"Математику уже за то любить стоит, что она ум в порядок приводит."
М.В.Ломоносов

1. Проблеми некласичної оптимізації

1.1. Основна задача оптимізації: знайти *мінімум* функції

$$f \,:\, X \to \mathbf{R},$$

визначеною на деякій множині X, при обмеженні $x \in D \subset X$. Стисло це записується таким чином

$$f(x) \,\to\, \min, \qquad x \in D. \tag{1.1}$$

Множина D називається множиною *допустимих елементів* задачі (1.1). Якщо $D = X$, тоді задача (1.1) називається *задачею без обмежень.*

B1.1. Розв'язком задачі (1.1) є $\dot{x} \in X$ таке, що

$$f(x) \geq f(\dot{x}) \qquad \forall\, x \in D.$$

Такий мінімум називається *глобальним* або *абсолютним* мінімумом задачі (1.1). Позначення: $\dot{x} \in \mathrm{absmin}(1.1)$.

Величина $f(\dot{x})$ ($\dot{x} \in \mathrm{absmin}(1.1)$) називається *чисельним значенням* задачі (1.1) та позначається $S_{\min}$ або S_{absmin}.

Множина розв'язків задачі (1.1) позначається $\mathrm{Arg}(1.1)$.

Якщо мінімум не досягається на D, тоді вказують послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ таку, що

$$f(x_n) \to S_{\min}.$$

(Тобто розглядають замість (1.1) задачу: $f(x) \,\to\, \inf, \quad x \in D.$)

При розгляді задачі (1.1) корисно визначати не тільки абсолютні мінімуми задачі але і локальні мінімуми.

B1.2. *Локальним* мінімумом задачі (1.1) називається $\dot{x} \in X$ таке, що

$$f(x) \geq f(\dot{x}) \qquad \forall\, x \in U \cap D,$$

де U є деяким околом $\dot{x} \in D$. Позначення: $\dot{x} \in \mathrm{locmin}(1.1)$.

1.2. Нехай $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Якщо функція f диференційована k раз в точці $\dot{x} \in \mathbf{R}$, тоді пишуть $f \in C^k(\dot{x})$. Околом точці $\dot{x} \in \mathbf{R}$ є множина

$$U = \{x \in \mathbf{R} \,:\, |x - \dot{x}| < r\} \quad \text{для деякого} \quad r \in \mathbf{R}_+ = \{s \in \mathbf{R} : s > 0\}.$$

Розглянемо задачу оптимізації:

$$f(x) \to \min, \qquad x \in \mathbf{R}\,. \tag{1.2}$$

Позначимо для такої задачі $\operatorname{locmin} f = \operatorname{locmin}(1.2)$.

Теорема 1.1 (Ферма, 1629). *Якщо* $\dot{x} \in \operatorname{locmin} f$ *та* $f \in C^1(\dot{x})$, *тоді*

$$f'(\dot{x}) = 0. \qquad \triangleleft \;\; \triangleright$$

Теорема 1.2. *Припустимо, що* $f \in C^2(\dot{x})$ *в деякій точці* $\dot{x} \in \mathbf{R}$.

1. Необхідні умови мінімуму:

$$\dot{x} \in \operatorname{locmin} f \quad \Rightarrow \quad f'(\dot{x}) = 0, \quad f''(\dot{x}) \geq 0.$$

2. Достатні умови мінімуму:

$$f'(\dot{x}) = 0, \quad f''(\dot{x}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} \in \operatorname{locmin} f. \qquad \triangleleft \;\; \triangleright$$

Теорема 1.3. *Припустимо, що* $f \in C^k(\dot{x})$ *в деякій точці* $\dot{x} \in \mathbf{R}$ *для* $k \geq 2$.

1. Необхідні умови мінімуму:

$$\dot{x} \in \operatorname{locmin} f \quad \Rightarrow$$

$$a) \qquad f'(\dot{x}) = 0, \ldots, f^k(\dot{x}) = 0 \quad \textit{або}$$

$$b) \quad f'(\dot{x}) = 0, \ldots, f^{2l-1}(\dot{x}) = 0 \quad f^{2l}(\dot{x}) \geq 0 \quad \textit{для} \quad l \,:\, 2 \leq 2l \leq k.$$

2. Достатні умови мінімуму:

$$f'(\dot{x}) = 0, \ldots, f^{2l-1}(\dot{x}) = 0 \quad f^{2l}(\dot{x}) > 0 \quad \textit{для} \quad l \,:\, 2 \leq 2l \leq k$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} \in \operatorname{locmin} f. \qquad \triangleleft \;\; \triangleright$$

1.3. Розглянемо функцію $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Якщо f диференційована k раз по $x_1, \ldots, x_n$ в точці $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$, тоді пишуть $f \in C^k(\dot{x})$. Околом $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$ є множина

$$U = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - \dot{x}| < r\} \quad \text{для деякого} \quad r \in \mathbf{R}_+.$$

Теорема 1.4. *Якщо* $\dot{x} \in \operatorname{locmin} f$ *і* $f \in C^1(\dot{x})$, *тоді*

$$\nabla f(\dot{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f(\dot{x})}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f(\dot{x})}{\partial x_n} = 0.$$

$\triangleleft$ Розглянемо функцію однієї змінної $\varphi(x_i) = f(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{i-1}, x_i, \dot{x}_{i+1}, \ldots, \dot{x}_n)$ для $i = 1, \ldots, n$. Маємо $\dot{x} \in \operatorname{locmin} \varphi$

$$\Rightarrow \quad \varphi'_{x_i}(\dot{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f(\dot{x})}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, \ldots n. \qquad \triangleright$$

Теорема 1.5. *Припустимо, що* $f \in C^2(\dot{x})$ *в деякій точці* $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$ *та позначимо*

$$\nabla^2 f(\dot{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\dot{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n .$$

1. Необхідні умови мінімуму:

$$\dot{x} \in \operatorname{locmin} f \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\dot{x}) = 0, \quad \langle \nabla^2 f(\dot{x})\, h, h \rangle \geq 0 \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^n.$$

2. Достатні умови мінімуму:

$$\nabla f(\dot{x}) = 0, \quad \langle \nabla^2 f(\dot{x})\, h, h \rangle > 0 \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} \in \operatorname{locmin} f.$$

$\triangleleft$ *1.* Маємо $\dot{x} \in \operatorname{locmin} f$, отже $\nabla f(\dot{x}) = 0$ та

$$f(\dot{x} + \alpha\, h) - f(\dot{x}) \geq 0$$

для фіксованого $h \in \mathbf{R}^n$ і малих $\alpha \in \mathbf{R}$.

Використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$f(\dot{x} + \alpha\, h) - f(\dot{x}) = \frac{\alpha^2}{2} \langle \nabla^2 f(\dot{x})\, h, h \rangle + r(\alpha\, h) \geq 0$$

для фіксованого $h \in \mathbf{R}^n$ і малих $\alpha \in \mathbf{R}$. Розділивши на α^2 та обчислюючи $\lim_{\alpha \to 0}$, маємо

$$\langle \nabla^2 f(\dot{x})\, h, h \rangle \geq 0 \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^n. \qquad \triangleright\, \mathit{1.}$$

$\lhd$ *2.* Використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$f(\dot{x}+h)-f(\dot{x}) = \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(\dot{x})\,h, h\,\rangle + r(h) \geq \frac{\kappa}{2}\,|h|^2 + r(h) \geq 0$$

для деякого $\kappa > 0$ і малих $h \in \mathbf{R}^n$, оскільки $r(h)$ є достатньо малим. Таким чином

$$\dot{x} \in \operatorname{locmin} f. \qquad \rhd\ \mathit{2.}$$

1.4. Задача планування на підприємстві.

Нехай на підприємстві є виробничі ресурси m типів в об'ємах $b_1, \ldots, b_m$. Підприємство виробляє продукцію n типів. На виробництво одиниці продукції j-го типу потрібно використовувати ресурс кожного i-го типу в об'ємі a_i^j. Прибуток від реалізації одиниці продукції j-го типу дорівнює c_j. Таким чином, при виготовленні x_j одиниць продукції кожного j-го типу прибуток є

$$f(x) = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \ldots + c_n\,x_n.$$

Знайти план виробництва $x \in \mathbf{R}^n$ такий, що прибуток $f(x)$ є максимальним:

$$f(x) \to \max, \quad x \in \overline{\mathbf{R}}^n_+ \ :$$

$$a_1^1\,x_1 + a_1^2\,x_2 + \ldots + a_1^n\,x_n = b_1,$$

$$a_2^1\,x_1 + a_2^2\,x_2 + \ldots + a_2^n\,x_n = b_2,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$a_m^1\,x_1 + a_m^2\,x_2 + \ldots + a_m^n\,x_n = b_m,$$

де $\overline{\mathbf{R}}^n_+ = \{x \in \mathbf{R}^n \ : \ x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n\}$.

Ця задача називається задачею *лінійного програмування* в *канонічній формі.*

Рівність

$$a_i^1\,x_1 + a_i^2\,x_2 + \ldots + a_i^n\,x_n = b_i$$

означає, що ресурс кожного i-го типу витрачений повністю.

