервність із нерівності

$$|a(u, v)| = |\langle Au, v \rangle| \leq \|Au\|_{H^*} \|v\|_H \leq \|A\|_{B(H, H^*)} \|u\|_H \|v\|_H.$$

З іншого боку, якщо задана білінійна форма $a(u, v)$ на H , тоді для кожного $u \in H$ відображення

$$v \mapsto a(u, v) \quad \text{для } v \in H$$

визначає лінійний неперервний функціонал на H . Тому існує лінійний оператор $A : H \rightarrow H^*$ такий, що виконана рівність (6.2).

Теорема 6.21. *Нехай $a(u, v)$ є білінійною формою на H і $u_m \rightarrow u$. Тоді*

$$a(u_m, v) \rightarrow a(u, v) \quad \forall v \in H.$$

◁ Фіксуємо $v \in H$ і розглянемо $f_v(u) = a(u, v)$. Із визначень маємо $f_v \in H^*$ і

$$f_v(u_m) = a(u_m, v) \rightarrow f_v(u) = a(u, v) \quad \forall v \in H. \quad \triangleright$$

Теорема 6.22. *Нехай $b(u, v)$ є білінійною формою на H , $v_m \rightarrow v$ і $u_m \rightarrow u$ в H . Тоді*

$$b(v_m, u_m) \rightarrow b(v, u).$$

◁ Існує $B \in B(H, H^*)$ такий, що $b(v, u) = \langle Bv, u \rangle$ для $v, u \in H$ і тому

$$|b(v_m - v, u_m)| = |\langle B(v_m - v), u_m \rangle| \leq \|B\|_{B(H, H^*)} \|v_m - v\|_H \|u_m\|_H \rightarrow 0,$$

оскільки $\|u_m\|_H \leq C$ для деякої сталої C . Отже, згідно з теоремою 6.21 маємо

$$b(v_m, u_m) = b(v_m - v, u_m) + b(v, u_m) \rightarrow b(v, u). \quad \triangleright$$

В6.23. Білінійна форма $a(u, v)$ називається *коерцитивною* на H , якщо

$$\exists \alpha > 0 : \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H.$$

Із визначень випливає, що білінійна коерцитивна симетрична форма $a(u, v)$ визначає норму $\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}$ на H , яка еквівалентна нормі $\|v\|_H$.

Теорема 6.24 ($\exists 1$ розв'язку варіаційної рівності у гільбертовому просторі).
Нехай H є сепарабельним гільбертовим простором над \mathbf{R} , $a(u, v)$ є білінійною коерцитивною формою і $f \in H^*$. Тоді $\exists 1 u \in H$:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H. \quad (6.3)$$

Крім того, відображення $f \mapsto u$ є ліпшицевим, тобто, якщо $u, \tilde{u} \in H$ є розв'язками задачі (6.3), яки відповідні $f, \tilde{f} \in H^*$, тоді

$$\|u - \tilde{u}\|_H \leq (1/\alpha) \|f - \tilde{f}\|_{H^*}. \quad (6.4)$$

◁ Доведемо спочатку нерівність (6.4). Нехай $u, \tilde{u} \in H$ є розв'язками задачі (6.3), яки відповідні $f, \tilde{f} \in H^*$, тобто

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H, \\ -a(\tilde{u}, \tilde{v}) &= -\langle \tilde{f}, \tilde{v} \rangle \quad \forall \tilde{v} \in H. \end{aligned}$$

Вибираючи $v = u - \tilde{u}$ у першому рівнянні, $\tilde{v} = u - \tilde{u}$ у другому рівнянні і складаючи ці рівняння, отримуємо

$$a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) = \langle f - \tilde{f}, u - \tilde{u} \rangle.$$

Враховуючи умову коерцитивності, маємо

$$\alpha \|u - \tilde{u}\|_H^2 \leq \|f - \tilde{f}\|_{H^*} \|u - \tilde{u}\|_H.$$

Звідки випливає (6.4) та єдиність розв'язку (6.3) (якщо цей розв'язок існує).

Гільбертовий простір H є сепарабельним. Тому існують лінійно незалежні $\{w_i\}_{i=1}^\infty \subset H$ такі, що простір

$$\tilde{H} = \left\{ v \in H : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \forall \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad \forall m \in \mathbf{N} \right\}$$

є щільним в H .

Фіксуємо ціле $m > 0$ і визначимо скінченновимірний лінійний простір

$$H_m = \left\{ v \in H : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

Розглянемо наступну задачу : знайти $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i^m w_i \in H_m$ таке, що

$$a(u_m, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_m.$$

Ця задача еквівалентна системі m рівнянь

$$a(u_m, w_j) = \langle f, w_j \rangle, \quad j = 1, \dots, m,$$

для m компонент α_i^m вектора $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i^m w_i$, тобто

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i^m a(w_i, w_j) = \langle f, w_j \rangle, \quad j = 1, \dots, m. \quad (6.5)$$

Припустимо, що існують $\beta_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, n$ такі, що

$$\sum_{i=1}^m \beta_i a(w_i, w_j) = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

тоді

$$\sum_{i,j=1}^m \beta_i a(w_i, w_j) \beta_j = 0,$$

тобто

$$a\left(\sum_{i=1}^m \beta_i w_i, \sum_{j=1}^m \beta_j w_j\right) = 0.$$

Таким чином, $\sum_{i=1}^m \beta_i w_i = 0$ і тому $\beta_i = 0$, $i = 1, \dots, m$, оскільки w_i , $i = 1, \dots, m$ лінійно незалежні.

Отже, система рівнянь (6.5) має розв'язок і $\exists 1 u_m \in H_m$:

$$a(u_m, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_m.$$

Крім того, вибираючи $v = u_m$, отримуємо

$$\alpha \|u_m\|_H^2 \leq a(u_m, u_m) = \langle f, u_m \rangle \leq \|f\|_{H^*} \|u_m\|_H,$$

тобто

$$\|u_m\|_H \leq (1/\alpha) \|f\|_{H^*} \leq M.$$

Тому існують $u \in H$ і $\{u_{\tilde{m}}\}_{\tilde{m}=1}^{\infty} \subset \{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ (теореми Тихонова і 6.21) такі, що

$$a(u_{\tilde{m}}, v) \rightarrow a(u, v) \quad \forall v \in H_m \subset H,$$

тобто

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_m, \quad \forall m,$$

де використана щільність \tilde{H} в H і теорема 6.22. \triangleright

Теорема 6.25 (про еквівалентність варіаційної рівності і задачі мінімізації).

Нехай H є гільбертовим простором над \mathbf{R} , $a(u, v)$ є білінійною симетричною коерцитивною формою і $f \in H^*$. Тоді задача:

$$\text{знайти } u \in H : \quad a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H \quad (6.3)$$

еквівалентна наступній задачі мінімізації:

$$\text{знайти } u \in H : \quad E(v) \geq E(u) \quad \forall v \in H, \quad (6.6)$$

де

$$E(v) = \|v\|_a^2 - 2 \langle f, v \rangle = a(v, v) - 2 \langle f, v \rangle.$$

$\triangleleft (\Rightarrow)$ Нехай $u \in H$ є розв'язком задачі (6.3). Тоді $\|u - v\|_a^2 \geq 0 \quad \forall v \in H$ та

$$\|u\|_a^2 + \|v\|_a^2 - 2a(u, v) \geq 0,$$

тобто

$$a(v, v) - 2 \langle f, v \rangle \geq -\|u\|_a^2.$$

Звідки витікає (6.6), оскільки $-\|u\|_a^2 = a(u, u) - 2 \langle f, u \rangle$ в силу (6.3). $(\Rightarrow) \triangleright$

