УДК 517:94; 532.5

Черній Д.І., к.ф.-м.н., доц.,

Про похідні для інтегральних представлень

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
факультет комп'ютерних наук і кібернетики,
вул.Володимирська,64, м. Київ,
01033, Україна
e-mail: D_Cherniy@ukr.net

Dmytro Cherniy, Ph.D., associate professor

Derivatives of Integral Expressions

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Faculty of Computer Science & Cybernetic
64, Volodymyrska Str., Kyiv,
01033, Ukraine

e-mail: D_Cherniy@ukr.net

Для плоских нестаціонарних відривних течій, розглянута комплексна форма запису інтегральних виразів для основних інтегральних характеристик течії, яки мають параметричну залежність від часу - циркуляція швидкості і характеристична функція (комплексний потенціал течії). Представлені формули і вирази для визначення похідних по параметру (часу) для цих характеристик, з урахуванням руху і деформації обтічної непроникної границі а також, виникнення нових елементів непроникних границь - ліній розриву швидкостей (вихрових поверхонь) в точках їх відриву (на гострих частинах обтічного контуру).

Ключові слова: математична модель, вихрові методи, циркуляція, потенціал, характеристики відривних течій

For plane nonstationary separated flows, the complex form of recording integral expressions of the main integral flow characteristics are presented. That expressions have a parametric time dependence is considered - velocity circulation and characteristic function (complex flow potential). Presented formulas and expressions of derivatives on the parameter (time) for these characteristics, taking into account the motion and deformation of the flowing impermeable boundary, as well as the appearance of new elements of impermeable boundaries - velocity discontinuity lines (vortex sheets) at the separation points (on the sharp edges of the streamlined contour).It is shown that in the case of separated flow, with barotropic motion of an ideal fluid under the action of a volume force field with a single-valued potential, the change in the circulation of velocity along a closed liquid circuit encompassing only the streamlined boundary is compensated by a change in circulation in the wake due to fluid separation from the streamlined boundary. The resulting expressions will be the basis for constructing computational technologies in hydromechanics.

Keywords: mathematical model, vortex method, circulation, potential, characteristics of separated flow

Статтю представив д.т.н., професор, Ф.Г.Гаращенко.

1. Вступ

При чисельному вирішенні ряду задач аеро / гідродинаміки (задач відривного обтікання несучих поверхонь, задач гідропружності, біоніки, ..) виникає необхідність обчислення динамічних і кінематичних характеристик течії яки змінюються за часом. У багатьох випадках [1,7], в чисельних моделях, закони збереження і вирази для зміни характеристик виводилися вже із дискретизованих інтегральних віразів, в результаті були втрачені складові і співмножники, що визначають суть фізичних явищ та процесів. Мета статті отримання аналітичних виразів з явними залежностями від фізичних факторів,
що визначають суть відривних течій ідеальної рідини.

2. Формальне представлення

Розглядається плоска течія в області зі змінною в часі непроникною границею, представиму у вигляді гладкого розімкнутого контуру $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$.

Течія породжується рухом (переміщенням і деформацією) непроникного гладкого розімкнутого контуру $L_d(t)$, для всіх точок якого визначені швидкості (вектор швидкості безперервно розподілений по контуру, Рис.1).

Вважаємо [1,3,6,7], що рух рідини поза тонкою рухливою непроникною границі $L_d(t)$ супроводжується виникненням на її гострих кінцівках відривної вихрової течії у вигляді тонких вихрових структур $L_v(t)$, які, для плоского випадку мають представлення як нескінченно тонкі, непроникні контури розриву дотичних швидкостей.

Така схематизація [1-3,7] дозволяє замінити вихрову течію в області (поза $L_d(t)$) на циркуляційну течію (зі збереженням інтегральних характеристик течії). Лінії розриву швидкостей $L_v(t)$ будуть інтерпретуватися як непроникні вільні границі - нові елементи границі $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ яки виникають при відривному обтіканні границі $L_d(t)$. Формування нових елементів кордонів відбувається при відриві з кінцівок $L_d(t)$ тонкого вихрового шару $L_v(t)$. Рух гладкого розімкнутого контуру $L_v(t)$ визначається швидкістю W_v, визначеною для всіх його точок.