Якщо ресурс кожного i-го типу витрачений не повністю, тоді розглядають наступну задачу:

$$f(x) \to \max, \quad x \in \overline{\mathbf{R}}^n_+ \ :$$

$$a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n \le b_1,$$

$$a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n \le b_2,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \ldots + a_m^n x_n \le b_m,$$

яку можна звести до задачі лінійного програмування в канонічній формі за допомогою введення фіктивних змінних $x_{n+1}, \ldots x_{n+k}$ із нульовим прибутком від реалізації одиниці продукції $(n+l)$-го типу : $c_{n+l} = 0$, $l = 1, \ldots k$.

Задача лінійного програмування є задачею оптимізації із обмеженнями типу рівностей та нерівностей.

1.5. Задача оптимізації із обмеженнями типу рівностей.

Розглянемо функції $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, де $i = 0, 1 \ldots m$. Якщо функція f_i диференційована k раз по $x_1, \ldots, x_n$ у деякому околу $U(\dot{x})$ точці $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$, тоді пишуть

$$f_i \in C^k(U(\dot{x})).$$

Задачею оптимізації із обмеженнями типу рівностей називається наступна задача:

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{1.3}$$

Теорема 1.6 (принцип Лагранжа). *Якщо* $\dot{x} \in \operatorname{locmin}(1.3)$ *і* $f_i \in C^1(U(\dot{x}))$ *для* $i = 0, 1 \ldots m$, *тоді*

$$\exists \ \lambda = (\lambda_0, \lambda_1 \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1} \setminus \{0\} \ :$$

$$\nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0 \nabla f_0(\dot{x}) \ + \ \lambda_1 \nabla f_1(\dot{x}) + \ldots + \ \lambda_m \nabla f_m(\dot{x}) = 0,$$

де функція $\Lambda(\dot{x}, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) \ + \ \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \ \lambda_m f_m(x)$ *називається функцією Лагранжа, а* $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$ *таке, що* $\nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0$ *називається стаціонарною точкою функції Лагранжа.*

$\triangleleft$ Припустимо, що вектори

$$\nabla f_i(\dot{x}) = \left(\frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_n} \right), \quad i = 0, 1, \ldots, m$$

лінійно залежні. Тоді $\exists\ \lambda = (\lambda_0, \lambda_1 \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1} \setminus \{0\}\ :\ \nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0.$

Розглянемо тепер випадок, коли вектори

$$\nabla f_i(\dot{x}) = \left(\frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_n}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, m$$

лінійно незалежні. Тоді

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_j}\right)_{i=0,1,\ldots,m,\, j=1,\ldots,n} = m + 1$$

і можна вважати, що

$$\det\left(\frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_j}\right)_{i=0,1,\ldots,m,\, j=1,\ldots,m+1} \neq 0.$$

Крім того, можна вважати, що $f_0(\dot{x}) = 0$ (якщо $f_0(\dot{x}) \neq 0$, тоді розглянемо функцію $\widetilde{f}_0(x) = f_0(x) - f_0(\dot{x})$ для якої $\widetilde{f}_0(\dot{x}) = 0$, де $\dot{x} \in \operatorname{locmin}(1.3)$).

Визначимо відображення із околу точці $(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m+1}) \in \mathbf{R}^{m+1}$ в $\mathbf{R}^{m+1}$ формулою

$$F(\tilde{x}) = (F_0(\tilde{x}), \ldots, F_m(\tilde{x})) = (f_0(\tilde{x}, \dot{x}_{m+2}, \ldots, \dot{x}_n), \ldots, f_m(\tilde{x}, \dot{x}_{m+2}, \ldots, \dot{x}_n)),$$

де $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{m+1})$. Маємо $F(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m+1}) = 0$, $F \in C^1(U(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m+1}))^{m+1}$ і

$$\det\left(\frac{\partial F_i(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m+1})}{\partial x_j}\right)_{i=0,1,\ldots,m,\, j=1,\ldots,m+1} \neq 0.$$

За теоремою про обернену функцію існує обернене відображення F^{-1} із околу точці $\tilde{y} = 0$ в окіл точці $(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m+1})$ таке, що

$$F^{-1}(0) = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m+1})$$

і $|F^{-1}(y) - (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m+1})| \leq \kappa |y|$ для деякого $\kappa > 0$. Зокрема для малих $\varepsilon \in \mathbf{R}$, визначено

$$\tilde{x}(\varepsilon) = F^{-1}(\varepsilon, 0, \ldots, 0)$$

та $F(\tilde{x}(\varepsilon)) = (\varepsilon, 0, \ldots, 0)$. Отже, отримуємо

$$f_0(\tilde{x}(\varepsilon), \dot{x}_{m+2}, \ldots, \dot{x}_n) = \varepsilon, \quad f_i(\tilde{x}(\varepsilon), \dot{x}_{m+2}, \ldots, \dot{x}_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$|\,\tilde{x}(\varepsilon) - (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m+1})| \leq \kappa |\varepsilon|,$$

що суперечить припущенням $f_0(\dot{x}) = 0$ і $\dot{x} \in \operatorname{locmin}(1.3)$, оскільки може бути $\varepsilon < 0$. Таким чином, вектори

$$\nabla f_i(\dot{x}) = \left(\frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_n} \right), \quad i = 0, 1, \ldots, m$$

лінійно залежні. $\triangleright$

Теорема 1.7 (необхідні умови мінімуму у задачі (1.3)). *Якщо* $f_i \in C^2(U(\dot{x}))$ *для* $i = 0, 1, \ldots, m$, $\dot{x} \in \operatorname{locmin}(1.3)$ *та*

$$\dim \operatorname{Lin} \{ \nabla f_1(\dot{x}), \ldots, \nabla f_m(\dot{x}) \} = n,$$

тоді

$$\exists \ \lambda = (1, \lambda_1 \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1} \ :$$

$$\nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f_0(\dot{x}) \ + \ \lambda_1 \nabla f_1(\dot{x}) + \ldots + \ \lambda_m \nabla f_m(\dot{x}) = 0$$

і

$$\langle \nabla^2 \Lambda(\dot{x}, \lambda)\, h, h \rangle \geq 0 \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^n \ : \quad \langle \nabla f_i(\dot{x}), h \rangle = 0 \quad i = 1, \ldots, m,$$

де

$$\operatorname{Lin} \{ \nabla f_1(\dot{x}), \ldots, \nabla f_m(\dot{x}) \} = \{ c_1 \nabla f_1(\dot{x}) + \ldots + c_m \nabla f_m(\dot{x}) : \ c_i \in \mathbf{R} \}. \qquad \triangleleft \ \triangleright$$

Теорема 1.8 (достатні умови мінімуму у задачі (1.3)). *Якщо* $f_i \in C^2(U(\dot{x}))$ *для* $i = 0, 1 \ldots m$,

$$\dim \operatorname{Lin} \{ \nabla f_1(\dot{x}), \ldots, \nabla f_m(\dot{x}) \} = n,$$

$$\exists \ \lambda = (1, \lambda_1 \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1} \ :$$

$$\nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f_0(\dot{x}) \ + \ \lambda_1 \nabla f_1(\dot{x}) + \ldots + \ \lambda_m \nabla f_m(\dot{x}) = 0$$

і

$$\langle \nabla^2 \Lambda(\dot{x}, \lambda)\, h, h \rangle > 0 \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \ : \quad \langle \nabla f_i(\dot{x}), h \rangle = 0 \quad i = 1, \ldots, m,$$

тоді $\dot{x} \in \operatorname{locmin}(1.3)$. $\quad \triangleleft \ \triangleright$

2. Опуклі множини та функції

Для лінійного нормованого простору X і $a, b \in X$, множина

$$[a,b] = \{\, \alpha\, a + (1-\alpha)\, b \;:\; 0 \le \alpha \le 1 \,\}$$

називається *відрізком*, що сполучає a і b.

B2.1. Множина $K \subset X$ називається *опуклою*, якщо

$$[a,b] \subset K \qquad \forall\, a, b \in K.$$

B2.2. Функція $f : K \to \mathbf{R}$ на опуклій множині K називається *опуклою*, якщо

$$f(\,\alpha\, a + (1-\alpha)\, b\,) \;\le\; \alpha\, f(a) \,+ (1-\alpha)\, f(b) \qquad \forall\, \alpha \in [0,1].$$

Типовим прикладом опуклої функції є *функція норми* на лінійному нормованому простору над $\mathbf{R}$.

Теорема 2.1. *Нехай* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *є такою, що* $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$. *Тоді*

$$f \quad \text{є опуклою} \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla^2 f(x) \ge 0 \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}^n. \qquad \lhd \;\rhd$$

Множина всіх лінійних і неперервних відображень $\varphi : X \to \mathbf{R}$ називається *спряженим* (або *дуальним*) до X і позначається X^*. Елементи $\varphi \in X^*$ називаються *функціоналами*. Норма функціоналу $\varphi \in X^*$ визначається рівністю

$$\|\varphi\,\|_B \,=\, \sup_{\|a\|_X \le 1} |\varphi(a)| = \sup_{a \ne \theta} \frac{|\varphi(a)|}{\|a\|_X}.$$

Лінійний простір $(X^*, \|\cdot\|_B)$ є банаховим (нормованим та повним).

Гільбертів (повний передгільбертів) простір H можна ототожнити із H^* (як нормований простір) через наступне твердження.