$\triangleleft (\Leftarrow)$ Нехай $u \in H$ є розв'язком задачі (6.6). Тоді для $\alpha \geq 0$ і $v \in H$ маємо

$$E(u + \alpha v) \geq E(u),$$

тобто $\alpha = 0$ реалізує мінімум функції $\Psi(\alpha) = E(u + \alpha v)$. Отже,

$$\left. \frac{d\Psi(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \geq 0,$$

де, наприклад,

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a(u + \alpha v, u + \alpha v) - a(u, u)}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a(u + \alpha v, u + \alpha v) - a(u + \alpha v, u) + a(u + \alpha v, u) - a(u, u)}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a(u + \alpha v, \alpha v) + a(u, \alpha v)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} a(u + \alpha v, v) + a(u, v) = 2a(u, v). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$2a(u, v) \geq 2 \langle f, v \rangle.$$

Аналогічно, розглядаючи функцію $\widetilde{\Psi}(\alpha) = E(u - \alpha v)$, робимо висновок, що

$$2a(u, v) \leq 2\langle f, v \rangle. \quad (\Leftarrow) \triangleright$$

Для фіксованого $s \in \mathbf{R}$ множина 1-періодичних комплекснозначних "функцій"

$$H_{pe*}^s((0, 1)^n) = \left\{ u = \sum_{m \in Z_*^n} \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i} : \sum_{m \in Z_*^n} |m|^{2s} |\alpha_m|^2 < \infty \right\}$$

є сепарабельним гільбертовим простором із скалярним добутком

$$\langle h, l \rangle_{H_{pe*}^s((0, 1)^n)} = \sum_{m \in Z_*^n} |m|^{2s} \alpha_m \bar{\beta}_m = (2\pi)^{-2s} \int_{(0, 1)^n} ((-\Delta)^{s/2} h) ((-\Delta)^{s/2} l) dx$$

для $h(x) = \sum_{m \in Z_*^n} \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i}$ і $l(x) = \sum_{m \in Z_*^n} \beta_m e^{(x, m) 2\pi i}$. Підпростір 1-періодичних дійснозначних функцій в цьому просторі визначається рівністю

$$H_{pR*}^s((0, 1)^n) = \left\{ u = \sum_{m \in Z_*^n} \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i} \in H_{pe*}^s((0, 1)^n) : \alpha_m = \bar{\alpha}_{-m} \quad \forall m \in Z_*^n \right\},$$

оскільки із рівності $u = \bar{u}$ випливає, що

$$u = \sum_{m \in Z_*^n} \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i} = \sum_{m \in Z_*^n} \bar{\alpha}_m e^{-(x, m) 2\pi i} = \sum_{m \in Z_*^n} \bar{\alpha}_{-m} e^{(x, m) 2\pi i} = \bar{u}.$$

Підпростір $H_{pR*}^s((0, 1)^n)$ є повним, оскільки співпадає із множиною нулів лінійного обмеженого оператора $Au = u - \bar{u}$, що діє із $H_{pe*}^s((0, 1)^n)$ в $H_{pe*}^s((0, 1)^n)$.

Приклад 6.26 (1-періодична задача для рівняння Пуассона). Розглянемо гільбертів простір $H = H_{pR*}^1((0, 1)^n)$. Тоді

$$a(u, v) = \int_{(0, 1)^n} (\nabla u, \nabla v) dx = \int_{(0, 1)^n} ((-\Delta) u) v dx = \int_{(0, 1)^n} ((-\Delta)^{1/2} u) ((-\Delta)^{1/2} v) dx$$

є білінійною симетричною коерцитивною формою на $H_{pR*}^1((0, 1)^n)$.

Таким чином, для $f \in H_{pR*}^{-1}((0, 1)^n)$ задача мінімізації:

$$\text{знайти } u \in H_{pR*}^1((0, 1)^n) : \quad E(v) \geq E(u) \quad \forall v \in H_{pR*}^1((0, 1)^n),$$

де $E(v) = \int_{(0, 1)^n} (\nabla v, \nabla v) dx - 2 \int_{(0, 1)^n} f v dx$, еквівалентна 1-періодичній задачі для рівняння Пуассона

$$-\Delta u = f \quad \text{в } H_{pR*}^{-1}((0, 1)^n).$$

Приклад 6.27 (1-періодична задача для дивергентного рівняння). Розглянемо гільбертів простір $H = H_{pR^*}^1((0, 1)^n)$ і симетричну матрицю $A(x) \in \tilde{L}^\infty(\Omega)^{n \times n}$ таку, що $\alpha I \leq A(x) \leq \beta$ для м.в. $x \in [0, 1]^n$ і деяких додатних α, β . Тоді

$$a(u, v) = \int_{(0,1)^n} (A(x)\nabla u(x), \nabla v(x)) dx$$

є білінійною симетричною коерцитивною формою на $H_{pR^*}^1((0, 1)^n)$.

Таким чином, для $f \in H_{pR^*}^{-1}((0, 1)^n)$ задача (6.3) еквівалентна 1-періодичній задачі Дірихле для дивергентного рівняння

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f \quad \text{в} \quad H_{pR^*}^{-1}((0, 1)^n).$$

Приклад 6.28 (задача Дірихле для рівняння із перенесенням). Нехай Ω є областю, $H = H_0^1(\Omega)$ і вектор $B(x) \in \tilde{L}^\infty(\Omega)^n$ такий, що $\operatorname{div} B(x) = 0$. Тоді

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) dx + \int_{\Omega} (B(x) \cdot \nabla u(x)) v(x) dx$$

є білінійною коерцитивною формою на $H_0^1(\Omega)$, де

$$B(x) \cdot \nabla u(x) = B_1(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \dots + B_n(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}.$$

◁ Перевіримо коерцитивність $a(u, v)$. Маємо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (B(x) \cdot \nabla v(x)) v(x) dx &= \int_{\Omega} (B(x) v(x), \nabla v(x)) dx = \\ &= - \int_{\Omega} (\operatorname{div}(B(x) v(x))) v(x) dx = - \int_{\Omega} (B(x) \cdot \nabla v(x)) v(x) dx, \end{aligned}$$

оскільки $\operatorname{div}(B(x) v(x)) = \operatorname{div}(B(x)) v(x) + B(x) \cdot \nabla v(x)$, тобто

$$a(v, v) = \int_{\Omega} (\nabla v(x), \nabla v(x)) dx. \quad \triangleright$$

Таким чином, для $f \in H^{-1}(\Omega)$ задача (6.3) еквівалентна задачі Дірихле для рівняння із перенесенням

$$-\Delta u + B(x) \cdot \nabla u = f \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega),$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega).$$

Аналогічно можна вивчити 1-періодичну задачу для рівняння із перенесенням та задачу Дірихле для дивергентного рівняння і рівняння Пуассона.

7. Основні стаціонарні і нестаціонарні (еволюційні) задачі

Задача Дірихле для рівняння Пуассона: знайти $u = u(x)$:

$$-\Delta u = f \quad \text{в } \Omega, \quad u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega,$$

де $f(x)$ – задана функція на Ω і $\varphi(x)$ – задана функція на $\partial\Omega$.

Задача Дірихле для загального дивергентного рівняння: знайти $u = u(x)$:

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + B(x) \cdot \nabla u + \operatorname{div}(b(x)u) + c(x)u = f \quad \text{в } \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega,$$

де $A(x) = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – задана матриця-функція на Ω , $B(x), b(x)$ – задані вектор-функції на Ω , $c(x), f(x)$ – задані функції на Ω і $\varphi(x)$ – задана функція на $\partial\Omega$. У координатному записі це рівняння має вигляд

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(x)u) + c(x)u = f \quad \text{в } \Omega,$$

де $B(x) = (B_1(x), \dots, B_n(x))$ і $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$.

