

УДК 519.6;532.5

Вычислительные технологии для метода дискретных особенностей в гидродинамике

Д. И. Черний

*Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,
факультет кибернетики, кафедра вычислительной математики,
Украина;*

D.Cherniy@ukr.net

Предложены вычислительные технологии (на основе МДО), позволяющие преодолеть проблему некорректного вычисления полей кинематических и динамических характеристик при моделировании плоских нестационарных течений (с помощью МДВ). Проблема порождена многозначностью функций, используемых для аппроксимации непрерывных границ упорядоченной системой дискретных особенностей. Методы и алгоритмы преобразований позволяют вычислять кинематические и динамические характеристики для отрывных течений, с учетом движения, деформации обтекаемой границы, а также, возникновения новых элементов границ в точках отрыва.

Ключевые слова: математическая модель, метод дискретных вихрей, метод дискретных особенностей, вычислительные технологии

Пропонуються обчислювальні технології (на ґрунті МДО), що надають можливість подолати проблему некоректного обчислення полів кінематичних та динамічних характеристик під час моделювання плоских нестационарних течій (за допомогою МДВ). Проблема пов'язана із застосуванням багатозначних функцій при апроксимації неперервних границь упорядкованою системою дискретних особливостей. Метод та алгоритм перетворення надають можливість обчислення кінематичних та динамічних характеристик для відривних течій, із врахуванням деформації та руху обтічної границі, а також, виникнення нових елементів границь в точках відриву.

Ключові слова: математична модель, метод дискретних вихрів, метод дискретних особливостей, обчислювальні технології.

The computational technologies (based on DVM) which allows to overcome the problem of incorrect calculation of fields of kinematic and dynamic characteristics in the simulation of plane unsteady flows (by using DSM) have been proposed. The problem is caused by the multivaluedness of the functions (MDV) used to approximate the continuous boundaries by the ordered system of discrete peculiarities. The methods and the algorithms of transformations allow to calculate the kinematic and dynamic characteristics for separated flows, taking into account the movement, the streamlined border deformation, as well as the emergence of new elements of the boundaries at the separation points.

Keywords: mathematical model, discrete vortices method, discrete singularities method, computing technology.

1 Введение

Гидродинамические характеристики течений идеальной несжимаемой жидкости в областях с подвижной непроницаемой границей $L(t)$ в любой момент времени t определяются геометрией границ (Рис.1.), их движением (со скоростью W_d) и их динамическим воздействием на жидкость, занимающую (в

в общем случае деформируемую) область течения $D(t)$ [1,2]. В общем случае, движение жидкости вне подвижных непроницаемых границ $L_d(t)$ сопровождается возникновением на острых (угловых и краевых) краях непроницаемой границы возникновением вихрей и их отрывом. В том случае, когда сошедшие вихревые структуры представляют собой тонкие вихревые слои (толщина которых много меньше характерного размера течения), они могут быть формализованы как бесконечно тонкие, непроницаемые вихревые пелены – поверхности разрыва поля скоростей. При такой формализации вихревое течение в области может заменяться циркуляционным течением. Вихревое течение, в интегральном смысле, аппроксимируется циркуляционным течением (но, в общем случае, уже с разрывным вдоль $L_v(t)$ полем скоростей). Линии разрыва скоростей могут интерпретироваться как непроницаемые свободные границы $L_v(t)$, возникающие в области течения. Формирование границ $L_v(t)$ происходит при стекании с острых и угловых кромок $L_d(t)$ тонкого вихревого слоя сносящего циркуляцию с контура $L_d(t)$.

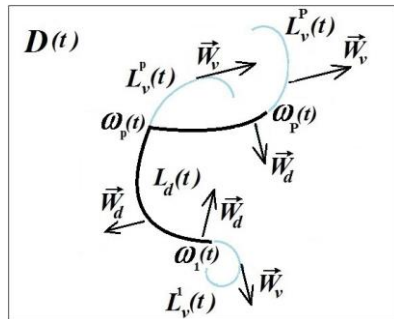


Рис.1

При отрывном течении (Рис.2.), во всех точках сопряжения границ $L_d(t)$ и $L_v(t)$ удовлетворяется условие отрыва Бриллюэна-Вилла [3,4]: «Кривая состоящая из контура препятствия и свободной границы в точке отрыва имеет точку возврата или непрерывную касательную (с кривизной равной кривизне контура препятствия), в зависимости от того, совпадает или не совпадает точка отрыва с критической точкой потока.»