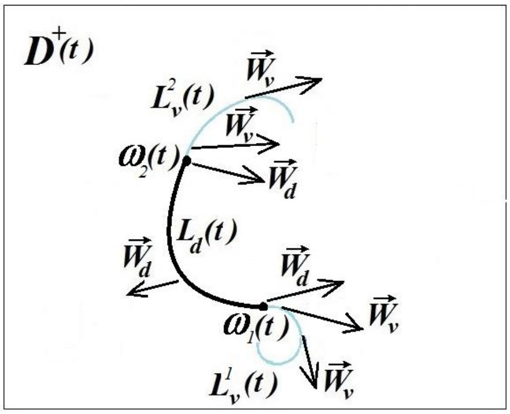

Рис.1

З причини того, що в точках сполучення границь $L_d(t)$ та $L_v(t)$, яки є точками відриву $\omega_p(t),\ p = 1,2$, при їх русі, швидкості $W_d(\omega_p) \neq W_v(\omega_p)$, в загальному випадку, не збігаються (Рис.1.), будемо вважати, що, у всіх точках $\omega_p(t),\ p = 1,2$ відрив реалізується відповідно до умовою Бріллюена- Вілла [2]: «Крива, яка складається з контуру перешкоди і контуру вільної границі в точці відриву має точку повернення або неперервну дотичну, в залежності від того, збігається чи не збігається точка відриву з критичною точкою потоку.»

При гладкому відриві вектор різниці швидкостей $W(\omega_p(s_v,t)) = W_v(\omega_p(s_v)) - W_d(\omega_p(s_p))$ буде дотичним одночасно і до $L_d(t)$ і до $L_v(t)$, і визначає швидкість збільшення границі $L_v(t)$, причому при

$$\frac{ds_v(t)}{dt}\Big|_{\omega=\omega_p} = \left|W(\omega_p(s_v,t))\right| \quad \text{та} \quad \left|\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v}\right|_{\omega=\omega_p} = 1$$

$$W(\omega_p(s_v,t)) = \frac{\partial\omega_p}{\partial s_v}\frac{ds_v(t)}{dt} \tag{1.1}$$

Таким чином, в площині комплексної змінної, визначена безперервна гладка лінія $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ складається з маркованих параметром s частинок, які в будь-який момент часу визначено своїми комплексними координатами $\omega_d(s,t) = x_d(s,t) + iy_d(s,t)$ і $\omega_v(s,t) = x_v(s,t) + iy_v(s,t)$ для кожної з них.

Переміщення лінії $L_d(t)$ визначається завданням безперервного розподілу в точках $\omega_d(s_d,t)$ що складаються із частинок s_d швидкості $\frac{d\omega_d(s,t)}{dt} = W_d(\omega_d(s_d,t))$, а переміщення частинок s_v яки складают лінію $L_v(t)$ визначається завданням безперервно розподіленої на лінії частинок швидкістю

$$\frac{d\omega_v(s,t)}{dt} = W_v(\omega_v(s_v,t)) = \frac{1}{2}\left(V^+(\omega(s_v,t),t) + V^+(\omega(s_v,t),t)\right).$$

При такій схематизації течії в неодносвязной області (Рис.1), будь-яка характеристична функція буде залежною від часу (як від параметра). Комплексний потенціал течії, може бути представлений у вигляді [2,3,6,7,10,13]:

$$\Phi(z,t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_d(t)} f_d(\omega,t)\ln(z-\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_v(t)} f_v(\omega,t)\ln(z-\omega)d\omega = \tag{1.2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{s_1}^{s_2} f_d(\omega(s_d,t),t)\ln(z-\omega(s_d,t))\frac{\partial\omega(s_d,t)}{\partial s_d}ds_d +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{p=1}^{2}\int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} f_v(\omega(s_v,t),t)\ln(z-\omega(s_v,t))\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v}ds_v$$