Теорема 2.2 (Рісс). *Нехай* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ *є гільбертів простір і* $\varphi \in H^*$. *Тоді*

$$\exists\, 1 \;\; a \in H \;\;: \qquad \varphi(x) = \langle x, a \rangle_H \qquad \forall\, x \in H$$

і

$$\|\,\varphi\,\|_B = \|\,a\,\|_H = \sqrt{\langle a, a \rangle_H}.$$

B2.3. *Субдиференціалом* опуклої функції $f : X \to \mathbf{R}$ у точці $\dot{x} \in X$ називається наступна підмножина в X^* :

$$\partial f(\dot{x}) = \{\, y \in X^* : \ \langle x - \dot{x}, y\rangle \le f(x) - f(\dot{x}) \quad \forall\, x \in X \,\},$$

де $\langle x-\dot{x}, y\rangle = y(x-\dot{x})$ є значенням функціоналу $y \in X^*$ на елементі $x-\dot{x} \in X$.

Наприклад, якщо $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ і $f \in C^1(\mathbf{R}^n) = \{f \in C^0(\mathbf{R}^n) : \nabla f \in C^0(\mathbf{R}^n)\}$, тоді

$$\partial f(\dot{x}) = \nabla f(\dot{x}).$$

Теорема 2.3. *Нехай* $f, g : X \to \mathbf{R}$ *є опуклими і* f, g *неперервні в деякій точці* $x_0 \in X$. *Тоді*

$$\partial(f + g)(\dot{x}) = \partial f(\dot{x}) + \partial g(\dot{x}) \qquad \forall\, \dot{x} \in X. \qquad \lhd \ \rhd$$

Теорема 2.4 (Ферма для опуклих функцій). *Нехай* $f : X \to \mathbf{R}$ *є опуклою та розглядається задача оптимізації:*

$$f(x) \to \min, \qquad x \in X\,.$$

Тоді

$$\dot{x} \in \operatorname{absmin} f \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \in \partial f(\dot{x}).$$

$\lhd$

$$\dot{x} \in \operatorname{absmin} f \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - f(\dot{x}) \ge 0 = \langle x - \dot{x}, y\rangle \ \ \forall\, x \in X \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \partial f(\dot{x}). \quad \rhd$$

Наприклад, для функцій $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ субдиференціалом $\partial f(\dot{x})$ є множина кутових коефіцієнтів, при яких прямі що проходять через точку $(\dot{x}, f(\dot{x}))$ лежать під графіком функції $y = f(x)$.

Завдання для самостійної роботи: для $f(x) = |x|$ перевірити, що

$$\partial f(\dot{x}) \ = \ \operatorname{sgn} \dot{x}, \quad \dot{x} \ne 0,$$

$$\partial f(\dot{x}) = [-1, 1], \quad \dot{x} = 0.$$

Теорема 2.5. *Нехай* $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ *є такою, що* $f \in C^1[0, 1]$ *та розглядається задача оптимізації:*

$$f(x) \to \min, \qquad x \in [0, 1]\,.$$

Якщо $\dot{x} \in \operatorname{locmin} f$*, тоді виконана одна із наступних умов*

$$i) \quad f'(\dot{x}) = 0 \quad \textit{при} \quad 0 < \dot{x} < 1\,;$$

$$ii) \quad f'(\dot{x}) \geq 0 \quad \textit{при} \quad \dot{x} = 0\,;$$

$$iii) \quad f'(\dot{x}) \leq 0 \quad \textit{при} \quad \dot{x} = 1.$$

$\triangleleft$ Для $\dot{x} \in \operatorname{locmin} f$, використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$f(x) - f(\dot{x}) = f'(\dot{x})(x - \dot{x}) \, + \, r(x - \dot{x}) \geq 0,$$

де $r(x - \dot{x})$ є малим для x достатньо близьких до $\dot{x}$. Таким чином, для $x \in [0,1]$ достатньо близьких до $\dot{x} \in \operatorname{locmin} f$, маємо одну із наступних умов

$$i) \quad f'(\dot{x}) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < \dot{x} < 1 \quad (\text{Теорема Ферма})\,;$$

$$ii) \quad f'(\dot{x}) \geq 0 \quad \text{при} \quad \dot{x} = 0, \quad \text{оскільки} \quad (x - \dot{x}) \geq 0\,;$$

$$iii) \quad f'(\dot{x}) \leq 0 \quad \text{при} \quad \dot{x} = 1, \quad \text{оскільки} \quad (x - \dot{x}) \leq 0. \qquad \triangleright$$

Умови $i), ii), iii)$ теореми 2.5 можна записати у вигляді нерівності:

$$\text{знайти} \quad \dot{x} \in [0,1] \; : \qquad f'(\dot{x})(x - \dot{x}) \geq 0 \qquad \forall\, x \in [0,1],$$

яка називається *варіаційною нерівністю.*

Теорема 2.6. *Нехай* $f : K \to \mathbf{R}$ *функція на замкнутої опуклій множині* $K \subset \mathbf{R}^n$, $f \in C^1(K) = \{f \in C^0(K) : \nabla f \in C^0(K)\}$ *і розглядається задача оптимізації:*

$$f(x) \, \to \, \min, \qquad x \in K.$$

Якщо $\dot{x} \in \operatorname{locmin} f$*, тоді* $\dot{x} \in K$ *є розв'язком варіаційної нерівності :*

$$\textit{знайти} \quad \dot{x} \in K \; : \qquad \nabla f(\dot{x})(x - \dot{x}) \geq 0 \qquad \forall\, x \in K, \tag{2.1}$$

де $\nabla f(\dot{x})(x - \dot{x}) = \langle \nabla f(\dot{x}), (x - \dot{x}) \rangle$ *позначає скалярний добуток векторів.*

$\triangleleft$ Множина K є опуклою, отже $[x, \dot{x}] \subset K$ для $\dot{x} \in \operatorname{locmin} f$. Функція

$$\Phi(t) = f(\dot{x} + t(x - \dot{x})), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

визначена і досягає локальний мінімум при $t=0$, тому (як в теоремі 2.5) маємо

$$\Phi'(0) = \nabla f(\dot{x})(x-\dot{x}) \geq 0 \qquad \forall\, x \in K. \qquad \triangleright$$

Теорема 2.7. *Нехай* $f : K \to \mathbf{R}$ *опукла функція на замкнутої опуклій множині* $K \subset \mathbf{R}^n$, $f \in C^1(K)$ *та* $\dot{x} \in K$ *є розв'язком варіаційної нерівності (2.1). Тоді*

$$\dot{x} \in \operatorname{absmin} f.$$

$\triangleleft$ Для опуклої функції $f \in C^1(K)$, маємо $\partial f(\dot{x}) = \nabla f(\dot{x})$ і

$$f(x) - f(\dot{x}) \geq \nabla f(\dot{x})(x-\dot{x}) \qquad \forall\, x \in K.$$

Враховуючи варіаційну нерівність (2.1) отримуємо, що

$$f(x) \geq f(\dot{x}) \qquad \forall\, x \in K. \qquad \triangleright$$

Розв'язок $\dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}^n_+$ задачі *планування на підприємстві* за визначенням задовольняє нерівності

$$c\,\dot{x} \geq c\,x \qquad \forall\, x \in \overline{\mathbf{R}}^n_+$$

і відповідним обмеженням типу рівностей ($A\,x = b$), де $c = (c_1, \ldots, c_n)$.

Таким чином, розв'язок $\dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}^n_+$ цієї задачі є розв'язком варіаційної нерівності

$$\text{знайти} \quad \dot{x} \in D : \qquad c\,(\dot{x} - x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in D,$$

де $D = \overline{\mathbf{R}}^n_+ \cap \{\, y \in \mathbf{R}^n \,:\, A\,y = b \,\}$.

Теорема 2.8 (про проекцію на опуклу підмножину в $\mathbf{R}^n$). *Нехай* K *є замкнутою опуклою підмножиною в* $\mathbf{R}^n$. *Тоді для кожного фіксованого* $x \in \mathbf{R}^n$

$$\exists\, 1\ y \in K : \quad |x - y| = \inf_{\eta \in K} |x - \eta|. \tag{2.2}$$

$\triangleleft$ Позначимо через η_k мінімізуючу послідовність, тобто

$$\lim_{x \to \infty} |x - \eta_k| = d = \inf_{\eta \in K} |x - \eta|. \tag{2.3}$$

Існування такої послідовності випливає із визначення інфінума. Із рівності паралелограма

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2\,|a|^2 + 2\,|b|^2, \qquad a, b \in \mathbf{R}^n,$$

при $a = x - \eta_k$ і $b = x - \eta_h$, отримуємо

$$|\eta_k - \eta_h|^2 = 2\,|x - \eta_k|^2 + 2\,|x - \eta_h|^2 - 4\left|x - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h)\right|^2. \tag{2.4}$$

Множина K є опуклою, тому $\frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h) \in K$ і

$$d^2 \le \left|x - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h)\right|^2.$$

Отже

$$|\eta_k - \eta_h|^2 \le 2\,|x - \eta_k|^2 + 2\,|x - \eta_h|^2 - 4\,d^2$$

і послідовність $\{\eta_k\} \subset K$ є фундаментальною через (2.3).