Початково-краєва задача (Коші-Дірихле) для рівняння теплопровідності:

знайти $u = u(x, t)$:

$$u'_t - \Delta u = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega,$$

де $f(x, t)$ – задана функція на $\Omega \times (0, T)$, $\varphi(x, t)$ – задана функція на $\partial\Omega \times (0, T)$ і $u_0(x)$ – задана функція на Ω . Якщо в цій задачі замінити оператор Лапласа на загальний дивергентний оператор, тоді отримаємо початково-краєву задачу для рівняння Колмогорова-Фоккера-Планка.

Початково-краєва задача для рівняння Шредінгера: знайти $u = u(x, t)$:

$$i u'_t - \Delta u + c(x)u = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega,$$

де $f(x, t)$ – задана функція на $\Omega \times (0, T)$, $\varphi(x, t)$ – задана функція на $\partial\Omega \times (0, T)$, $c(x)$ і $u_0(x)$ – задані функції на Ω .

Початково-краєва задача для *хвильового рівняння*: знайти $u = u(x, t)$:

$$u''_{tt} - \Delta u = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega, \quad u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в } \Omega,$$

де $f(x, t)$ – задана функція на $\Omega \times (0, T)$, $\varphi(x, t)$ – задана функція на $\partial\Omega \times (0, T)$, $u_0(x)$ і $u_1(x)$ – задані функції на Ω .

Початково-краєва задача для еволюційних *рівнянь Ламе* (теорії пружності): знайти $u = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$:

$$u''_{tt} - \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} u) = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega, \quad u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в } \Omega,$$

де $f(x, t)$ – задана вектор-функція на $\Omega \times (0, T)$, $\varphi(x, t)$ – задана вектор-функція на $\partial\Omega \times (0, T)$, $u_0(x)$ і $u_1(x)$ – задані вектор-функції на Ω . Ця задача для неоднорідних матеріалів має такий вигляд:

$$u''_{tt} - \operatorname{div}(\mu(x) \nabla u) + \nabla((\mu(x) + \lambda(x)) \operatorname{div} u) = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega, \quad u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в } \Omega,$$

де $\mu(x), \lambda(x)$ – задані функції на Ω .

Початково-краєва задача для еволюційних *рівнянь Максвелла*: знайти

$$E = (E_1(x, t), \dots, E_n(x, t)), B = (B_1(x, t), \dots, B_n(x, t)):$$

$$E'_t - \operatorname{rot} B = F \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$B'_t + \operatorname{rot} E = G \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{div} B = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$[B, \nu] = \varphi_b, \quad (E, \nu) = \varphi_e \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T),$$

$$E|_{t=0} = E_0 \quad \text{в } \Omega, \quad B|_{t=0} = B_0 \quad \text{в } \Omega,$$

де $F(x, t), G(x, t)$ – задані вектор-функції на $\Omega \times (0, T)$, $\varphi_b(x, t)$ – задана вектор-функція на $\partial\Omega \times (0, T)$, $\varphi_e(x, t)$ – задана функція на $\partial\Omega \times (0, T)$, $E_0(x), B_0(x)$ – задані вектор-функції на Ω , $[\cdot, \nu]$ і (\cdot, ν) позначають векторний і скалярний добуток вектор-функції на зовнішню нормаль ν до межі $\partial\Omega$ і, наприклад, для $n = 3$ оператор ротора визначається рівністю

$$\text{rot } E = (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2, \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3, \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1).$$

Початково-краєва задача для еволюційних рівнянь Нав'є-Стокса (в'язкої нестискуваної рідини): знайти $(u, p) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t), p(x, t))$:

$$u'_t - \mu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$\text{div } u = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega,$$

де $f(x, t)$ – задана вектор-функція на $\Omega \times (0, T)$, $u_0(x)$ – задана вектор-функція на Ω і параметр μ називається коефіцієнтом в'язкості. Наприклад, для $n = 3$ у координатному записі рівняння Нав'є-Стокса мають вигляд

$$(u_1)'_t - \mu \Delta u_1 + u_1 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 u_1 + u_3 \partial_3 u_1 + \partial_1 p = f_1 \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$(u_2)'_t - \mu \Delta u_2 + u_1 \partial_1 u_2 + u_2 \partial_2 u_2 + u_3 \partial_3 u_2 + \partial_2 p = f_2 \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$(u_3)'_t - \mu \Delta u_3 + u_1 \partial_1 u_3 + u_2 \partial_2 u_3 + u_3 \partial_3 u_3 + \partial_3 p = f_3 \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T).$$

Коли коефіцієнт в'язкості дорівнює нулю (або є "дуже маленьким"), тоді розглядається початково-краєва задача для рівнянь Ейлера (ідеальної нестискуваної рідини): знайти $(u, p) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t), p(x, t))$:

$$u'_t + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$\text{div } u = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$(u, \nu) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega,$$

де $f(x, t)$ та $u_0(x)$ – задані вектор-функції на $\Omega \times (0, T)$ та Ω .

Рівняння гідродинаміки (газодинаміки - нев'язкої нестискуваної рідини) :
 знайти $(\varrho, u, E) = (\varrho(x, t), u_1(x, t), \dots, u_n(x, t), E(x, t))$:

$$\varrho'_t + \operatorname{div}(\varrho u) = 0,$$

$$(\varrho u)'_t + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p = f,$$

$$(\varrho E)'_t + \operatorname{div}(\varrho E u) + \operatorname{div}(p u) = 0,$$

де $p = p(\varrho, E)$ визначає рівняння стану (рідини або газу) і $u \otimes u = \{u_i u_j\}_{i,j=1}^n$.

Розглянемо для $n = 1$ і $\Omega = \mathbf{R}$ початково-краєву задачу для хвильового рівняння: знайти $u = u(x, t)$:

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, \infty),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $u_0(x), u_1(x)$ задані функції на Ω і постійна a визначає "швидкість" розповсюдження хвиль.

Розв'язок цієї задачі представляється такою формулою Даламбера

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\tau) d\tau.$$

Цю формулу можна переписати у вигляді

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{U(x + at) - U(x - at)}{2a},$$

де $U'_x = u_1(x)$. Зокрема, при $u_1 = 0$ ці формули моделюють розповсюдження двох хвиль: $(1/2)u_0(x + at)$ і $(1/2)u_0(x - at)$, що мають швидкості a та $-a$.

Нехай фіксовані банаховий простір B і число $T > 0$. Розглянемо множину неперервних відображень

$$v : [0, T] \rightarrow B.$$

Ця множина позначається через $C^0([0, T]; B)$ і є лінійним нормованим простором із нормою

$$\|v\|_{C^0([0, T]; B)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|_B.$$

На просторі $C^0([0, T]; B)$ можна також задати норми

$$\|v\|_{L^p((0, T); B)} = \left(\int_0^T \|v(\tau)\|_B^p d\tau \right)^{1/p} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|v\|_{L^\infty((0, T); B)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|v\|_{L^p((0, T); B)} \quad \text{для } v \in C^0([0, T]; B).$$

Визначимо банаховий простір $L^p((0, T); B)$ як поповнення $C^0([0, T]; B)$ по відповідній нормі та позначимо

$$\tilde{L}^\infty((0, T); B) = \{v \in L^1((0, T); B) : \|v\|_{L^\infty((0, T); B)} < \infty\}.$$

Нехай Ω є областю в \mathbf{R}^n . Розглянемо початково-краєву задачу для рівняння теплопровідності: знайти $u = u(x, t)$:

$$u'_t - \Delta u = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (7.1)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega.$$

Помножимо скалярно перше рівняння в (7.1) на функцію $v \in C_0^\infty(\Omega)$, проінтегруємо отриману рівність по Ω та частинами. Тоді

$$\int_{\Omega} u'_t v dx + \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (7.2)$$

Слабким розв'язком задачі (7.1) називається елемент

$$u \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$$

такий, що $u'_t \in L^2((0, T); H^{-1}(\Omega))$, $u|_{t=0} = u_0$ в $L^2(\Omega)$ і виконана інтегральна тотожність (7.2) для будь-якої функції $v \in C_0^\infty(\Omega)$ і майже всіх $t \in (0, T)$.