Для підінтегральної функції, у всіх точках ω_p, $p = 1,2.$ (гострих і кутових кінцівках $L_d(t)$) - точках сполучення границь $L_d(t)$ і $L_v(t)$ виконується умова неперервності

$$f_v(\omega_p, t) = f_d(\omega_p, t)\,. \qquad (1.3)$$

В цьому випадку, комплексно спряжена швидкість течії має бути представлена у вигляді похідної від характеристичної функції:

$$\bar{V}(z,t) = \frac{\partial \Phi}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_d(t)} \frac{f_d(\omega,t)}{z-\omega}d\omega + \frac{1}{2\pi i}\sum_{p=1}^{P}\int\limits_{L_v^p(t)} \frac{f_v(\omega,t)}{z-\omega}d\omega = \qquad (1.4)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_{p-1}}^{s_p} \frac{f_d(\omega(s_d,t),t)}{z-\omega(s,t)}\frac{\partial\omega(s_d,t)}{\partial s_d}ds_d +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{p=1}^{2}\int\limits_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{f_v(\omega(s_v,t),t)}{z-\omega(s_v,t)}\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v}ds_v$$

Циркуляція швидкості по рідкому контуру $C(t)$, в будь-який момент часу (Рис.2),

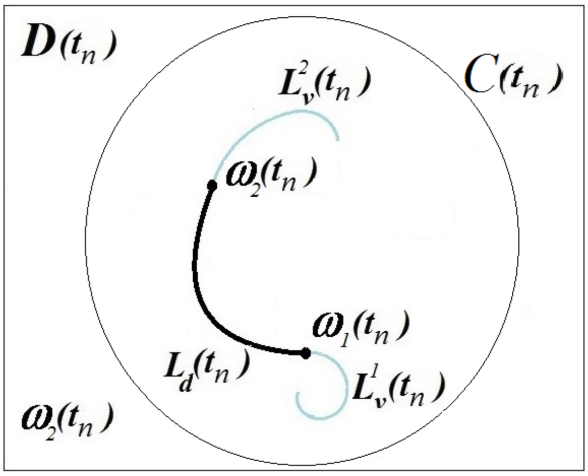

Рис.2.а

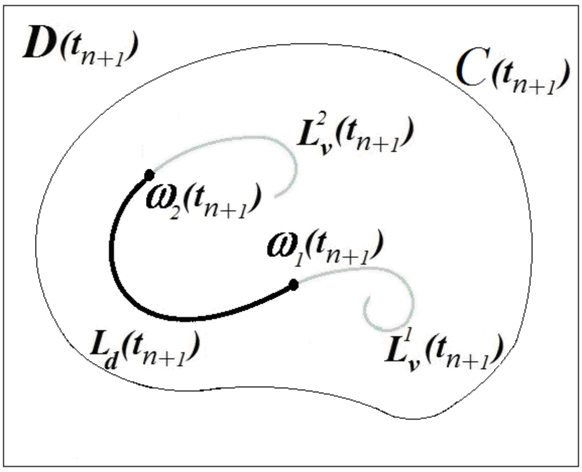

Рис.2.б

на підставі [5] має представлення в вигляді інтеграла від комплексно сполученої швидкості по замкнутому рідкому контуру $C(t)$ повністю охоплює границю $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$:

$$\Gamma_0 = \oint\limits_C \bar{V}(\xi,t)d\xi = \oint\limits_C \frac{d\xi}{2\pi i}\int\limits_{L_d(t)+L_v(t)} \frac{f(\omega,t)}{\xi-\omega}d\omega =$$

$$= \int\limits_{L_d(t)+L_v(t)} f(\omega,t)d\omega = \qquad (1.5)$$

$$= \int\limits_{s_{p-1}}^{s_p} f_d(\omega(s_d,t),t)\frac{\partial\omega(s_d,t)}{\partial s_d}ds_d +$$

$$+\sum_{p=1}^{2}\int\limits_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} f_v(\omega(s_v,t),t)\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v}ds_v$$

2. Про похідні для інтегральних виразів

Для гладко змінюющихося в часі характеристик течії вважаєтся існуючим безперервних похідних по параметру t (за часом) для циркуляції і для потенціалу.

Так, для рідкого контуру $C(t)$, який повністю охоплює границю $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ в області течії (рис.2.), справедлива

Теорема (Кельвін, [5])

«При баротропному русі ідеальної рідини під дією поля об'ємних сил з однозначним потенціалом, циркуляція швидкості по замкнутому рідкому контуру не змінюється».