Таким чином, існує $y \in K$ таке, що $\lim_{k\to\infty} \eta_k = y$ і

$$|x - y| = \lim_{k\to\infty} |x - \eta_k| = d.$$

Припустимо, що $y, \tilde{y} \in K$ задовольняють (2.2). Тоді, враховуючи (2.4), маємо

$$|y - \tilde{y}|^2 = 2\,|x - y|^2 + 2\,|x - \tilde{y}|^2 - 4\left|x - \frac{1}{2}(y + \tilde{y})\right|^2 \le 4\,d^2 - 4\,d^2 = 0\,. \qquad \triangleright$$

Розв'язок $y \in K$ задачі (2.2) називається *проекцією* x на K і позначається

$$y = \mathrm{Pr}_K(x).$$

За визначенням $\mathrm{Pr}_K(x) = x$ для $\forall\, x \in K$.

Лема 2.9. *Нехай K є замкнутою опуклою підмножиною $\mathbf{R}^n$. Тоді*

$$y = \mathrm{Pr}_K(x) \quad \Leftrightarrow \quad \langle y, \eta - y\rangle \ge \langle x, \eta - y\rangle \quad \forall\, \eta \in K.$$

$\triangleleft(\Rightarrow)$ Нехай $x \in \mathbf{R}^n$ і $y = \mathrm{Pr}_K(x)$, тоді

$$y + t(\eta - y) \in K \qquad \forall\, \eta \in K, \quad 0 \le t \le 1.$$

Із (2.2) випливає, що функція

$$\Phi(t) = |x - y - t(\eta - y)|^2 = |x - y|^2 - 2\,t\,\langle x - y, \eta - y\rangle + t^2|\eta - y|^2$$

досягає мінімуму при $t = 0$ і $\Phi'(0) \ge 0$. Тобто $\langle x - y, \eta - y\rangle \le 0 \quad \forall\, \eta \in K$, або

$$\langle y, \eta - y\rangle \ge \langle x, \eta - y\rangle \quad \forall\, \eta \in K. \qquad (\Rightarrow)\,\triangleright$$

$\lhd(\Leftarrow)$ Нехай $y \in K$ і $\langle y, \eta - y\rangle \geq \langle x, \eta - y\rangle \quad \forall\, \eta \in K$, тоді

$$0 \leq \langle y - x, (\eta - x) + (x - y)\rangle = -|y - x|^2 + \langle y - x, \eta - x\rangle.$$

Таким чином, $|y - x|^2 \leq \langle y - x, \eta - x\rangle \leq |y - x||\eta - x|$ і

$$|y - x| \leq |\eta - x| \qquad \forall\, \eta \in K. \qquad\qquad (\Leftarrow)\rhd$$

Лема 2.10. *Нехай K є замкнутою опуклою підмножиною $\mathbf{R}^n$. Тоді*

$$|\operatorname{Pr}_K(x) - \operatorname{Pr}_K(\tilde{x})\,| \leq |\, x - \tilde{x}\,| \qquad \forall\, x, \tilde{x} \in \mathbf{R}^n,$$

зокрема, відображення $\operatorname{Pr}_K : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ є неперервним.

$\lhd$ Нехай $x, \tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ і $y = \operatorname{Pr}_K(x), \tilde{y} = \operatorname{Pr}_K(\tilde{x})$. Тоді

$$\langle y, \tilde{\eta} - y\rangle \geq \langle x, \tilde{\eta} - y\rangle \quad \forall\, \tilde{\eta} \in K,$$

$$\langle \tilde{y}, \eta - \tilde{y}\rangle \geq \langle \tilde{x}, \eta - \tilde{y}\rangle \quad \forall\, \eta \in K.$$

Вибираючи $\tilde{\eta} = \tilde{y}, \eta = y$ і додаючи, отримуємо

$$|\, y - \tilde{y}\,|^2 = \langle y - \tilde{y}, y - \tilde{y}\rangle \leq \langle x - \tilde{x}, y - \tilde{y}\rangle \leq |\, x - \tilde{x}\,|\,|\, y - \tilde{y}\,|. \qquad \rhd$$

Теорема 2.11 (Брауер). *Нехай K є компактною опуклою підмножиною $\mathbf{R}^n$ та $F : K \to K$ є неперервним відображенням. Тоді*

$$\exists\, x \in K : \quad x = F(x). \qquad\qquad \lhd \;\; \rhd$$

Теорема 2.12. *Нехай K є компактною опуклою підмножиною в $\mathbf{R}^n$ та $F : K \to \mathbf{R}^n$ є неперервним відображенням. Тоді*

$$\exists\, x \in K : \quad \langle F(x), y - x\rangle \geq 0 \quad \forall\, y \in K.$$

$\lhd$ Достатньо довести, що

$$\exists\, x \in K : \quad \langle x, y - x\rangle \geq \langle x - F(x), y - x\rangle \quad \forall\, y \in K.$$

Відображення $\operatorname{Pr}_K \circ (I - F) : K \to K$ є неперервним, отже

$$\exists\, x \in K : \quad x = \operatorname{Pr}_K \circ (I - F)(x).$$

Використовуючи лему 2.9, маємо

$$\langle x, y - x\rangle \geq \langle x - F(x), y - x\rangle \quad \forall\, y \in K. \qquad \triangleright$$

Нехай K є замкнутою опуклою підмножиною $\mathbf{R}^n$ і $F : K \to \mathbf{R}^n$ є неперервним відображенням. Розглянемо задачу:

$$\text{знайти} \quad x \in K : \qquad \langle F(x), y - x\rangle \geq 0 \qquad \forall\, y \in K. \tag{2.5}$$

Якщо K обмежено, тоді існування розв'язку доведене в теоремі 2.12. У загальному випадку, розв'язку може не бути, наприклад, для $K = \mathbf{R}$ і $F(x) = e^x$.

Позначимо через $\Sigma_r = \{\, x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq r \,\}$ замкнуту кулю радіусу r і

$$K_r = K \cap \Sigma_r.$$

При $K_r \neq \emptyset$ із теореми 2.12 випливає, що

$$\exists\, x_r \in K_r : \qquad \langle F(x_r), y - x_r\rangle \geq 0 \qquad \forall\, y \in K_r. \tag{2.6}$$

Теорема 2.13. *Нехай K є замкнутою опуклою підмножиною в $\mathbf{R}^n$ та $F : K \to \mathbf{R}^n$ є неперервним відображенням. Тоді*

$\exists$ *розв'язок задачі (2.5)* $\quad \Leftrightarrow$

для деякого $r > 0$ розв'язок задачі (2.6) задовольняє умові $\quad |x_r| < r$.

$\triangleleft(\Rightarrow)$ Якщо x розв'язок задачі (2.5), тоді x розв'язок задачі (2.6) при $|x| < r$ $(\Rightarrow)\triangleright$

$\triangleleft(\Leftarrow)$ Якщо $|x_r| < r$ тоді

$$\forall\, y \in K \quad \exists\, \varepsilon \geq 0 \quad : \quad w = x_r + \varepsilon(y - x_r) \in K_r.$$

Таким чином,

$$x_r \in K_r \subset K : \quad 0 \leq (F(x_r), w - x_r) = \varepsilon(F(x_r), y - x_r) \quad \forall\, y \in K,$$

тобто x_r розв'язок задачі (2.5). $(\Leftarrow)\triangleright$

Теорема 2.14. *Нехай K є замкнутою опуклою підмножиною в $\mathbf{R}^n$ та $F : K \to \mathbf{R}^n$ є неперервним відображенням таким, що*

$$\frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle}{|x - x_0|} \to \infty \quad \textit{при} \quad |x| \to \infty, \quad x \in K, \tag{2.7}$$

для деякого $x_0 \in K$. Тоді $\exists$ розв'язок задачі (2.5).

$\triangleleft$ Нехай $H > |F(x_0)|$ та $r \geq |x_0|$ такі, що

$$\langle F(x) - F(x_0), x - x_0 \rangle \geq H\,|x - x_0| \quad \text{при} \quad |x| \geq r, \quad x \in K.$$

Тоді

$$\langle F(x), x - x_0 \rangle \geq H\,|x - x_0| + \langle F(x_0), x - x_0 \rangle \geq$$

$$\geq H\,|x - x_0| - |F(x_0)||x - x_0| \geq (H - |F(x_0)|)(|x| - |x_0|) > 0$$

при $|x| \geq r$. Якщо $x_r \in K_r$ розв'язок задачі (2.6), тоді

$$\langle F(x_r), x_r - x_0 \rangle = -\langle F(x_r), x_0 - x_r \rangle \leq 0$$

і тому $|x_r| < r$. $\triangleright$

В2.3. Умова (2.7) називається умовою *коерцитивності* для F.

Варіаційна нерівність (2.5) може мати багато розв'язків, наприклад, при $F=0$. Нехай $x, \tilde{x} \in K$ є розв'язки цієї нерівності. Тоді

$$\langle F(x), (y - x) \rangle \geq 0 \qquad \forall\, y \in K,$$

$$\langle F(\tilde{x}), (y - \tilde{x}) \rangle \geq 0 \qquad \forall\, y \in K.$$

Обираючи $y = \tilde{x}$ в першій нерівності, $y = x$ в другій нерівності і складаючи ці нерівності, отримуємо

$$\langle F(x) - F(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle \leq 0.$$

В2.4. Відображення $F : K \to \mathbf{R}^n$ називається *монотонним*, якщо

$$\langle F(x) - F(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle \geq 0 \qquad \forall\, x, \tilde{x} \in K.$$

Відображення $F : K \to \mathbf{R}^n$ називається *строго монотонним*, якщо

$$\langle F(x) - F(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle > 0 \qquad \forall\, x, \tilde{x} \in K : x \neq \tilde{x}.$$

Для деякого $p \in \mathbf{R}_+$, відображення $F : K \to \mathbf{R}^n$ називається *p-сильно монотонним*, якщо

$$\langle F(x) - F(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle \geq |x - \tilde{x}|^p \qquad \forall\, x, \tilde{x} \in K.$$

Таким чином, доведені наступні твердження.