Теорема 7.1 (Ліонса про вкладення). *Нехай фіксовано $u \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$ і $u'_t \in L^2((0, T); H^{-1}(\Omega))$. Тоді $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ та*

$$\left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)'_t = 2 \int_{\Omega} u'_t u dx. \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 7.2 (про існування слабкого розв'язку початково-краєвої задачі для рівняння теплопровідності). *Нехай $f \in L^2((0, T); L^2(\Omega))$ і $u_0 \in L^2(\Omega)$. Тоді існує єдиний слабкий розв'язок $u \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$ задачі (7.1),*

$$u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$$

і для майже всіх $t \in (0, T)$ виконана енергетична рівність

$$\int_{\Omega} \frac{u^2}{2} dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} f u dx d\tau + \int_{\Omega} \frac{u_0^2}{2} dx.$$

◁ Простір $H_0^1(\Omega)$ є сепарабельним. Тому знайдуться лінійно незалежні елементи $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ такі, що множина

$$\tilde{H} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \forall \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad \forall m \in \mathbf{N} \right\}$$

є щільною в $H_0^1(\Omega)$.

Фіксуємо ціле $m > 0$ і визначимо скінченновимірний простір

$$H_m = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

Розглянемо наступну задачу: знайти $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) w_i$ таке, що

$$\int_{\Omega} u'_m w_j dx + \int_{\Omega} (\nabla u_m, \nabla w_j) dx = \int_{\Omega} f(t) w_j dx, \quad t \in (0, T), \quad j = 1, \dots, m, \quad (7.3)$$

$$u_m|_{t=0} = \text{Pr}_{V_m}(u_0).$$

Це задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь щодо функцій $\alpha_{1m}(t), \dots, \alpha_{mm}(t)$:

$$\sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega} w_i w_j dx \right) \alpha'_{im}(t) + \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega} (\nabla w_i, \nabla w_j) dx \right) \alpha_{im}(t) = \int_{\Omega} f(t) w_j dx$$

$$t \in (0, T), \quad j = 1, \dots, m, \quad u_m|_{t=0} = \text{Pr}_{V_m}(u_0).$$

Така задача має єдиний розв'язок, оскільки матриця $\int_{\Omega} w_i w_j dx$ має обернену (§ 6).

Помножимо рівняння задачі на $\alpha_{jm}(t)$ і підсумуємо по $j = 1, \dots, m$, отримаємо

$$\int_{\Omega} u'_m(t) u_m(t) dx + \int_{\Omega} (\nabla u_m(t), \nabla u_m(t)) dx = \int_{\Omega} f(t) u_m(t) dx.$$

Із цієї рівності випливає, що

$$\begin{aligned} & \left(\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)'_t + 2 \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)^n}^2 = 2 \int_{\Omega} f(t) u_m(t) dx \leq \\ & \leq 2 \|f(t)\|_{L^2(\Omega)^n} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + C \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Інтегруючи цю нерівність по $t \in (0, s)$, маємо

$$\begin{aligned} & \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^s \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)^n}^2 dt \leq \\ & \leq \|\text{Pr}_{V_m}(u_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^s \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Таким чином, для деякої постійної $M > 0$ виконані нерівності

$$\|u_m\|_{\tilde{L}^\infty((0,T);L^2(\Omega))} + \|\nabla u_m\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega)^n)} \leq M$$

і існують $u \in \tilde{L}^\infty((0, T); L^2(\Omega)) \cap L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$ і підпоследовність

$$u_{\tilde{m}} \in \tilde{L}^\infty((0, T); L^2(\Omega)) \cap L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$$

такі, що

$$\begin{aligned} u_{\tilde{m}} & \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L^2((0, T); H_0^1(\Omega)), \\ u_{\tilde{m}} & \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{в} \quad \tilde{L}^\infty((0, T); L^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Помножимо рівняння (7.3) на функцію $\varphi \in C^1[0, T]$ таку, що $\varphi(T) = 0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0, T]$ та частинами. Тоді

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega u_m(t) \varphi'(t) w_j dx dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla u_m(t), \varphi(t) \nabla w_j) dx dt = \\ & = \int_\Omega u_m(0) \varphi(0) w_j dx + \int_0^T \int_\Omega f(t) \varphi(t) w_j dx dt. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Співвідношень (7.4) достатньо, щоб перейти до границі в (7.5) і отримати, що

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega u(t) \varphi'(t) v dx dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla u(t), \varphi(t) \nabla v) dx dt = \\ & = \int_\Omega u_0 \varphi(0) v dx + \int_0^T \int_\Omega f(t) \varphi(t) v dx dt \end{aligned} \quad (7.6)$$

для будь-якого $v \in \tilde{H}$ і тому для будь-якого $v \in H_0^1(\Omega)$.

Із (7.6) при $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$ випливає, що виконана інтегральна тотожність (7.2).

Помножимо тотожність (7.2) на функцію $\varphi \in C^1[0, T]$ таку, що $\varphi(T) = 0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0, T]$ та частинами. Тоді

$$\int_0^T \int_\Omega u(t) \varphi'(t) v dx dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla u(t), \varphi(t) \nabla v) dx dt = \quad (7.7)$$

$$= \int_{\Omega} u|_{t=0} \varphi(0) v \, dx + \int_0^T \int_{\Omega} f(t) \varphi(t) v \, dx dt,$$

для будь-якого $v \in H_0^1(\Omega)$. Порівнюючи (7.6) і (7.7) при $\varphi(0) = 1$, отримуємо

$$\int_{\Omega} u|_{t=0} v \, dx = \int_{\Omega} u_0 v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Отже, виконана рівність $u|_{t=0} = u_0$ в $L^2(\Omega)$. Крім того, із (7.2) випливає, що

$$\int_{\Omega} u'_t v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) \, dx.$$

Із цієї рівності отримуємо, що $u'_t \in L^2((0, T); H^{-1}(\Omega))$. Дійсно,

$$\|u'_t\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}=1} \left| \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) \, dx \right| \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

і тому

$$\|u'_t\|_{L^2((0, T); H^{-1}(\Omega))}^2 \leq C^2 \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt + \int_0^T \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \, dt < \infty.$$

Із (7.2) при $v = u(t)$ (для майже всіх $t \in (0, T)$) також маємо

$$\left(\int_{\Omega} \frac{u^2}{2} \, dx \right)'_t + \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla u) \, dx = \int_{\Omega} f u \, dx$$

і (інтегруючи) отримуємо енергетичну рівність, із якої одразу випливає єдиність слабкого розв'язку задачі (7.2). \triangleright

Початково-краєва задача для рівняння теплопровідності у 1-періодичних функціях формулюється аналогічно: знайти $u(x, t) \in L^2((0, T); H_{pR^*}^1((0, 1)^n))$:

$$u'_t - \Delta u = f \quad \text{в} \quad L^2((0, T); H_{pR^*}^{-1}((0, 1)^n)), \quad (7.8)$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad H_{pR^*}^0((0, 1)^n).$$

Слабким розв'язком 1-періодичної задачі (7.8) називається елемент

$$u \in L^2((0, T); H_{pR^*}^1((0, 1)^n))$$

такий, що $u'_t \in L^2((0, T); H_{pR^*}^{-1}((0, 1)^n))$, $u|_{t=0} = u_0$ в $H_{pR^*}^0((0, 1)^n)$ і

$$\int_{(0,1)^n} u'_t v \, dx + \int_{(0,1)^n} (\nabla u, \nabla v) \, dx = \int_{(0,1)^n} f v \, dx$$

для будь-якого елемента $v \in H_{pR^*}^1((0, 1)^n)$ і майже всіх $t \in (0, T)$.