Тобто :

$$\frac{d}{dt}\Gamma_0 = \frac{d}{dt}\oint\limits_{C(t)} \bar{V}(\xi,t)d\xi = 0 \qquad (2.1)$$

Розглянемо зміну в часі матеріального контуру $C(t)$, який охоплює границю

$L(t) = L_d(t) + L_v(t)$, Рис.3.

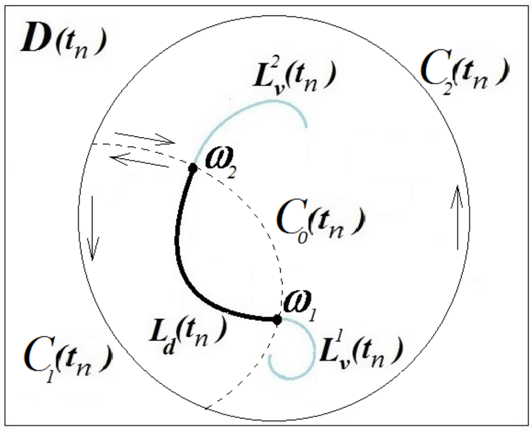

Рис.3.а

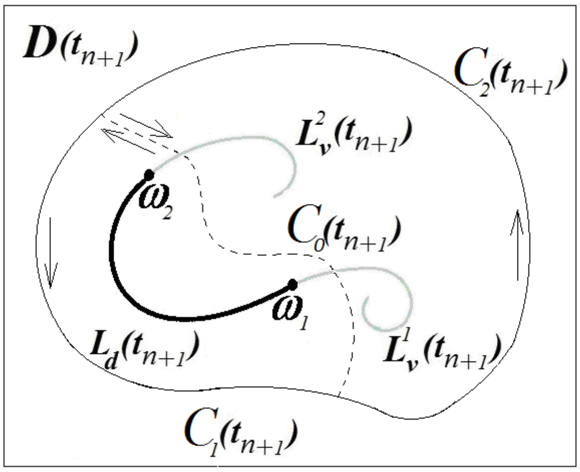

Рис.3.б

Нехай в момент часу $t = t_n$ контур $C(t)$ представляється у вигляді двох складових частин $C(t) = C_1(t) + C_2(t)$, (Рис.3 а). Введемо додатковий внутрішній матеріальний (рідкий) контур $C_0(t)$ так, щоб він в момент часу відділяв границю $L_d(t)$ від $L_v(t) = \sum_{p=1}^{2} L_v^p(t)$. В наступний момент часу $t = t_{n+1}$ (Ріс.3.б) всередині контуру $C_0(t) + C_1(t)$ будуть знаходитися не тільки обтічний контур, але і елементи контурів $\Delta L_v(t) = \sum_{p=1}^{2} \Delta L_v^p(t)$. Таким чином, для замкнутих складових контурів $C_0(t) + C_1(t)$ та $C_0(t) + C_2(t)$ (де $C_0(t)$ проходиться в зворотному напрямку), також буде справедлива теорема Кельвіна про незмінність циркуляції швидкості по кожному з них.

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_1(t)+C_0(t)} \overline{V}(\xi,t)d\xi = 0 \qquad (2.2)$$

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_2(t)+C_0(t)} \overline{V}(\xi,t)d\xi = 0 \qquad (2.3)$$

При відривному обтіканні, при наявності потенціалу течії дану теорему доцільно переформулювати:

Теорема 1

«При відривному обтіканні з баротропним рухом ідеальної рідини під дією поля об'ємних сил з однозначним потенціалом, зміна циркуляції швидкості по замкнутому рідкому контуру, який охоплює тільки обтічну границю, компенсується зміною циркуляції в сліді за рахунок відриву рідини з обтічної границі».

В силу чого (для плоского відривної течії з P точками відриву) справедливо

$$\frac{d}{dt} \int_{L_d(t)} f_d(\omega,t)d\omega + \sum_{p=1}^{P} f_d(\omega_p(s_v,t),t) \frac{\partial \omega_p}{\partial s_v} \frac{ds_v(t)}{dt} = 0 \qquad (2.4)$$

або, в силу (1.1)

$$\frac{d}{dt} \int_{L_d(t)} f_d(\omega,t)d\omega = -\sum_{p=1}^{P} f_d(\omega_p(s_v,t),t) W(\omega_p(s_v,t)) \qquad (2.5)$$

Доведення наведемо на прикладі плоскої відривної течії (при обтіканні гладкого контуру з $P = 2$ точками відриву).