Теорема 2.15. *Нехай K є замкнутою опуклою підмножиною $\mathbf{R}^n$ та $F : K \to \mathbf{R}^n$ є неперервним, коерцитивним і строго монотонним відображенням. Тоді*

$$\exists\, 1\ x \in K : \qquad \langle F(x), (y-x)\rangle \geq 0 \qquad \forall\, y \in K. \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

Теорема 2.16. *Нехай K є замкнутою опуклою підмножиною $\mathbf{R}^n$ та $F : K \to \mathbf{R}^n$ є неперервним і p-сильно монотонним відображенням при $p > 1$. Тоді*

$$\exists\, 1\ x \in K : \qquad \langle F(x), (y-x)\rangle \geq 0 \qquad \forall\, y \in K. \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

Приклад 2.17. Визначимо замкнуту опуклу множину

$$\overline{\mathbf{R}}^n_+ = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \,:\, x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \,\}$$

неперервну функцію $F : \overline{\mathbf{R}}^n_+ \to \mathbf{R}^n$ і розглянемо задачу:

$$\text{знайти} \quad \dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}^n_+ : \quad F(\dot{x}) \in \overline{\mathbf{R}}^n_+ \quad \text{і} \quad \langle F(\dot{x}), x - \dot{x}\rangle = 0 \qquad \forall\, x \in \overline{\mathbf{R}}^n_+. \tag{2.8}$$

Завдання для самостійної роботи: перевірити, що елемент $\dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}^n_+$ є розв'язком варіаційної нерівності:

$$\text{знайти} \quad \dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}^n_+ : \qquad \langle F(\dot{x}), x - \dot{x}\rangle \geq 0 \qquad \forall\, x \in \overline{\mathbf{R}}^n_+$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}^n_+ \qquad \text{є розв'язком задачі (2.8).}$$

Задача із перешкодою. Нехай $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ є обмеженою областю (зв'язаною відкритою множиною) із гладкою межею $\partial\Omega$ і $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ така що $\psi \leq 0$ на $\partial\Omega$. Визначимо опуклу множину

$$K = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) : \quad v \geq \psi \ \text{ в } \Omega \quad \text{і} \quad v = 0 \ \text{ на } \partial\Omega \,\} \subset C^1(\overline{\Omega})$$

і розглянемо задачу оптимізації:

$$f(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 \, d\,x \ \to \inf, \qquad v \in K. \tag{2.9}$$

Припустимо, що розв'язок $u \in K$ задачі (2.9) існує. Тоді функція

$$\Phi(t) = \int_\Omega |\nabla[u(x) + t(v(x) - u(x))]|^2 \, d\,x, \qquad 0 \le t \le 1,$$

визначена і досягає локальний мінімум при $t = 0$, тому (як в теоремі 2.5) маємо

$$\int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) - \nabla u(x) \rangle \, d\,x \ge 0 \qquad\qquad \forall\, v \in K,$$

яке називається *варіаційною нерівністю із перешкодою.*

Задача про мінімальну поверхню. Нехай $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ і K як в попередньому прикладі. Розглянемо задачу оптимізації:

$$f(v) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla v(x)|^2} \, d\,x \; \to \inf, \qquad v \in K. \tag{2.10}$$

Це задача про знаходження функції $u \in K$, графік якої є мінімальною поверхнею серед всіх поверхонь графіків функцій $v \in K$.

Припустимо, що розв'язок $u \in K$ задачі (2.10) існує. Тоді відповідна варіаційна нерівність має вигляд

$$\text{знайти} \quad u \in K \; : \qquad \int_\Omega \frac{\langle \nabla u(x), \nabla v(x) - \nabla u(x) \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \, d\,x \ge 0 \qquad \forall\, v \in K.$$

3. Простори Соболєва.

B3.1. Відкрита обмежена зв'язна підмножина $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ називається *областю* у $\mathbf{R}^n$. Замикання області Ω в $\mathbf{R}^n$ позначається $\overline{\Omega}$ (і є компактною множиною), а

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$$

називається *межею* цій області.

Визначимо на лінійному просторі $C^1(\overline{\Omega}) = \{\, v \in C^0(\overline{\Omega}) : \nabla v \in C^0(\overline{\Omega})^n \,\}$ норми

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \Big(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)^n} \Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при} \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_{W^{1,\infty}} = \max\big\{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \big\} \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

B3.2. Поповнення нормованого простору $(C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \qquad \text{при} \qquad 1 \le p \le \infty$$

та називається простором *Соболєва першого порядку* інтегрованих у ступені p (класів еквівалентних) функцій на Ω. Зокрема, для елементів із $W^{1,p}(\Omega)$ визначений інтеграл і диференціювання. У відповідності із теоремою.

Теорема 3.3. *Розглянемо оператора градієнта* ∇ *як лінійний оператор із* $(C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ *в* $(L^p(\Omega)^n, \|\cdot\|_{L^p(\Omega)^n})$, $1 \le p \le \infty$. *Тоді* $\nabla \in B(C^1(\overline{\Omega}), L^p(\Omega)^n)$,

$$\exists\, 1 \quad \overline{\nabla} \in B(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n) : \qquad \overline{\nabla}(v) = \nabla(v) \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$$

і

$$\|\,\overline{\nabla}\,\|_{B(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n)} = 1. \qquad \lhd \ \rhd$$

Для цілого $l \ge 1$ визначимо лінійні простори

$$C^l(\overline{\Omega}) = \{\, v \in C^0(\overline{\Omega}) \,:\, \nabla v \in C^0(\overline{\Omega})^n, \ldots, \nabla^l v \in C^0(\overline{\Omega})^{n^l} \,\},$$

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{l=1}^{\infty} C^l(\overline{\Omega})$$

і розглянемо лінійний простір функцій, що є нескінченно диференційованими і мають компактні носії

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\, v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \,:\, \operatorname{supp} v \subset \Omega \,\},$$

де $\operatorname{supp} v = \overline{\{\, x \in \Omega \,:\, v(x) \ne 0 \,\}}$ називається *носієм* функції v.

B3.4. Поповнення нормованого простору $(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \qquad \text{при} \qquad 1 \le p \le \infty.$$

За визначенням, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ є повним підпростором в $W^{1,p}(\Omega)$.

(**Завдання для самостійної роботи:**

1. Нехай $\Omega = \{\, x \in \mathbf{R}^n \, : \, |x| < 1 \,\}$, $s > 0$ і

$$\psi(x) = |x|^{-s}.$$

Перевірити, що

$$\psi \in L^p(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad p\, s < n \qquad \text{і} \qquad \psi \in W^{1,p}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad p\,(s+1) < n\,.$$

2. Нехай $\Omega = \{\, x \in \mathbf{R}^n \, : \, |x| < 1 \,\}$ і

$$u(x) = \frac{x}{|x|}\,.$$

Перевірити, що $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)^n$ при $1 \le p < n$.)

4. Задача із перешкодою.

При $p=2$ простір $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ є гільбертовим із скалярним добутком

$$(u,v)_{W^{m,p}(\Omega)} = \int_\Omega u\,\overline{v}\,d\,x + \int_\Omega (\nabla u, \nabla \overline{v})\,d\,x,$$

де зазвичай пишуть ∇ замість $\overline{\nabla}$. Такі гільбертові простори позначаються також

$$(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) = (W^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)})$$

і $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) = (W_0^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)})$.

Зокрема, простір $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ над $\mathbf{R}$ є гільбертовим із скалярним добутком

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\,v(x)\,d\,x + \int_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))\,d\,x.$$

Теорема 4.1 (нерівність Фрідріхса). *Нехай* $u \in H_0^1(\Omega)$. *Тоді існує постійна* $C = C(\Omega)$ *така, що*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}. \qquad \triangleleft \; \triangleright$$

Із нерівності Фрідріхса випливає, що норми $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ і $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)^n}$ є еквівалентними на $H_0^1(\Omega)$. Дійсно, для $u \in H_0^1(\Omega)$ маємо наступні нерівності

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^n} \le \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^n} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \le$$

$$\le\; (1 + C^2)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^n} = (1 + C^2)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Таким чином, $H_0^1(\Omega)$ можна розглядати із скалярним добутком

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))\,d\,x.$$

В4.2. Нехай $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ є обмеженою областю (зв'язаною відкритою множиною) і $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ така що $\psi \le 0$ на $\partial\Omega$. Визначимо опуклу множину

$$K = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) : \quad v \ge \psi \text{ в } \Omega \quad \text{і} \quad v = 0 \text{ на } \partial\Omega\,\} \subset C^1(\overline{\Omega})$$

і розглянемо задачу оптимізації:

$$f(v) = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,d\,x \;\to \inf, \qquad v \in K, \tag{4.1}$$

яка називається *задачею мінімізації із перешкодою* у класичної постановці.