С возникновением отрывного течения естественным образом удовлетворяется условие Жуковского-Чаплыгина, исключающее нефизические, бесконечные значения скоростей на острых и угловых краях непроницаемой границы $L_d(t)$. Таким образом, при замене вихревого течения циркуляционным, непрерывная граница $L(t)$ области $D(t)$ состоит, как из подвижного препятствия $L_d(t)$, так и из свободной (непроницаемой и подвижной) границы – линий разрыва скоростей (Рис.1.) так, что $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$.

В предположении о потенциальности возникшего течения, поле скоростей будет сохраняться непрерывным в области $D(t)$, будет иметь разные предельные значения с разных сторон границы $L_d(t)$ (т.е., будет разрывным при переходе через границу) и будет иметь особые точки (на острых краях и изломах границы $L_d(t)$), в которых значение скоростей будут принимать бесконечные значения.

2 Интегральные представления

Пусть, характеристическая функция – изменяющийся во времени комплексный потенциал течения, в односвязной области (Рис.1), будет представлен в виде [2-4]:

$$\begin{aligned}\Phi(z,t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} f_d(\omega,t) \ln(z-\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} f_v(\omega,t) \ln(z-\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=2}^P \int_{s_{p-1}}^{s_p} f_d(\omega(s,t),t) \ln(z-\omega(s,t)) \frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s} ds + \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^P \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} f_v(\omega(s,t),t) \ln(z-\omega(s,t)) d\omega\end{aligned}\quad (2.1)$$

Для подинтегральной функции выполняется условие непрерывности $f_v(\omega(s_p, t), t) = f_d(\omega(s_p, t), t)$ для (всех $p = \overline{1, P}$) ω_p - острых (угловых и краевых) кромок, точек сопряжения границ $L_d(t)$ и $L_v(t)$.

Комплексно сопряженная скорость течения может быть представлена в виде производной от характеристической функции:

$$\begin{aligned}\bar{V}(z,t) &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{f_d(\omega(s,t),t)}{z-\omega(s,t)} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^P \int_{L_v^p(t)} \frac{f_v(\omega(s,t),t)}{z-\omega(s,t)} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=2}^P \int_{s_{p-1}}^{s_p} \frac{f_d(\omega(s,t),t)}{z-\omega(s,t)} \frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s} ds + \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^P \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{f_v(\omega(s,t),t)}{z-\omega(s,t)} \frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s} ds\end{aligned}\quad (2.2)$$

В таком случае, циркуляция в области течения представима в виде интеграла от комплексно сопряженной скорости по замкнутому жидкому контуру полностью охватывающему границы $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ области течения:

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \oint_C \bar{V}(\xi,t) d\xi = \oint_C \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)+L_v(t)} \frac{f(\omega(s,t),t)}{\xi-\omega} d\omega = \int_{L_d(t)+L_v(t)} f(\omega(s,t),t) d\omega = \\ &= \sum_{p=2}^P \int_{s_{p-1}}^{s_p} f_d(\omega(s,t),t) \frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s} ds + \sum_{p=1}^P \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} f_v(\omega(s,t),t) \frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s} ds\end{aligned}\quad (2.3)$$

При непрерывно изменяющихся во времени характеристик течения подразумевается существование непрерывных производных для потенциала и для циркуляции. Так, производная потенциала по времени

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \Phi(z,t) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_d(t)} f_d(\omega,t) \ln(z-\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^P \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_v^p(t)} f_v(\omega,t) \ln(z-\omega) d\omega = \\ &= \sum_{p=2}^P \frac{1}{2\pi i} \int_{s_{p-1}}^{s_p} \ln(z-\omega(s,t)) \frac{\partial}{\partial t} \left(f_d(\omega,t) \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) ds - \sum_{p=2}^P \frac{1}{2\pi i} \int_{s_{p-1}}^{s_p} \frac{W_d(\omega(s,t)) f(\omega,t) d\omega}{z-\omega(s,t)} + \\ &+ \sum_{p=1}^P \frac{1}{2\pi i} \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \ln(z-\omega(s,t)) \frac{\partial}{\partial t} \left(f_v(\omega,t) \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) ds - \sum_{p=1}^P \frac{1}{2\pi i} \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{W_v(\omega(s,t)) f(\omega,t) d\omega}{z-\omega(s,t)} + \\ &+ \sum_{p=1}^P f_d(\omega_p(t),t) \ln(z-\omega_p(t)) \frac{\partial \omega_p(s,t)}{\partial s} \frac{ds_p(t)}{dt}\end{aligned}\quad (2.4)$$