Дійсно [5,7], з урахуванням (1.4), (1.5), і [14], з виразу для похідної від циркуляції

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Gamma_0 &= \frac{d}{dt} \oint_{c(t)} \overline{V}(\xi,t)d\xi = \\
&= \frac{d}{dt} \oint_C \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)+L_v(t)} \frac{f(\omega(s,t),t)}{\xi - \omega} d\omega \right) d\xi = \\
&= \frac{d}{dt} \int_{L_d(t)} f_d(\omega(s,t),t)d\omega + \frac{d}{dt} \int_{\sum_{p=1}^{2} L_v^p(t)} f_v(\omega(s,t),t)d\omega = \\
&= \frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} f_d(\omega(s_d,t),t) \frac{\partial \omega(s\ ,t)}{\partial s_d} ds_d + \\
&+ \sum_{p=1}^{2} \frac{d}{dt} \int_{s(t_0)}^{S_p(t)} f_v(\omega(s_v,t),t) \frac{\partial \omega(s_v,t)}{\partial s_v} ds_v = \\
&= \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{dt} \left(f_d(\omega(s_d,t),t) \frac{\partial \omega(s_d,t)}{\partial s_d} \right) ds_d + \\
&+ \sum_{p=1}^{2} \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{d}{dt} \left(f_v(\omega(s_v,t),t) \frac{\partial \omega(s_v,t)}{\partial s_v} \right) ds_v + \qquad (2.6) \\
&+ \sum_{p=1}^{2} f_v(\omega_p(s_v,t),t) \frac{\partial \omega}{\partial s_v} \frac{ds_v(t)}{dt}
\end{aligned}$$

В силу того, що на всіх елементах $d\omega_v = \frac{\partial \omega}{\partial s_v} ds_v$ вільної (вихровий) границі виконується теорема Кельвіна та [14], маємо

$$\frac{d}{dt}\left(f_v(\omega(s_v,t),t)\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v}ds_v\right)=0 \cdot \qquad (2.7)$$

При інтегруванні отримаємо, що

$$\int\limits_{L_v^p(t)}\frac{d}{dt}\left(f_v(\omega(s,t)t)\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v}\right)ds_v=0, \qquad (2.8)$$

для усіх $L_v(t)=\sum\limits_{p=1}^{2}L_v^p(t)$,

або, інакше

$$\sum_{p=1}^{2}\int\limits_{s_p(t_0)}^{s_p(t)}\frac{d}{dt}\left(f_v(\omega(s_v,t)t)\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v}\right)ds_v=0 \cdot \qquad (2.9)$$

З умови теореми Кельвіна

$$\int\limits_{s_{p-1}}^{s_p}\frac{d}{dt}\left(f_d(\omega(s_d,t),t)\frac{\partial\omega(s_d,t)}{\partial s_d}\right)ds_d+$$
$$+\sum_{p=1}^{2}\int\limits_{s(t_0)}^{S_p(t)}\frac{d}{dt}\left(f_v(\omega(s_v,t),t)\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v}\right)ds+ \qquad (2.10)$$
$$+\sum_{p=1}^{2}f_v(\omega_p(s_v(t),t)\frac{\partial\omega_p(s_v,t)}{\partial s_v}\frac{ds_v(t)}{dt}=0$$

З урахуванням умов (1.3) і (2.3) отримаємо

$$\int\limits_{s_1}^{s_2}\frac{d}{dt}\left(f_d(\omega(s_d,t),t)\frac{\partial\omega(s_d,t)}{\partial s_d}\right)ds_d=$$
$$=-\sum_{p=1}^{2}f_d(\omega_p(s_v,t),t)\frac{\partial\omega_p(s_v(t),t)}{\partial s_v}\frac{ds_v(t)}{dt} \qquad (2.11)$$

Де співмножники $\frac{\partial\omega(s,t)}{\partial s}$ в (2.8)-(2.11) відповідають за розтягнення контурів $L_d(t)$, $L_v(t)$, а співмножник $\frac{ds_v(t)}{dt}$ в (2.10)-(2.11) відповідає за приріст контуру $L_v(t)$ новими частинками.