Теорема 7.3 (про існування слабкого розв'язку 1-періодичної початково-краєвої задачі для рівняння теплопровідності). *Нехай $f \in L^2((0, T); H_{pR^*}^0((0, 1)^n))$ і $u_0 \in H_{pR^*}^0((0, 1)^n)$. Тоді існує єдиний слабкий розв'язок u задачі (7.8),*

$$u \in C^0([0, T]; H_{pR^*}^0((0, 1)^n))$$

і для майже всіх $t \in (0, T)$ виконана енергетична рівність

$$\int_{(0,1)^n} \frac{u^2}{2} dx + \int_0^t \int_{(0,1)^n} |\nabla u|^2 dx d\tau = \int_0^t \int_{(0,1)^n} f u dx d\tau + \int_{(0,1)^n} \frac{u_0^2}{2} dx. \quad (7.9)$$

Доведення цієї теореми повторює доведення теореми 7.2. Теорему 7.3 можна довести і використовуючи явне представлення розв'язку задачі (7.8) у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{m \in Z_*^n} \alpha_m e^{-(2\pi)^2 |m|^2 t + (x, m) 2\pi i} + \sum_{m \in Z_*^n} e^{(x, m) 2\pi i} \int_0^t f_m(\tau) e^{-(2\pi)^2 |m|^2 (t-\tau)} d\tau, \quad (7.10)$$

де

$$\alpha_m = \int_{(0,1)^n} e^{-(x, m) 2\pi i} u_0(x) dx, \quad f_m(t) = \int_{(0,1)^n} e^{-(x, m) 2\pi i} f(x, t) dx$$

є коефіцієнтами Фур'є елементів $u_0(x)$ і $f(x, t)$ для $m \in Z_*^n$. Таким чином,

$$u_m(t) = \alpha_m e^{-(2\pi)^2 |m|^2 t} + \int_0^t f_m(\tau) e^{-(2\pi)^2 |m|^2 (t-\tau)} d\tau$$

є коефіцієнтами Фур'є розв'язку $u(x, t)$ задачі (7.8) для $m \in Z_*^n$.

Представлення (7.9) є коректним у разі, коли Z_*^n замінено на Z^n та розв'язок задачі (7.8) розшукується як елемент простору $u \in L^2((0, T); H_{pRr}^1((0, 1)^n))$, де

$$H_{pRr}^s((0, 1)^n) = \left\{ u = \sum_{m \in Z^n} \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i} \in H_{per}^s((0, 1)^n) : \alpha_m = \bar{\alpha}_{-m} \quad \forall m \in Z^n \right\}$$

позначає підпростір 1-періодичних дійснозначних функцій в $H_{per}^s((0, 1)^n)$.

Рівняння задач, що моделюють рух в'язкої нестискуваної рідини, містять таке рівняння нерозривності (умова соленоїдальності)

$$\operatorname{div} u = 0.$$

Зручно вводити це рівняння у визначення відповідних просторів, у яких розглядатимуться розв'язки цих задач. Наприклад, розв'язки 1-періодичних задач

можна розглядати у просторах

$$\begin{aligned} H_{pd*}^s &= \left\{ u = \sum_{m \in Z_*^n} (\alpha_m^1, \dots, \alpha_m^n) e^{(x,m)2\pi i} \in H_{pR*}^s((0,1)^n)^n : \operatorname{div} u = 0 \right\} = \\ &= \left\{ u \in H_{pR*}^s((0,1)^n)^n : m_1 \alpha_m^1 + \dots + m_n \alpha_m^n = 0 \quad \forall m = (m_1, \dots, m_n) \in Z_*^n \right\}. \end{aligned}$$

Підпростір $H_{pd*}^s \subset H_{pR*}^s((0,1)^n)^n$ є повним, оскільки співпадає із множиною нулів лінійного обмеженого оператора div , що діє із $H_{pR*}^s((0,1)^n)^n$ в $H_{pR*}^{s-1}((0,1)^n)$.

Розглянемо, наприклад, 1-періодичну початково-краєву задачу для рівняння Стокса: знайти $(u(x,t), p(x,t)) \in L^2((0,T); H_{pd*}^1) \times L^2((0,T); H_{pR*}^0((0,1)^n))$:

$$\begin{aligned} u'_t - \mu \Delta u + \nabla p &= f \quad \text{в} \quad L^2((0,T); H_{pR*}^{-1}((0,1)^n)^n), \quad (7.11) \\ u|_{t=0} &= u_0 \quad \text{в} \quad H_{pd*}^0. \end{aligned}$$

Помножимо скалярно перше рівняння в (7.11) на $v \in H_{pd*}^1$, проінтегруємо отриману рівність по $(0,1)^n$ та частинами. Тоді

$$\int_{(0,1)^n} u'_t v \, dx + \int_{(0,1)^n} (\nabla u, \nabla v) \, dx = \int_{(0,1)^n} f v \, dx, \quad (7.12)$$

оскільки у відповідності із (5.14) маємо

$$\int_{(0,1)^n} (\nabla p, v) \, dx = \int_{(0,1)^n} p (-\operatorname{div} v) \, dx = 0.$$

Крім того, в (7.12) використовується, наприклад, позначення

$$\int_{(0,1)^n} u'_t v \, dx = \int_{(0,1)^n} (u_1)'_t v_1 \, dx + \dots + \int_{(0,1)^n} (u_n)'_t v_n \, dx,$$

де інтеграли є визначеними у відповідності із (5.4).

Слабким розв'язком задачі (7.11) для $u_0 \in H_{pd*}^0$ і $f \in L^2((0,T); H_{pR*}^0((0,1)^n)^n)$ називається елемент

$$u \in L^2((0,T); H_{pd*}^1)$$

такий, що $u'_t \in L^2((0,T); H_{pR*}^{-1}((0,1)^n)^n)$, $u|_{t=0} = u_0$ в H_{pd*}^0 і виконана інтегральна тотожність (7.12) для будь-якого $v \in H_{pd*}^1$ і майже всіх $t \in (0,T)$.

Застосовуючи оператора div до перших рівнянь в (7.11), отримуємо

$$\Delta p = \operatorname{div} f \quad \text{в} \quad L^2((0,T); H_{pR*}^{-1}((0,1)^n)). \quad (7.13)$$

Таким чином, елемент $p \in L^2((0, T); H_{pR^*}^1((0, 1)^n))$ може бути знайдений як єдиний розв'язок 1-періодичної задачі для рівняння Пуассона. Крім того, тотожність (7.12) є векторним аналогом відповідної тотожності для задачі (7.8) і тому для задачі (7.11) виконується аналог теореми 7.3 і енергетична рівність (7.9).

Насправді зручно переформулювати задачу (7.11) із використанням теореми Ходжа. Використовуючи (5.15), можемо записати

$$f = F + \nabla\varphi,$$

де $F \in L^2((0, T); H_{pd^*}^0)$ і $p = \varphi$ в (7.11) у відповідності із (7.13). Таким чином, 1-періодичну початково-краєву задачу для рівняння Стокса можна звести до задачі: знайти $u(x, t) \in L^2((0, T); H_{pd^*}^1)$:

$$u'_t - \mu \Delta u = F \quad \text{в} \quad L^2((0, T); H_{pd^*}^{1*}), \quad (7.14)$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad H_{pd^*}^0,$$

де $H_{pd^*}^{1*}$ є спряжений простір для $H_{pd^*}^1$.