Припустимо, що розв'язок $u \in K$ задачі (4.1) існує. Тоді функція

$$\Phi(t) = \int_\Omega |\nabla[u(x) + t(v(x) - u(x))]|^2 \, d\, x, \qquad 0 \le t \le 1,$$

визначена і досягає локальний мінімум при $t = 0$, тому маємо нерівність

$$\int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) - \nabla u(x) \rangle \, d\, x \ \ge 0 \qquad\qquad \forall\, v \in K, \tag{4.2}$$

яка називається *варіаційною нерівністю із перешкодою* у класичної постановці. Задачі (4.1) і (4.2) можуть не мати розв'язків. Проте, ці задачі завжди мають розв'язки "в слабкій постановці".

В4.3. Нехай $u \in W^{1,p}(\Omega)$ при $1 \le p \le \infty$ і $E \subset \overline{\Omega}$. Пишуть

$$u \ge 0 \quad \text{на} \quad E \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega),$$

якщо існує послідовність $\{u_n\} \subset C^1(\overline{\Omega})$ така, що

$$u_n \ge 0 \quad \forall\, x \in E \qquad \text{і} \qquad u_n \to u \quad \text{у нормі} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Якщо $-u \ge 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$, тоді пишуть $u \le 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$. Відповідно, якщо $u \ge 0$ і $u \le 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$, тоді пишуть

$$u = 0 \quad \text{на} \quad E \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Нехай $\psi \in H^1(\Omega)$ така що $\psi \le 0$ на $\partial\Omega$ в $H^1(\Omega)$. Визначимо множину

$$K = \{\, v \in H_0^1(\Omega) \; : \quad v \ge \psi \quad \text{в} \quad \Omega \,\} \subset H_0^1(\Omega). \tag{4.3}$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що множина $K \subset H^1(\Omega)$ є повною та опуклою ($a, b \in K,\ \alpha \in [0,1] \ \Rightarrow\ \alpha\, a + (1-\alpha)\, b \in K$).)

Теорема 4.4 ($\exists\, 1$ розв'язку задачі мінімізації з перешкодою). *Нехай множина* $K \subset H_0^1(\Omega)$ *визначена рівністю (4.3). Тоді*

$$\exists\, 1\ u \in K \ : \qquad f(u) = \min_{v \in K} f(v), \qquad f(v) = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, d\, x$$

і $u \in K$ *задовольняє варіаційній нерівності*

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v - \nabla u \rangle \, d\, x \ \ge 0 \qquad\qquad \forall\, v \in K. \tag{4.4}$$

$\triangleleft$ Позначимо через v_k мінімізуючу послідовність, тобто

$$\lim_{k\to\infty} \| v_k \|_{H_0^1(\Omega)} = m = \inf_{v\in K} \| v \|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{4.5}$$

Існування такої послідовності випливає із визначення інфінума. Із закону паралелограма (виконаного у кожному гільбертовому просторі)

$$\| d+b \|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \| d-b \|_{H_0^1(\Omega)}^2 = 2\, \| d \|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\, \| b \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \qquad \forall\, d, b \in H_0^1(\Omega),$$

при $d = v_k$ і $b = v_h$, отримуємо

$$\| v_k - v_h \|_{H_0^1(\Omega)}^2 = 2\, \| v_k \|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\, \| v_h \|_{H_0^1(\Omega)}^2 - 4 \left\| \frac{1}{2}(v_k + v_h) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 .$$

Множина K є опуклою, тому $\frac{1}{2}(v_k + v_h) \in K$ і $m^2 \le \left\| \frac{1}{2}(v_k+v_h) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2$. Отже

$$\| v_k - v_h \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \le 2\, \| v_k \|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\, \| v_h \|_{H_0^1(\Omega)}^2 - 4\, m^2$$

і послідовність $\{v_k\} \subset K$ є фундаментальною через (4.5).

Таким чином

$$\exists\; u \in K \;: \qquad f(u) = \min_{v\in K} \| v \|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \min_{v \in K} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, d\, x.$$

Крім того, для $v \in K$ функція

$$\Phi(t) = \int_\Omega |\nabla[u(x) + t(v(x) - u(x))]|^2 \, d\, x, \qquad 0 \le t \le 1,$$

визначена і досягає локальний мінімум при $t = 0$, тому $u \in K$ задовольняє варіаційний нерівності (4.4).

Нехай $u, \tilde{u} \in K$ розв'язки варіаційної нерівності (4.4), тобто

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v - \nabla u \rangle \, d\, x \ge 0 \qquad\qquad \forall\, v \in K,$$

$$\int_\Omega \langle \nabla \tilde{u}, \nabla \tilde{v} - \nabla \tilde{u} \rangle \, d\, x \ge 0 \qquad\qquad \forall\, \tilde{v} \in K.$$

Обираючи $v = \tilde{u}$ в першій нерівності, $\tilde{v} = u$ в другій нерівності і додаючи ці нерівності, отримуємо

$$\| u - \tilde{u} \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \le 0 \qquad \Rightarrow \qquad u = \tilde{u} \qquad \triangleright$$

Приклад 4.5. Розглянемо розв'язок $u \in K$ варіаційної нерівності (4.4) за додаткових умов $u \in C^2(\overline{\Omega})$ і $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$. Тоді

$$-\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \qquad u = \psi \quad \text{в } \Omega_0,$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

де

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \,:\, u(x) > \psi(x)\} \qquad \text{і} \qquad \Omega_0 = \{x \in \Omega \,:\, u(x) = \psi(x)\}.$$

$\triangleleft$ Нехай $u \in K$ задовольняє (4.4) і $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$. Тоді знайдеться $\alpha \in \mathbf{R}$ таке, що $u(x) - \psi(x) \geq \alpha > 0$ при $x \in \operatorname{supp} \varphi$. Продовжуючи φ нулем на Ω_0, маємо

$$v = u \pm \varepsilon\varphi \geq \psi \quad \text{в} \quad \Omega$$

при $0 < \varepsilon < \alpha\,[\max|\varphi(x)|\,]^{-1}$, тобто $v \in K$.

Обираючи таке $v \in K$ в (4.4), отримуємо

$$\pm\,\varepsilon \int_\Omega (\nabla u, \nabla \varphi)\, dx \,\geq 0 \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$$

або

$$\int_\Omega (-\Delta u)\, \varphi\, dx \,= 0 \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1).$$

Таким чином

$$-\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \qquad u = \psi \quad \text{в } \Omega_0. \qquad\qquad \triangleright$$

Нехай $\psi_1, \psi_2 \in H^1(\Omega) \,:\, \psi_2 \geq \psi_1$ в Ω, $\psi_1 \leq 0$ і $\psi_2 \geq 0$ на $\partial\Omega$ в $H^1(\Omega)$. Визначимо множину

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) \,: \quad \psi_2 \geq v \geq \psi_1 \quad \text{в} \quad \Omega \quad \text{і} \quad v = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega)\}. \tag{4.6}$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що множина $K \subset H_0^1(\Omega)$ є повною та опуклою.)

Повторюючи доведення теореми 4.4, отримуємо наступне твердження.

Теорема 4.6 ($\exists\,1$ розв'язку задачі мінімізації з перешкодами). *Нехай множина $K \subset H_0^1(\Omega)$ визначена рівністю (4.6). Тоді*

$$\exists\,1\ u \in K \,: \qquad f(u) = \min_{v \in K} f(v), \qquad f(v) = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2\, dx \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

Нехай $\psi_1, \psi_2 \in H^1(\Omega)\ :\ \psi_2 \geq \psi_1$ на $\partial\Omega$ в $H^1(\Omega)$. Визначимо множину

$$K = \{v \in H^1(\Omega)\ :\quad \psi_2 \geq v \geq \psi_1 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega)\}. \tag{4.7}$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що множина $K \subset H^1(\Omega)$ є повною та опуклою.)

Повторюючи доведення теореми 4.4, отримуємо також наступне твердження.

Теорема 4.7 ($\exists\, 1$ розв'язку задачі мінімізації з перешкодами на межи). *Нехай множина $K \subset H^1(\Omega)$ визначена рівністю (4.7). Тоді*

$$\exists\, 1\ u \in K\ : \qquad f(u) = \min_{v \in K} f(v), \qquad f(v) = \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla v(x)|^2 + |v(x)|^2 \right) d\,x. \quad \triangleleft\ \triangleright$$

Відзначимо, що теорема може бути не виконаною для $f(v) = \int\limits_{\Omega} |\nabla v(x)|^2\, d\,x$, оскільки таке $f(v)$ не визначає норму на $H^1(\Omega)$.

6. Варіаційні нерівності у гільбертових просторах.

Розглянемо гільбертів простір $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ над $\mathbf{R}$. Відображення

$$a : H \times H \to \mathbf{R}, \qquad u, v \mapsto a(u,v)$$

називається *білінійною формою* на H, якщо $a(u,v)$ неперервна і лінійна по кожному із аргументів. Білінійна форма *симетрична*, якщо

$$a(u,v) = a(v,u) \qquad \forall\, u, v \in H.$$

В6.1. Білінійна форма $a(u,v)$ називається *коерцитивною* на H, якщо

$$\exists\, \alpha > 0 : \qquad a(v,v) \geq \alpha \, \|v\|_H^2 \qquad \forall\, v \in H.$$

З визначень випливає, що білінійна коерцитивна симетрична форма $a(u,v)$ визначає норму $\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}$ на H, еквівалентну нормі $\|v\|_H$.