З урахуванням (1.1), для (2.11) отримаємо

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{L_d(t)}f_d(\omega,t)d\omega=$$
$$=-\sum_{p=1}^{p}f_d(\omega_p(s_v,t),t)W(\omega_p(s_v,t)) \qquad (2.12)$$

Отриманий вираз (2.12) і доводить теорему.

Розглянемо вираз для похідної за параметром t (за часом) від потенціалу (1.2), в якому, можна диференціювати під знаком інтеграла. В силу того, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln(z-\omega(t))=-\frac{1}{z-\omega(t)}\frac{d\omega(t)}{dt}, \qquad (2.13)$$

та $W_d(\omega_d(s_d,t))=\frac{d\omega_d(s,t)}{dt}$, $\quad W_v(\omega_v(s_v,t))=\frac{d\omega_v(s,t)}{dt}$

Отримаємо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\varPhi(\mathrm{z},\mathrm{t})=\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{L_d(t)}f_d(\omega,t)\ln(z-\omega)d\omega+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\mathrm{p}=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{L_v^p(t)}f_v(\omega,t)\ln(z-\omega)d\omega=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_1}^{s_2}\ln(z-\omega(s_d,t))\frac{\partial}{\partial t}\left(f_d(\omega,t)\frac{\partial\omega}{\partial s_d}\right)ds_d-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_{11}}^{s_2}\frac{W_d(\omega(s_d,t))f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_d,t)}+$$
$$+\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_p(t_0)}^{S_p(t)}\ln(z-\omega(s_v,t))\frac{\partial}{\partial t}\left(f_v(\omega,t)\frac{\partial\omega}{\partial s_v}\right)ds_v-$$
$$-\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_p(t_0)}^{S_p(t)}\frac{W_v(\omega(s_v,t))f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_v,t)}+$$
$$+\sum_{p=1}^{p}f_d(\omega_p(s_v,t),t)\ln(z-\omega_p(s_v,t))\frac{\partial\omega_p(s_v,t)}{\partial s_v}\frac{ds_v(t)}{dt} \qquad (2.14)$$

Або, з урахуванням (1.1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\varPhi(\mathrm{z},\mathrm{t})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_1}^{s_2}\ln(z-\omega(s_d,t))\frac{\partial}{\partial t}\left(f_d(\omega,t)\frac{\partial\omega}{\partial s_d}\right)ds_d-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_{11}}^{s_2}\frac{W_d(\omega(s_d,t))f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_d,t)}+ \qquad (2.15)$$
$$+\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_p(t_0)}^{S_p(t)}\ln(z-\omega(s_v,t))\frac{\partial}{\partial t}\left(f_v(\omega_v,t)\frac{\partial\omega}{\partial s_v}\right)ds_v-$$
$$-\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_p(t_0)}^{S_p(t)}\frac{W_v(\omega(s_v,t))f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_v,t)}+$$
$$+\sum_{p=1}^{p}f_d(\omega_p(s_v,t),t)\ln(z-\omega_p(s_v,t))W(\omega_p(s_v,t))$$

В силу того, що для елементів всієї (вихровий) границі $L_v(t)$, на підставі теореми Кельвіна виконується (2.7), третій доданок в правій частині (2.14) та (2.15) зникне, в силу чого,

$$\frac{\partial}{\partial t}\varPhi(\mathrm{z},\mathrm{t})=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_1}^{s_2}\ln(z-\omega(s_d,t))\frac{\partial}{\partial t}\left(f_d(\omega_d,t)\frac{\partial\omega}{\partial s_d}\right)ds_d- \qquad (2.16)$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_1}^{s_2}\frac{W_d(\omega(s_d,t))f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_d,t)}+$$
$$-\sum_{p=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_p(t_0)}^{S_p(t)}\frac{W_v(\omega(s_v,t))f_v(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_v,t)}+$$
$$+\sum_{p=1}^{2}f_v(\omega_p(s_v,t),t)\ln(z-\omega_p(t))\frac{\partial\omega_p(s_v,t)}{\partial s_v}\frac{ds_v(t)}{dt}$$