В силу того, что на свободной (вихревой) границе выполняется теорема Кельвина, $\frac{\partial}{\partial t} \left(f_v(\omega(s,t),t) \frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s} \right) = 0$, третье слагаемое в (2.4) пропадет:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z,t) &= \sum_{p=2}^P \frac{1}{2\pi i} \int_{s_{p-1}}^{s_p} \ln(z - \omega(s,t)) \frac{\partial}{\partial t} \left(f_d(\omega(s,t)) \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) ds - \sum_{p=2}^P \frac{1}{2\pi i} \int_{s_{p-1}}^{s_p} \frac{W_d(\omega(s,t)) f(\omega,t) d\omega}{z - \omega(s,t)} + \\ &- \sum_{p=1}^P \frac{1}{2\pi i} \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{W_v(\omega(s,t)) f(\omega,t) d\omega}{z - \omega(s,t)} + \sum_{p=1}^P \ln(z - \omega_p(t)) f(\omega_p(t),t) \frac{\partial \omega_p(s,t)}{\partial s} \frac{ds_p(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.4')$$

Выражение для производной от циркуляции

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Gamma_0 &= \frac{d}{dt} \oint_C \bar{V}(\xi,t) d\xi = \frac{d}{dt} \oint_C \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)+L_v(t)} \frac{f(\omega(s,t),t)}{\xi - \omega} d\omega \right) d\xi = \\ &= \sum_{p=2}^P \frac{d}{dt} \int_{s_{p-1}}^{s_p} f_d(\omega(s,t),t) \frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s} ds + \sum_{p=1}^P \frac{d}{dt} \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} f_v(\omega(s,t),t) \frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s} ds = \\ &= \sum_{p=2}^P \int_{s_{p-1}}^{s_p} \frac{d}{dt} \left(f_d(\omega(s,t),t) \frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s} \right) ds + \sum_{p=1}^P \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{d}{dt} \left(f_v(\omega(s,t),t) \frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s} \right) ds + \\ &+ \sum_{p=1}^P f_d(\omega(s_p,t),t) \frac{\partial \omega}{\partial s_p} \frac{ds_p(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для жидкого контура, полностью охватывающего границы $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ в области течения (Рис.1.) справедлива теорема Кельвина: «При баротропном движении идеальной жидкости под действием поля объемных сил с однозначным потенциалом циркуляция скорости по замкнутому жидкому контуру не изменяется». В условиях теоремы Кельвина, как ее следствие, справедлива следующая

Теорема 1.

Изменение циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру, охватывающему обтекаемую границу, при ее отрывном обтекании, вызывает «стекание» с острых (угловых и краевых) кромок обтекаемой границы разрывов поля скоростей, порождающих циркуляцию в области течения.

Действительно (Рис.1.), исходя из теоремы Кельвина $\frac{d}{dt} \Gamma_0 = \frac{d}{dt} \oint_C \bar{V}(\xi,t) d\xi = 0$.

В силу того, что производная от циркуляции по любому элементу свободной границы (в силу теоремы Кельвина) равна нулю $\frac{d}{dt} \left(f_v(\omega(s,t),t) \frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s} \right) = 0$, то

$\sum_{p=1}^P \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{d}{dt} \left(f_v(\omega(s,t),t) \frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s} \right) ds = 0$, для всех $p = \overline{1, P}$. В силу чего, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{L_d(t)} f_d(\omega,t) d\omega + \sum_{p=1}^P f_v(\omega(s_p,t),t) \frac{\partial \omega}{\partial s_p} \frac{ds_p(t)}{dt} = 0 \quad (2.5')$$

$$\text{или,} \quad \sum_{p=2}^P \int_{s_{p-1}}^{s_p} \frac{d}{dt} \left(f_d(\omega(s,t),t) \frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s} \right) ds = - \sum_{p=1}^P f_v(\omega(s_p,t),t) \frac{\partial \omega(s_p(t),t)}{\partial s_p} \frac{ds_p(t)}{dt}. \quad (2.5'')$$