Слабкий розв'язок $u \in L^2((0, T); H_{pd^*}^1)$ для задачі (7.14) визначається за допомогою тотожності (7.12), де інтеграли розуміються як спряженість між $H_{pd^*}^{1*}$ і $H_{pd^*}^1$. Для такого розв'язку виконується аналог теореми 7.3 і він представляється у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{m \in Z_*^n} \alpha_m e^{-(2\pi)^2 \mu |m|^2 t + (x, m) 2\pi i} + \sum_{m \in Z_*^n} e^{(x, m) 2\pi i} \int_0^t f_m(\tau) e^{-(2\pi)^2 \mu |m|^2 (t-\tau)} d\tau,$$

де α_m і $f_m(t)$ є коефіцієнтами Фур'є елементів $u_0(x)$ і $F(x, t)$ для $m \in Z_*^n$. Таким чином,

$$u_m(t) = \alpha_m e^{-(2\pi)^2 \mu |m|^2 t} + \int_0^t f_m(\tau) e^{-(2\pi)^2 \mu |m|^2 (t-\tau)} d\tau$$

є коефіцієнтами Фур'є розв'язку $u(x, t)$ задачі (7.14) для $m \in Z_*^n$.

8. Початково-краєва 1-періодична задача для рівнянь Нав'є-Стокса

Розглянемо для $n = 2, 3, 4$, $u_0 \in H_{pd*}^0$ і $f \in L^2((0, T); H_{pd*}^0)$ початково-краєву 1-періодичну задачу для рівнянь Нав'є-Стокса: знайти (u, p) :

$$u'_t - \mu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \quad \text{в } (0, 1)^n \times (0, T), \quad (8.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в } (0, 1)^n \times (0, T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } (0, 1)^n.$$

Помножимо скалярно рівняння (8.1) на вектор-функцію $v \in H_{pd*}^1$, проінтегруємо отриману рівність по $(0, 1)^n$ та частинами. Тоді

$$\int_{(0,1)^n} (u'_t, v) dx + \mu \int_{(0,1)^n} (\nabla u, \nabla v) dx + \int_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla u, v) dx = \int_{(0,1)^n} (f, v) dx. \quad (8.2)$$

Слабким розв'язком 1-періодичної задачі для рівнянь Нав'є-Стокса називається елемент

$$u \in L^2((0, T); H_{pd*}^1)$$

такий, що $u'_t \in L^1((0, T); H_{pd*}^1)$, $u|_{t=0} = u_0$ в H_{pd*}^1 і виконана інтегральна тотожність (8.2) для будь-якої вектор-функції $v \in H_{pd*}^0$ і майже всіх $t \in (0, T)$.

Теорема 8.1 (Соболева про вкладення $L^q((0, 1)^n) \subset H_{pR*}^1$). *Нехай $u \in H_{pR*}^1$. Тоді існують постійні $C_1 = C_1(q, n)$ і $C_2 = C_2(n)$ такі, що*

$$\|u\|_{L^q((0,1)^n)} \leq C_1 \|u\|_{H_{pR*}^1} \quad \text{при } n = 2 \quad \text{і} \quad 1 \leq q < \infty;$$

$$\|u\|_{L^6((0,1)^n)} \leq C_2 \|u\|_{H_{pR*}^1} \quad \text{при } n = 3;$$

$$\|u\|_{L^{2n/(n-2)}((0,1)^n)} \leq C_2 \|u\|_{H_{pR*}^1} \quad \text{при } n \geq 3. \quad \triangleleft \triangleright$$

Із формули Стокса (інтегрування частинами) та нерівності Гельдера маємо

$$\begin{aligned} \left| \int_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla u, v) dx \right| &= \left| \int_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla v, u) dx \right| \leq \int_{(0,1)^n} |(u \cdot \nabla v, u)| dx \leq \\ &\leq \|u\|_{L^4((0,1)^n)}^2 \|\nabla v\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}} \leq C_2 \|u\|_{H_{pd*}^1}^2 \|v\|_{H_{pd*}^1} \end{aligned}$$

i

$$\|u \cdot \nabla u\|_{H_{pd*}^1} = \sup_{\|v\|_{H_{pd*}^1}=1} \left| \int_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla u, v) dx \right| \leq C_2 \|u\|_{H_{pd*}^1}^2$$

Таким чином, всі інтеграли в (8.2) є визначеними.

Теорема 8.2 (про існування слабкого розв'язку 1-періодичної задачі для рівнянь Нав'є-Стокса). *Нехай $f \in L^2((0, T); H_{pd*}^0)$ і $u_0 \in H_{pd*}^0$. Тоді слабкий розв'язок $u \in L^2((0, T); H_{pd*}^1)$ рівнянь Нав'є-Стокса існує,*

$$u \in \tilde{L}^\infty((0, T); H_{pd*}^0)$$

і для майже всіх $t \in (0, T)$ виконана енергетична нерівність

$$\int_{(0,1)^n} \frac{|u|^2}{2} dx + \mu \int_0^t \int_{(0,1)^n} |\nabla u|^2 dx d\tau \leq \int_{(0,1)^n} \frac{|u_0|^2}{2} dx + \int_0^t \int_{(0,1)^n} (f, u) dx d\tau.$$

◁ Гільбертовий простір H_{pd*}^1 є сепарабельним. Тому знайдуться лінійно незалежні $\{w_i\}_{i=1}^\infty \subset H_{pd*}^1$ такі, що множина

$$\tilde{H} = \left\{ v \in H_{pd*}^1 : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \forall \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad \forall m \in \mathbf{N} \right\}$$

є щільною в H_{pd*}^1 .

Фіксуємо ціле $m > 0$ і визначимо скінченновимірний простір

$$H_m = \left\{ v \in H_{pd*}^1 : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

Розглянемо таку задачу: знайти $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) w_i$ таке, що

$$\int_{(0,1)^n} (u'_m, w_j) dx + \mu \int_{(0,1)^n} (\nabla u_m, \nabla w_j) dx + \int_{(0,1)^n} (u_m \cdot \nabla u_m, w_j) dx = \int_{(0,1)^n} (f(t), w_j) dx, \quad (8.3)$$

$$t \in (0, T), \quad j = 1, \dots, m,$$

$$u_m|_{t=0} = \text{Pr}_{H_m}(u_0).$$

Це задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь щодо функцій $\alpha_{1m}(t), \dots, \alpha_{mm}(t)$:

$$\sum_{i=1}^m \left(\int_{(0,1)^n} (w_i, w_j) dx \right) \alpha'_{im}(t) + \mu \sum_{i=1}^m \left(\int_{(0,1)^n} (\nabla w_i, \nabla w_j) dx \right) \alpha_{im}(t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,l=1}^m \left(\int_{(0,1)^n} (w_i \cdot \nabla w_i, w_j) dx \right) \alpha_{im}(t) \alpha_{lm}(t) = \int_{(0,1)^n} (f(t), w_j) dx \\
& t \in (0, T), \quad j = 1, \dots, m, \\
& u_m|_{t=0} = \text{Pr}_{H_m}(u_0).
\end{aligned}$$

Задача має єдиний розв'язок. Помножимо рівняння цієї задачі на $\alpha_{jm}(t)$ і підсумуємо по $j = 1, \dots, m$, отримуємо

$$\int_{(0,1)^n} (u'_m(t), u_m(t)) dx + \mu \int_{(0,1)^n} (\nabla u_m(t), \nabla u_m(t)) dx = \int_{(0,1)^n} (f(t), u_m(t)) dx. \quad (8.4)$$