Або,з урахуванням (1.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathrm{z,t}) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{s_1}^{s_2}\ln(z-\omega(s_d,t))\frac{\partial}{\partial t}\left(f_d(\omega_d,t)\frac{\partial\omega}{\partial s_d}\right)ds_d -$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{s_1}^{s_2}\frac{W_d(\omega(s_d,t))\,f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_d,t)} + \qquad (2.17)$$
$$-\sum_{p=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{S_p(t_0)}^{S_p(t)}\frac{W_v(\omega(s_v,t))\,f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_v,t)} +$$
$$+\sum_{p=1}^{2} f_d(\omega_p(s_v,t),t)\ln(z-\omega_p(t))W(\omega_p(s_v,t)$$

Перший доданок в (2.15) визначає зміну циркуляційної складової на контурі $L_d(t)$, другий доданок залежить від швидкостей переміщення всіх точок самого контуру $L_d(t)$, третій доданок визначає зміну циркуляційної складової на контурі $L_v(t)$, четвертий доданок залежить від швидкостей переміщення всіх точок контуру $L_v(t)$, а п'ятий доданок враховує внесок від швидкості породження нових (вихрових) елементів контуру $L_v(t)$ на гострих кінцівках контуру $L_d(t)$.

Результати та висновки

У припущенні виконання умов теореми Кельвіна (про збереження циркуляції) і умов Вілла [2] (при відриві вихрових шарів), отримано аналітичні вирази для похідних по параметру (за часом) від характеристичних функцій відривної течії (циркуляції швидкості і потенціалу течії), з явною залежністю від прояву фізичних ефектів - руху і деформації обтічного контуру, руху і деформації вільної границі (сліду), зміни циркуляції на обтічному контурі, зміною циркуляції на вільної границі, і додання циркуляції на вільної границі (в сліді) за рахунок породження нових елементів вільної границі при відриві рідини з обтічної контуру.

Таким чином, похідна по часу від характеристичної функції (від комплексного потенціалу течії поза контуром $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$), має інтегральні залежності від зміни циркуляції на обтічному контурі, від розподілених швидкостей руху його точок, від розподілених швидкостей переміщення точок сліду і від швидкості породження нових циркуляційних елементів в сліді. Отримані вирази можуть стати основою для побудови обчислювальних технологій в гідромеханіки.

Список використаних джерел

1. Белоцерковский С.М.Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью./ С.М.Белоцерковский, М.И Ништ, М.: Наука, 1978. – 351 с.
2. Биркгоф Г. Струи,следы и каверны./Г.Биркгоф, Э.Сарантонелло, М.: «Мир»-1964г.466с.
3. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа.-М. «Мир», 1986, 113с.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи./ Ф.Д.Гахов, М.: ГРФМЛ, «Наука»- 1987.-640с..
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа./ Л.Г. Лойцянский, М.: Издательство «Наука» 1970, 904с.
6. Черний Д.И. Вычислительные технологии для метода дискретных вихрей./Д.И. Черний, Вісник Національного технічного університету «ХПІ», Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». - Харьків, НТУ «ХПІ»., 2016р. - № 6 (1178), С.116-123.
7. Сарпкайя Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) / Т. Сарпкайя // Современное машиностроение: Серия А. – 1989. – №10. – С. 1-60.

References

1. BELOTSERKOVSKY S.M., NISHN M.I. (1978) Separated and No-Separated flow of thin wings in ideal fluid.
2. BIRKGOFF G., ZARANTONELLO E.H. (1957) Gets,Wakes and Cavities.
3. VAN-DYKE (1986) Album of fluid and gas flows.
4. GAKHOV F.D.(1987) Boundary problems.
5. LOITSYANSKY L.G.(1970) Mechanics of liquid and gas.
6. CHERNIY.D. (2016) Computational technologies of discrete vortices. Bulletin of Kh.T.U , 6/2016; p.116-123.
7. SARPKAYA T.(1988) Computational methods of vortices. Freeman's Lecture/

Надійшла до редколегії 10.07.2016