Кожен лінійний неперервний оператор $A : H \to H^*$ визначає білінійну форму

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle \qquad \forall\, u, v \in H. \tag{6.1}$$

Дійсно, білінійність $a(u,v)$ випливає із лінійності A і білінійності $\langle\cdot,\cdot\rangle$, а неперервність із нерівності

$$|\, a(u,v)\,| = |\langle Au, v\rangle| \leq \|Au\|_{H^*}\|v\|_H \leq \|A\|_{B(H,H^*)}\|u\|_H\|v\|_H.$$

З іншого боку, якщо задана білінійна форма $a(u,v)$ на H, тоді для кожного $u \in H$ відображення

$$v \mapsto a(u,v) \qquad \text{для} \quad v \in H,$$

визначає лінійний неперервний функціонал на H. Тому існує лінійний оператор $A : H \to H^*$, такою що виконана рівність (6.1).

Теорема 6.2 ($\exists\, 1$ розв'язку варіаційної нерівності у гільбертовому простору). *Нехай K є повною опуклою підмножиною гільбертового простору H, $f \in H^*$ і $a(u,v)$ є білінійною коерцитивною формою на H. Тоді*

$$\exists\; 1\; u \in K : \qquad a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \qquad \forall\, v \in K. \tag{6.2}$$

Крім того, відображення $f \mapsto u$ *є ліпшицевим, тобто, якщо* $u, \tilde{u} \in H$ *розв'язки варіаційної нерівності* (v), *відповідні* $f, \tilde{f} \in H^*$, *тоді*

$$\|u - \tilde{u}\|_H \leq (1/\alpha)\|f - \tilde{f}\|_{H^*}. \qquad (6.3)$$

$\triangleleft$ Доведемо спочатку нерівність (6.3). Нехай $u, \tilde{u} \in H$ розв'язки варіаційної нерівності (6.2), відповідні $f, \tilde{f} \in H^*$, тобто

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \qquad \forall\, v \in K,$$

$$a(\tilde{u}, \tilde{v} - \tilde{u}) \geq \langle \tilde{f}, \tilde{v} - \tilde{u} \rangle \qquad \forall\, \tilde{v} \in K.$$

Обираючи $v = \tilde{u}$ в першій нерівності, $\tilde{v} = u$ в другій нерівності і складаючи ці нерівності, отримуємо $a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) \leq \langle f - \tilde{f}, u - \tilde{u} \rangle$. Таким чином, маємо

$$\alpha\, \|u - \tilde{u}\|_H^2 \leq \|f - \tilde{f}\|_{H^*} \|u - \tilde{u}\|_H.$$

Звідки слідує (6.3) і, крім того, єдиність розв'язку варіаційної нерівності (6.2) (якщо цей розв'язок існує). Далі, ототожнюємо H і H^*.

Доведення існування розв'язку ґрунтується на наступних лемах.

Лема 6.3 (про проекцію на опуклу множину) *Нехай* K *є повною опуклою підмножиною* H. *Тоді для кожного* $w \in H$

$$\exists 1\ \mathrm{Pr}_K(w) \in K \ : \quad \|\, w - \mathrm{Pr}_K(w)\, \|_H = \inf_{v \in K} \|\, w - v\, \|_H.$$

Крім того, проекція $\mathrm{Pr}_K(w)$ *елементу* $w \in H$ *на* K *характеризуєтьcя нерівністю*

$$\langle w - \mathrm{Pr}_K(w), v - \mathrm{Pr}_K(w) \rangle \leq 0 \qquad \forall v \in K \qquad (6.4)$$

і задовольняє нерівності $\|\mathrm{Pr}_K(v) - \mathrm{Pr}_K(w)\|_H \leq \|v - w\|_H$.

$\triangleleft\triangleleft$ Доведення цієї леми є аналогічним доведенню теореми 2.8. $\triangleright\triangleright$

Лема 6.4. *Нехай* K *є повною опуклою підмножиною* H *і* $a(u, v)$ *є білінійною коерцитивною формою на* H. *Тоді* $u \in K$ *є розв'язком задачі* (6.2)

$$\Leftrightarrow \qquad u = \mathrm{Pr}_K(u - \gamma(Au - f)), \qquad (6.5)$$

де $\gamma > 0$ *і оператор* $A : H \to H$ *такий, що* $a(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall\, u, v \in H$.

Таким чином, $u \in K$ *є нерухомою точкою оператора*

$$Bu = \mathrm{Pr}_K(u - \gamma(Au - f)). \tag{6.6}$$

$\lhd\lhd$ Визначимо $w = u - \gamma(Au - f)$. В силу (6.4) співвідношення (6.5) еквівалентно тому, що $u \in K$ та

$$\langle (u - \gamma(Au - f)) - u, v - u\rangle \leq 0 \qquad \forall v \in K,$$

тобто $u \in K$ розв'язок варіаційної нерівності (6.2), оскільки $\gamma > 0$. $\rhd\rhd$

Для доведення теореми 6.2 відмітимо, що

$$\|Av - Aw\|_H \leq M\,\|v - w\|_H \qquad \text{і} \qquad -\langle Av - Aw, v - w\rangle \leq -\alpha\,\|v - w\|_H^2, \tag{6.7}$$

де $M = \|A\|_{B(H,H)}$. Таким чином, враховуючи, що

$$\|\mathrm{Pr}_K(v) - \mathrm{Pr}_K(w)\|_H \leq \|v - w\|_H,$$

маємо

$$\|Bv - Bw\|_H^2 \leq \|v - \gamma(Av - f) - w + \gamma(Aw - f)\|_H^2 =$$

$$= \|v - w - \gamma(Av - Aw)\|_H^2 =$$

$$= \|v - w\|_H^2 - 2\,\gamma\langle v - w, Av - Aw\rangle + \gamma^2\|Av - Aw\|_H^2 \leq$$

$$\leq \|v - w\|_H^2 - 2\,\gamma\,\alpha\,\|v - w\|_H^2 + \gamma^2 M^2\|v - w\|_H^2 =$$

$$= (1 - 2\,\gamma\,\alpha + \gamma^2 M^2)\|v - w\|_H^2,$$

де B визначено співвідношенням (6.6). Таким чином, якщо

$$0 < \gamma < 2\,\alpha/M^2,$$

тоді оператор B є стискаючим із постійною стиснення

$$\sqrt{(1 - 2\,\gamma\,\alpha + \gamma^2 M^2)} < 1$$

і теорема 6.2 випливає із теореми Банаха про стискаючі відображення. $\rhd$

Насправді, доведено наступне, більш загальне чим теорема 6.2, твердження.

Теорема 6.5 ($\exists\, 1$ розв'язку варіаційної нерівності у гільбертовому простору). *Нехай K є повною опуклою підмножиною H і відображення $A : H \to H$ задовольняє нерівностям (6.7). Тоді*

$$\exists\ 1\ u \in K\ : \qquad \langle A(u), v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \qquad \forall\, v \in K. \tag{6.8}$$

Крім того, відображення $f \mapsto u$ є ліпшицевим, тобто, якщо $u, \tilde{u} \in H$ розв'язки варіаційної нерівності (6.8), *відповідні $f, \tilde{f} \in H$, тоді*

$$\|u-\tilde{u}\|_H \leq (1/\alpha)\|f-\tilde{f}\|_H. \qquad \triangleleft\ \ \triangleright$$

Нехай $\varphi \in H^1(\Omega)$ така що $\varphi \leq 0$ на $\partial\Omega$. Визначимо множину

$$K = \{v \in H_0^1(\overline{\Omega})\ : \quad v \geq \varphi \ \text{ в }\ \Omega\,\} \ \subset\ H_0^1(\Omega).$$

Таким чином, для $f \in L^2(\Omega)$ із теореми 6.2 випливає, що

$$\exists\ 1\ u \in K\ : \qquad \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla(v-u))\, d\,x\ \geq \int\limits_\Omega f(v-u)\, d\,x \qquad \forall\, v \in K, \tag{6.9}$$

де

$$a(u,v) = \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, d\,x, \qquad \langle f, v\rangle = \int\limits_\Omega f\, v\, d\,x.$$

Крім того, відображення $f \mapsto u$ є ліпшицевим.

Задача (6.9) також називається *варіаційною нерівністю із перешкодою.*

Зокрема, задача оптимізації (із перешкодою):

$$F(v) = \int\limits_\Omega |\nabla v(x)|^2\, d\,x\ - 2\int\limits_\Omega f\, v\, d\,x\ \to\ \min, \qquad v \in K,$$

має розв'язок $u \in K$. Оскільки при $0 \leq t \leq 1$ функція

$$\Phi(t) = \int\limits_\Omega |\nabla[u(x) + t(v(x)-u(x))]|^2\, d\,x - 2\int\limits_\Omega f\,[u(x)+t(v(x)-u(x))]\, d\,x,$$

визначена і досягає локальний мінімум при $t = 0$ та

$$\int\limits_\Omega [\nabla u(x)][\nabla(v(x)-u(x))]\, d\,x\ \geq \int\limits_\Omega f(x)(v(x)-u(x))\, d\,x \qquad \forall\, v \in K.$$

Таким чином, задача із перешкодою має єдиний розв'язок $u \in K$.