Із цієї рівності випливає, що

$$\begin{aligned}
& \left(\|u_m(t)\|_{H_{pd^*}^0}^2 \right)' + 2\mu \|\nabla u_m(t)\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}}^2 = 2 \int_{(0,1)^n} (f(t), u_m(t)) dx \leq \\
& \leq 2 \|f(t)\|_{L^2((0,1)^n)^n} \|u_m(t)\|_{H_{pd^*}^0} \leq \mu \|\nabla u_m(t)\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}}^2 + C \|f(t)\|_{L^2((0,1)^n)^n}^2.
\end{aligned}$$

Інтегруючи цю нерівність по $t \in (0, s)$, маємо

$$\begin{aligned}
& \|u_m(s)\|_{H_{pd^*}^0}^2 + \mu \int_0^s \|\nabla u_m(t)\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}}^2 dt \leq \\
& \leq \|\text{Pr}_{H_m}(u_0)\|_{H_{pd^*}^0}^2 + C \int_0^s \|f(t)\|_{L^2((0,1)^n)^n}^2 dt.
\end{aligned}$$

Таким чином, для деякої постійної $M > 0$ виконані нерівності

$$\|u_m\|_{\tilde{L}^\infty((0,T); H_{pd^*}^0)} + \|\nabla u_m\|_{L^2((0,T); L^2((0,1)^n)^{n \times n})} \leq M$$

та існують $u \in \tilde{L}^\infty((0, T); H_{pd^*}^0) \cap L^2((0, T); H_{pd^*}^1)$ і підпослідовність

$$u_{\tilde{m}} \in L^2((0, T); H_{pd^*}^1)$$

такі, що

$$u_{\tilde{m}} \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L^2((0, T); H_{pd^*}^1) \quad \text{і} \quad u_{\tilde{m}} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{в} \quad \tilde{L}^\infty((0, T); H_{pd^*}^0). \quad (8.5)$$

Із додаткових оцінок можна також отримати, що

$$u_{\tilde{m}} \rightarrow u \quad \text{в} \quad L^2((0, T); H_{pd^*}^0). \quad (8.6)$$

Помножимо рівняння (8.3) на функцію $\varphi \in C^1[0, T]$ таку, що $\varphi(T) = 0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0, T]$ та частинами. Тоді

$$\int_0^T \int_{(0,1)^n} (u_m(t), \varphi'(t)w_j) dxdt + \mu \int_0^T \int_{(0,1)^n} (\nabla u_m(t), \varphi(t)\nabla w_j) dxdt + \quad (8.7)$$

$$+ \int_0^T \int_{(0,1)^n} (u_m(t) \cdot \nabla u_m(t), \varphi(t)w_j) dxdt = \int_{(0,1)^n} (u_m(0), \varphi(0)w_j) dx + \int_0^T \int_{(0,1)^n} (f(t), \varphi(t)w_j) dxdt.$$

Співвідношень (8.5) і (8.6) досить, щоб перейти до границі в (8.7) і отримати, що

$$\int_0^T \int_{(0,1)^n} (u(t), \varphi'(t)v) dxdt + \mu \int_0^T \int_{(0,1)^n} (\nabla u(t), \varphi(t)\nabla v) dxdt + \quad (8.8)$$

$$+ \int_0^T \int_{(0,1)^n} (u(t) \cdot \nabla u(t), \varphi(t)v) dxdt = \int_{(0,1)^n} (u_0, \varphi(0)v) dx + \int_0^T \int_{(0,1)^n} (f(t), \varphi(t)v) dxdt$$

для будь-якого $v \in \widetilde{H}$ і тому для будь-якого $v \in H_{pd*}^1$.

Із (8.8) при $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$ випливає, що виконана інтегральна тотожність (8.2).

Відповідно, із тотожності (8.2) отримуємо таку рівність

$$\int_{(0,1)^n} (u'_t, v) dx = \int_{(0,1)^n} (f, v) dx - \mu \int_{(0,1)^n} (\nabla u, \nabla v) dx - \int_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla u, v) dx.$$

Звідки маємо $u'_t \in L^1((0, T); H_{pd*}^1)$. Дійсно, наприклад, із формули Стокса (інтегрування частинами) та нерівності Гельдера випливає, що

$$\left| \int_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla u, v) dx \right| = \left| \int_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla v, u) dx \right| \leq \int_{(0,1)^n} |(u \cdot \nabla v, u)| dx \leq \\ \leq \|u\|_{L^4((0,1)^n)}^2 \|\nabla v\|_{L^2((0,1)^n \times n)} \leq C_2 \|u\|_{H_{pd*}^1}^2 \|v\|_{H_{pd*}^1}.$$

Таким чином, отримуємо нерівність

$$\|u \cdot \nabla u\|_{H_{pd*}^1} = \sup_{\|v\|_{H_{pd*}^1} = 1} \left| \int_{(0,1)^n} (u \cdot \nabla u, v) dx \right| \leq C_2 \|u\|_{H_{pd*}^1}^2.$$

Відповідно, інтегруючи цю нерівність, маємо

$$\|u \cdot \nabla u\|_{L^1((0,T); H_{pd*}^1)} = \int_0^T \|u \cdot \nabla u\|_{H_{pd*}^1} dt \leq C_2 \int_0^T \|u\|_{H_{pd*}^1}^2 dt < \infty.$$

Крім того, відомо, що із $u \in \tilde{L}^\infty((0, T); H_{pd*}^0)$ і $u'_t \in L^1((0, T); H_{pd*}^{1*})$ випливає, що u слабо неперервна як функція із $[0, T]$ в H_{pd*}^0 (тобто $\forall v \in H_{pd*}^0$ функція $t \mapsto \int_{(0,1)^n} (u(t), v) dx$ є неперервною)

Помножимо тотожність (8.2) на функцію $\varphi \in C^1[0, T]$ таку, що $\varphi(T) = 0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0, T]$ та частинами. Тоді

$$\int_0^T \int_{(0,1)^n} (u(t), \varphi'(t)v) dx dt + \mu \int_0^T \int_{(0,1)^n} (\nabla u(t), \varphi(t)\nabla v) dx dt + \quad (8.9)$$

$$+ \int_0^T \int_{(0,1)^n} (u(t) \cdot \nabla u(t), \varphi(t)v) dx dt = \int_{(0,1)^n} (u|_{t=0}, \varphi(0)v) dx + \int_0^T \int_{(0,1)^n} (f(t), \varphi(t)v) dx dt$$

для будь-якого $v \in H_{pd*}^1$. Порівнюючи (8.8) і (8.9) при $\varphi(0) = 1$, отримуємо

$$\int_{(0,1)^n} (u|_{t=0}, v) dx = \int_{(0,1)^n} (u_0, v) dx \quad \forall v \in H_{pd*}^1.$$

Таким чином, виконана рівність $u|_{t=0} = u_0$ в H_{pd*}^0 .