С учетом того, что $f_v(\omega(s_p,t),t) = f_d(\omega(s_p,t),t)$,

$$\sum_{p=2}^P \int_{s_{p-1}}^{s_p} \frac{d}{dt} \left(f_d(\omega(s,t),t) \frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s} \right) ds = - \sum_{p=1}^P f_d(\omega(s_p,t),t) \frac{d\omega_p}{dt}. \quad (2.5''')$$

Где $\frac{d\omega_p}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial s_p} \frac{ds_p(t)}{dt}$ - скорость приращения границы $L_v^p(t)$ на острых (угловых и концевых) краях, в точках ω_p , на $L_d(t)$, $p = \overline{1, P}$ (Рис.1.).

3 Дискретизация интегральных представлений

Решение ряда задач аэрогидромеханики связано с определением функций (2.1), (2.2). Для определения подинтегральных функций и положения движущихся границ области используется метод дискретных особенностей, идея которого состоит в дискретизации границы (аппроксимации контура системой дискретных особенностей, Рис.2., Рис.4.) и в замене интегральных представлений (2.1)-(2.5) квадратурными, [1-4]:

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi} \text{Arctg} \left(\frac{y - y_{0j}(t)}{x - x_{0j}(t)} \right) + \sum_{p=1}^P \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\gamma_s^p}{2\pi} \text{Arctg} \left(\frac{y - y_s^p(t)}{x - x_s^p(t)} \right), \quad (3.1)$$

$$\vec{V}(x, y, t) = \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \vec{V}(x, y, x_{0j}(t), y_{0j}(t)) + \sum_{p=1}^P \sum_{s=1}^n \gamma_s^p \vec{V}(x, y, x_s^p(t), y_s^p(t)). \quad (3.2)$$

$$\Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \gamma_i^p = \text{const} \quad (3.3)$$

Что позволяет получить выражение, как для производной по времени от потенциала (4.1) на подвижном, деформирующемся контуре $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ (в каждой точке которого определены скорости его перемещения $-\vec{W}_d$ или \vec{W}_v , соответственно), так и для производной по времени от циркуляции (4.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, t_n)}{\partial t} &= \sum_{j=1}^M \frac{\dot{\Gamma}_j(t_n)}{2\pi} \text{arctg} \left(\frac{y - y_{0j}(t_n)}{x - x_{0j}(t_n)} \right) + \sum_{p=1}^P \frac{\dot{\gamma}_n^p}{2\pi} \text{arctg} \left(\frac{y - y_i^p(t_n)}{x - x_i^p(t_n)} \right) - \\ &- \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) \left(\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)) \bullet \vec{W}_d(x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)) \right) - \\ &- \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \left(\vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \bullet \vec{W}_v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n) \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} \Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \dot{\Gamma}_j(t_n) + \sum_{p=1}^P \dot{\gamma}_n^p = 0 \quad (3.5)$$

$$\text{где} \quad \vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t), y_{0j}(t)) = \left(\frac{y_{0j}(t) - y}{2\pi R_j^2}, \frac{x - x_{0j}(t)}{2\pi R_j^2} \right), \quad (3.6)$$

$$R_j = \max \left\{ \delta_j, \sqrt{(x - x_{0j}(t))^2 + (y - y_{0j}(t))^2} \right\} \quad (3.7)$$

4 Описание проблемы

Рассмотрим формально вычисленную производную, по времени, от потенциала (3.4). Основная проблема для вычисления производной в области, вне обтекаемого контура, состоит в однозначном вычислении первого и второго слагаемых в (3.4), связанных с изменением циркуляций на обтекаемом контуре. Из-за присутствия неоднозначных функций-арктангенсов, за контуром произвольной формы образуется «зона тени» (состоящая из неустранимых разрывов) в которой некорректно вычисляются производные и зависящие от их значения динамические и кинематические характеристики течения.