Інтегруючи (8.4), отримаємо рівність

$$\|u_m(t)\|_{H_{pd*}^0}^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla u_m(s)\|_{L^2((0,1)^n \times \mathbb{R}^n)}^2 ds = \|\text{Pr}_{H_m}(u_0)\|_{H_{pd*}^0}^2 + 2 \int_0^t \int_{(0,1)^n} (f(s), u_m(s)) dx ds.$$

Помножимо це рівняння на функцію $\varphi \in C_0^\infty((0, T))$ таку, що $\varphi \geq 0$ та проінтегруємо отриману рівність по $(0, T)$. Тоді

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\|u_m(t)\|_{H_{pd*}^0}^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla u_m(s)\|_{L^2((0,1)^n \times \mathbb{R}^n)}^2 ds \right) \varphi(t) dt = \\ & = \int_0^T \left(\|\text{Pr}_{H_m}(u_0)\|_{H_{pd*}^0}^2 + 2 \int_0^t \int_{(0,1)^n} (f(s), u_m(s)) dx ds \right) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Використовуючи (8.5), перейдемо до нижньої границі в цій рівності. У результаті знаходимо, що

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\|u(t)\|_{H_{pd*}^0}^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2((0,1)^n \times \mathbb{R}^n)}^2 ds \right) \varphi(t) dt \leq \\ & \leq \int_0^T \left(\|u_0\|_{H_{pd*}^0}^2 + 2 \int_0^t \int_{(0,1)^n} (f(s), u(s)) dx ds \right) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Ця нерівність еквівалентна енергетичній нерівності. \triangleright

Лема 8.2 (Соболева про вкладення $L^4((0, 1)^n) \subset H_{pR^*}^1$) при $n = 2, 3$). Нехай $u \in H_{pR^*}^1$. Тоді

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^4((0,1)^n)} &\leq 2^{1/4} \|u\|_{H_{pR^*}^0}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2((0,1)^n)}^{1/2} && \text{при } n = 2; \\ \|u\|_{L^4((0,1)^n)} &\leq 2^{1/2} \|u\|_{H_{pR^*}^0}^{1/4} \|\nabla u\|_{L^2((0,1)^n)}^{3/4} && \text{при } n = 3. \quad \triangleleft \triangleright \end{aligned}$$

Теорема 8.3 (про регулярність слабкого розв'язку 1-періодичної задачі для рівнянь Нав'є-Стокса при $n = 2, 3$). Нехай $u \in L^2((0, T); H_{pd^*}^1) \cap \tilde{L}^\infty((0, T); H_{pd^*}^0)$ є слабким розв'язком рівнянь Нав'є-Стокса. Тоді

$$\begin{aligned} u'_t &\in L^2((0, T); H_{pd^*}^{1*}), \quad u \in L^4((0, T); L^4((0, 1)^n)) \cap C^0([0, T]; H_{pd^*}^0) && \text{при } n = 2; \\ u'_t &\in L^{4/3}((0, T); H_{pd^*}^{1*}), \quad u \in L^{8/3}((0, T); L^4((0, 1)^n)) && \text{при } n = 3. \quad \triangleleft \triangleright \end{aligned}$$

Теорема 8.4 (про єдиність слабкого розв'язку 1-періодичної задачі для рівнянь Нав'є-Стокса при $n = 2, 3$). Нехай $\{u\} \subset L^2((0, T); H_{pd^*}^1) \cap \tilde{L}^\infty((0, T); H_{pd^*}^0)$ є слабкими розв'язками рівнянь Нав'є-Стокса. Тоді

$$\text{слабкий розв'язок є єдиним} \quad \text{при } n = 2;$$

якщо $\{u\} \subset L^8((0, T); L^4((0, 1)^n))$, тоді слабкий розв'язок є єдиним при $n = 3$.

$\triangleleft (n = 2)$. Припустимо, що u_1 і u_2 є розв'язками задачі (8.2). Тоді різниця $u = u_1 - u_2$ задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned} \left(\|u(t)\|_{H_{pd^*}^0}^2 \right)' + 2\mu \|\nabla u(t)\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}}^2 &= -2 \int_{(0,1)^n} (u(t) \cdot \nabla u_2(t), u(t)) dx \leq \\ &\leq 2 \|u\|_{L^4((0,1)^n)}^2 \|\nabla u_2\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}} \leq \\ &\leq 2^{3/2} \|u\|_{H_{pR^*}^0} \|\nabla u\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}} \|\nabla u_2\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}} \leq \\ &\leq 2\mu \|\nabla u(t)\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}}^2 + \frac{1}{\mu} \|u(t)\|_{H_{pR^*}^0}^2 \|\nabla u_2(t)\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}}^2 \end{aligned}$$

згідно з лемою 8.2. Таким чином, маємо

$$\left(\|u(t)\|_{H_{pd^*}^0}^2 \right)' \leq \frac{1}{\mu} \|u(t)\|_{H_{pd^*}^0}^2 \|\nabla u_2(t)\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}}^2$$

або

$$\left(\exp \left(-\frac{1}{\mu} \int_0^t \|\nabla u_2(s)\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}}^2 ds \right) \cdot \|u(t)\|_{H_{pd^*}^0}^2 \right)' \leq 0,$$

тобто $\|u(t)\|_{H_{pd^*}^0}^2 \leq 0$ при $t \in [0, T]$. ($n = 2$) \triangleright

\triangleleft ($n = 3$). Припустимо, що u_1 і u_2 є розв'язками задачі (8.2). Тоді різниця $u = u_1 - u_2$ задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned} \left(\|u(t)\|_{H_{pd^*}^0}^2 \right)' + 2\mu \|\nabla u(t)\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}}^2 &= 2 \int_{(0,1)^n} (u(t) \cdot \nabla u(t), u_2(t)) dx \leq \\ &\leq 2 \|u\|_{L^4((0,1)^n)^n} \|\nabla u\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}} \|u_2\|_{L^4((0,1)^n)^n} \leq \\ &\leq 2^{3/2} \|u\|_{H_{pd^*}^0}^{1/4} \|\nabla u\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}}^{7/4} \|u_2\|_{L^4((0,1)^n)^n} \leq \\ &\leq 2\mu \|\nabla u(t)\|_{L^2((0,1)^n)^{n \times n}}^2 + C \|u(t)\|_{H_{pd^*}^0}^2 \|u_2(t)\|_{L^4((0,1)^n)^n}^8 \end{aligned}$$

згідно з лемою 8.2 (та нерівністю $ab \leq \frac{1}{p}(\varepsilon a)^p + \frac{1}{q}(\frac{b}{\varepsilon})^q$, виконану при $a, b, \varepsilon > 0$ та $p, q \geq 1$ таких, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Таким чином, маємо

$$\left(\exp \left(-\frac{1}{\mu} \int_0^t \|u_2(s)\|_{L^4((0,1)^n)^n}^8 ds \right) \cdot \|u(t)\|_{H_{pd^*}^0}^2 \right)' \leq 0,$$

оскільки функція $t \mapsto \|u_2(t)\|_{L^4((0,1)^n)^n}^8$ є інтегрованою. ($n = 3$) \triangleright

Теорема 8.5 (Фурсікова А.В. про щільну єдиність слабкого розв'язку 1-періодичної задачі для рівнянь Нав'є-Стокса при $n = 3$). *Нехай $n = 3$ і $u_0 \in H_{pd^*}^1$. Тоді існує множина $F = \{f\} \subset L^2((0, T); H_{pd^*}^0)$, яка щільна в*

$$L^q((0, T); H_{pd^*}^{1*}) \quad \text{для фіксованого } q \text{ при } 1 \leq q < \frac{4}{3},$$

та слабкий розв'язок 1-періодичної задачі для рівнянь Нав'є-Стокса, відповідний u_0 і фіксованому $f \in F$ є єдиним. $\triangleleft \triangleright$

Рекомендована література

1. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1988. 512с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1989. 624 с.
3. Ладыженская О. А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* – М.: Наука, 1970. 288 с.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.* – М.: Наука, 1965. 520 с.
5. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики.* – М.:Наука, 1989. 384с.
6. Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса.* – М.: Мир, 1981. 408 с.
7. Шубин М.А. *Лекции об уравнениях математической физики.* – М.: МЦНМО, 2003. 303 с.

Додаткова література

1. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. *Численные методы и программное обеспечение.* – М.: Мир, 2002. 348 с.
2. Мазья В.Г. *Пространства С.Л. Соболева.* – Л.: Наука, 1985. 416 с.
3. Эванс Л.К., Гариепи Р.Ф. *Теория меры и тонкие свойства функций.* – Н.: Научная книга, 2002. 216 с.