Для разрешения вышеуказанной проблемы будет использоваться следующая **Теорема 2.**

Пусть аналитическая в области $D(t)$ функция, определенная на движущемся контуре $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ - границе области $D(t)$ в виде интегрального представления с логарифмическим ядром вида (2.1) допускает непрерывную производную по параметру t . Пусть данная функция является характеристической функцией (потенциалом) отрывного обтекания границы $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ области течения $D(t)$. Тогда численное значение частной производной от квадратурного представления (3.1) данной функции по времени может быть выражено через рациональные функции в виде (4.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial t} = & \sum_{j=1}^{M-1} (\vec{D}_j \bullet \vec{V}_j(x, y, \bar{x}_j(t), \bar{y}_j(t))) + \sum_p (\vec{d}_p \bullet \vec{V}_p(x, y, \bar{x}_n^p(t), \bar{y}_n^p(t))) - \\ & - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) (\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t), y_{0j}(t)) \bullet \vec{W}_d(x_{0j}(t), y_{0j}(t))) - \\ & - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \left(\vec{V}_i(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t)) \bullet \vec{W}_v(x_i^p(t), y_i^p(t)) \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\text{Где} \quad \begin{cases} \vec{D}_j = (x_{j+1} - x_j, y_{j+1} - y_j) \mathcal{Q}_j, & \begin{cases} \bar{x}_j = 0.5(x_{0j+1} + x_{0j}), \\ \bar{y}_j = 0.5(y_{0j+1} + y_{0j}) \end{cases}, & \begin{cases} \bar{x}_n^p = 0.5(x_n^p + x_{0p}), \\ \bar{y}_n^p = 0.5(y_n^p + y_{0p}) \end{cases} \end{cases} \quad (4.5)$$

Таким образом, производная потенциала (3.4) выражена через диполи с векторными интенсивностями (4.5).

5 Вычислительные технологии

Для отрывного обтекания замкнутого непроницаемого подвижного контура, рассмотрим построение вычислительных технологий - преобразования

вихревого представлення в дипольное, а также алгоритм вычислений характеристик течения, для решения вышеназванной проблемы.

5.1 Дипольное преобразование

Рассмотрим построение дискретных вихревых пар, в терминах метода дискретных вихрей (МДВ) [2,3].

Переход от МДВ к дипольному МДО представлен на *Рис.2*.

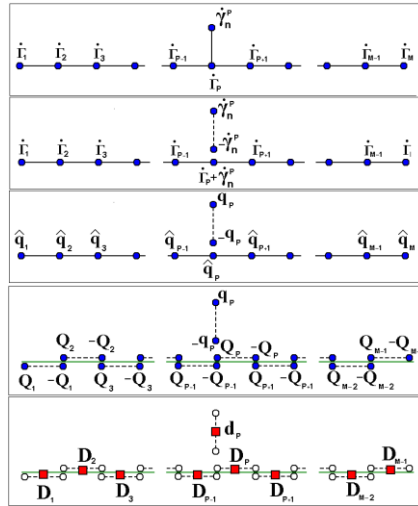


Рис. 2

Обозначим $\hat{q}_j = \hat{q}_j(t_n) = \dot{\Gamma}_j(t_n)$, а $q_p = \dot{\gamma}_n^p$ - интенсивность для p -ой отрывной «дискретной вихревой пары» «соседшей» с p -ого углового вихря. Причем, для всех точек p , с которых реализуется отрыв $\hat{q}_p(t_n) = \dot{\Gamma}_p(t_n) + \dot{\gamma}_n^p$.

Положим $Q_1 = \hat{q}_1$, $Q_i = \sum_{k=1}^i \hat{q}_k$ $i=1,2,\dots,M$. При таком построении $Q_M = \sum_{k=1}^M \hat{q}_k = 0$,

а выражение (3.4) для производной от потенциала примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, t_n)}{\partial t} = & \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ \frac{Q_j}{2\pi} \arctg \left(\frac{y - y_j(t_n)}{x - x_j(t_n)} \right) - \frac{Q_j}{2\pi} \arctg \left(\frac{y - y_{0j+1}(t_n)}{x - x_{0j+1}(t_n)} \right) \right\} + \\ & + \sum_{p=1}^P \left\{ \frac{q_p}{2\pi} \arctg \left(\frac{y - y_i^p(t_n)}{x - x_i^p(t_n)} \right) - \frac{q_p}{2\pi} \arctg \left(\frac{y - y_{0p}(t_n)}{x - x_{0p}(t_n)} \right) \right\} - \\ & - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) \left(\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)) \bullet \vec{W}_d(x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)) \right) - \\ & - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \left(\vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \bullet \vec{W}_v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n) \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

После замены первых двух слагаемых в (5.1) их дипольным эквивалентом, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi(x, y, t_n)}{\partial t} = & \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ \frac{Q_j}{2\pi} \cdot \frac{(\bar{y}_j - y)(x_{0j+1} - x_{0j}) + (x - \bar{x}_j)(y_{0j+1} - y_{0j})}{(x - \bar{x}_j)^2 + (y - \bar{y}_j)^2} \right\} + \\
& + \sum_{p=1}^P \left\{ \frac{q_p}{2\pi} \cdot \frac{(\bar{y}_n^p - y)(x_{0p} - x_n^p) + (x - \bar{x}_n^p)(y_{0p} - \bar{y}_n^p)}{(x - \bar{x}_n^p)^2 + (y - \bar{y}_n^p)^2} \right\} - \\
& - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) \left(\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)) \bullet \vec{W}_d(x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)) \right) - \\
& - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \left(\vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \bullet \vec{W}_v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n) \right)
\end{aligned} \quad (5.1')$$

При підстановці (4.5) в (5.1'), получим вираження для похідної в виді (4.4).

5.2 Вычислительный алгоритм

В соответствии с Рис. 1., на Рис. 3. представлен пошаговый алгоритм вычисления параметров при переходе с одного временного слоя на последующий.

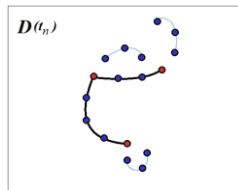


Рис.3. а)

Пусть для момента времени $t = t_n$ известно распределение интенсивностей вихрей на контуре поверхности и известно распределение интенсивностей вихрей в следе. Следовательно, определено поле скоростей (4.2) вне обтекаемого контура.

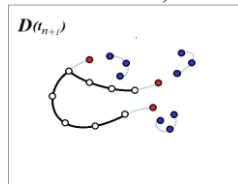


Рис. 3. б)

Для следующего момента времени $t = t_{n+1}$ определяется отрывное течение и движение вихревого следа. Угловые вихри (с индексом **p**) отрываются и перемещаются (в известном поле скорости), вследствие чего изменяется распределение интенсивностей вихрей на обтекаемом контуре и пополняется циркуляция в следе.

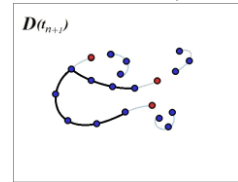


Рис. 3. в)

Для этого же момента времени $t = t_{n+1}$ определяются, новые, уже измененные (из-за отрывов вихрей с острых кромок и углов обтекаемого контура и движения следа) интенсивности вихрей на контуре $\Gamma_j(t_{n+1})$ ($j=1, \dots, M$), определяется геометрия следа, определяются

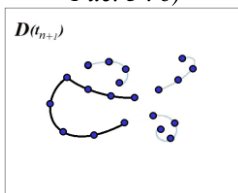


Рис. 3. д)

производные по времени интенсивностей $\dot{\Gamma}_j(t_{n+1})$, $\dot{\gamma}_n^p(t_{n+1})$, для всех P точек отрыва, выполняется процедура вычисления поля безразмерного давления.

Проведенные вычисления определяют значения всех характеристик для момента времени $t = t_{n+1}$. В силу чего известно распределение интенсивностей вихрей на контуре поверхности и известно распределение интенсивностей вихрей в следе. Следовательно, определено поле скоростей (4.2) вне обтекаемого контура (также, как и для момента времени $t = t_n$).

7 Результаты и вводы

Проблема вычисления характеристик для разрывных и многозначных функций метода дискретных вихрей может быть разрешена преобразованиями (на основе метода дискретных особенностей) повышающими порядок применяемых особенностей. Результаты применения вычислительных технологий представлены в работах[3,4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.- Харьков; Харьковский национальный университет им. В.Р.Каразіна, 2000, 90с.
2. Довгий С.О. Метод сингулярних інтегральних рівнянь./Довгий С.О., Ліфанов І.К. - Теорія та застосування. –Київ, “Наукова думка, ” 2004р., - 510с.
3. Черний Д.И. Вычислительные технологии для Метода дискретных вихрей // Вісник Національного технічного університету «ХП», Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». - Харків, НТУ «ХП», 2016р. - № 6 (1178), С.116-123.
4. Черний Д.И. Метод и алгоритм вычисления поля давления при использовании МДО // Труды XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007, Харьков-Херсон-2007, С.319-322.