7. Варіаційні нерівності у банахових просторах

Теорема 7.1. *Нехай* K *є повною опуклою підмножиною гільбертового простору* H, $f \in H^*$ *і* $a(u,v)$ *є білінійною коерцитивною формою на* H. *Тоді*

$$\exists\, 1\; u \in K : \qquad a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall\, v \in K. \qquad \triangleleft\ \triangleright$$

Теорема 7.2 (Мінті). *Нехай* K *є повною опуклою підмножиною банахового простору* V, $f \in V^*$, $A : V \to V^*$ *є неперервним відображенням, яке монотонне, тобто*

$$\langle A(v) - A(w), v - w \rangle \geq 0 \qquad \forall\, v, w \in V. \tag{7.1}$$

Тоді задача

$$\text{знайти} \quad u \in K : \qquad \langle A(u), v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall\, v \in K \tag{7.2}$$

еквівалентна задачі

$$\text{знайти} \quad u \in K : \qquad \langle A(v), v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall\, v \in K. \tag{7.3}$$

$\triangleleft\,(\Rightarrow)$ Нехай $u \in K$ задовольняє (7.2) $\forall\, v \in K$, тоді

$$\langle A(v), v-u \rangle = \langle A(u), v-u \rangle + \langle A(v) - A(u), v-u \rangle.$$

Використовуючи умову монотонності (7.1) і (7.2), отримуємо

$$\langle A(v), v-u \rangle \geq \langle A(u), v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall\, v \in K,$$

тобто $u \in K$ задовольняє (7.3) $\forall\, v \in K$. $\qquad (\Rightarrow)\triangleright$

$\triangleleft\,(\Rightarrow)$ Нехай $u \in K$ задовольняє (7.3) $\forall\, v \in K$. Фіксуємо $w \in K$, $t \in [0,1]$ та обираємо $v = (1-t)u + tw = u + t(w-u)$ в (7.3), тоді

$$\langle A(v), v-u \rangle = \langle A(u + t(w-u)), t(w-u) \rangle$$

$$= t\langle A(u + t(w-u)), w-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle = t\langle f, w-u \rangle.$$

Таким чином, при $t > 0$ маємо

$$\langle A(u + t(w-u)), w-u \rangle \geq \langle f, w-u \rangle \qquad \forall\, w \in K$$

і обчислюючи $\lim_{t \to 0+}$ отримуємо, що $u \in K$ задовольняє (7.2) $\forall\, w \in K$. $(\Rightarrow)\triangleright$

Теорема 7.3. *Нехай K є повною опуклою підмножиною банахового простору V, $f \in V^*$, $A : V \to V^*$ є неперервним монотонним відображенням.*

Тоді множина розв'язків задачі (еквівалентній задаче (7.2)):

$$\text{знайти} \quad u \in K \ : \qquad \langle A(v), v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall\, v \in K \tag{7.3}$$

є повною та опуклою.

◁ Нехай $u_1, u_2 \in K$ розв'язки задачі (7.3). Тоді для

$$u = tu_1 + (1-t)u_2 \in K$$

при $t \in [0,1]$ маємо

$$\langle A(v), v-u \rangle = \langle A(v), t(v-u_1) + (1-t)(v-u_2) \rangle \ =$$

$$= \ t\langle A(v), v-u_1 \rangle + (1-t)\langle A(v), v-u_2 \rangle \ \geq$$

$$\geq \ t\langle f, v-u_1 \rangle + (1-t)\langle f, v-u_2 \rangle \ =$$

$$= \langle f, t(v-u_1) + (1-t)(v-u_2) \rangle \ = \langle f, v-u \rangle \qquad \forall\, v \in K,$$

тобто множина розв'язків задачі (7.3) є опуклою.

Нехай $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$ послідовність розв'язків задачі (7.3) і $u_m \to u$ в V. Тоді $u \in K$, оскільки K є повним, і

$$\langle A(v), v-u_m \rangle \geq \langle f, v-u_m \rangle \qquad \forall\, v \in K.$$

Обчислюючи $\lim_{m\to\infty}$ в цій нерівності для кожного $v \in K$, отримуємо

$$\langle A(v), v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \qquad \forall\, v \in K,$$

тобто множина розв'язків задачі (7.3) є повною. ▷

В7.4. Послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *слабко збіжною* до $x \in L$ (позначення $x_k \rightharpoonup x$), якщо

$$\langle f, x_k \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \text{при} \quad k \to \infty \qquad \forall\, f \in L^* = B(L, \mathbf{C}).$$

Теорема 7.5 (про слабку компактність). *Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є рефлексивний простір і послідовність $\{x_k\}_{m=1}^{\infty} \subset L$ така, що*

$$\|x_m\|_L \leq M \quad \text{для деякого} \quad M \in \mathbf{R}.$$

Тоді існують $x \in L$ *і підпослідовність* $\{x_{\widetilde{m}}\}_{\widetilde{m}=1}^{\infty} \subset \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L$ *такі, що*

$$x_{\widetilde{m}} \rightharpoonup x. \qquad \triangleleft \ \triangleright$$

Нехай K є повною опуклою підмножиною у рефлексивному банаховому простору V. Припустимо, що існує неперервне обмежене монотонне відображення $B : V \to V^*$ таке, що

$$B(v) = \theta \quad \Leftrightarrow \quad v \in K.$$

Таке відображення називається *оператором штрафу* (відповідним $K \subset V$).

Якщо V гільбертів простір, тоді, наприклад, $B(v) = v - \mathrm{Pr}_K(v)$ для $v \in V$.

Для $f \in V^*$ і кожного $\varepsilon > 0$ розглянемо задачу (з штрафом)

$$\text{знайти} \quad u_\varepsilon \in V \ : \qquad \langle A(u_\varepsilon) + \varepsilon^{-1} B(u_\varepsilon), v\rangle = \langle f, v\rangle \qquad \forall\, v \in V, \tag{7.4}$$

тобто знайти $u_\varepsilon \in V$:

$$A(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} B(u_\varepsilon) = f \quad \text{в} \quad V^*.$$

Теорема 7.6 ($\exists$ для варіаційної нерівності у банаховому простору). *Нехай* K *є повною опуклою підмножиною сепарабельного банахового рефлексивного простору* V, $\theta \in K$, *існує оператор штрафу* $B : V \to V^*$, $f \in V^*$ *та* $A : V \to V^*$ *є неперервним обмеженим монотонним відображенням таким, що*

$$\lim_{\|v\|_V \to \infty} \frac{\langle A(v), v\rangle}{\|v\|_V} \to \infty$$

(умова коерцитивності).

Тоді для кожного $\varepsilon > 0$

$$\exists\, u_\varepsilon \in V \ : \qquad \langle A(u_\varepsilon) + \varepsilon^{-1} B(u_\varepsilon), v\rangle = \langle f, v\rangle \qquad \forall\, v \in V,$$

існують $u \in V$ *і підпослідовність* $\{u_{\widetilde{\varepsilon}}\} \subset \{u_\varepsilon\} \subset V$ *такі, що*

$$u_{\widetilde{\varepsilon}} \rightharpoonup u \quad \textit{при} \quad \widetilde{\varepsilon} \to 0$$

та

$$\langle A(u), v - u\rangle \geq \langle f, v - u\rangle \qquad \forall\, v \in K. \tag{7.5}$$

◃ Відображення $B_\varepsilon = A + \varepsilon^{-1}B$ є неперервним обмеженим і монотонним для кожного $\varepsilon > 0$, оскільки такі A і B. Крім того, B_ε є коерцитивним. Дійсно

$$\langle B_\varepsilon(v), v\rangle = \langle A(v), v\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle B(v) - B(\theta), v - \theta\rangle \geq \langle A(v), v\rangle,$$

оскільки B є монотонним (і $B(\theta) = \theta$ для $\theta \in K$), тому

$$\frac{\langle B_\varepsilon(v), v\rangle}{\|v\|_V} \geq \frac{\langle A(v), v\rangle}{\|v\|_V} \to \infty \quad \text{при} \quad \|v\|_V \to \infty.$$

Таким чином, для кожного $\varepsilon > 0$ існує розв'язок $u_\varepsilon \in V$ задачі (7.4) через теорему 7.8 (яка наведена надалі). Для кожного $\varepsilon > 0$ також маємо

$$\langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon\rangle \leq \langle B_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon\rangle = \langle f, u_\varepsilon\rangle \leq \|f\|_{V^*}\|u_\varepsilon\|_V$$

або

$$\frac{\langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon\rangle}{\|u_\varepsilon\|_V} \leq \|f\|_{V^*}.$$

Це означає, що існує $M > 0$ таке, що $\|u_\varepsilon\|_V \leq M$. Тоді через теорему 7.5 існують $u \in V$ і підпослідовність $\{u_{\widetilde{\varepsilon}}\} \subset \{u_\varepsilon\} \subset V$ такі, що

$$u_{\widetilde{\varepsilon}} \rightharpoonup u \quad \text{при} \quad \widetilde{\varepsilon} \to 0.$$

Із (7.4) випливає, що

$$B(u_{\widetilde{\varepsilon}}) = \widetilde{\varepsilon}(f - A(u_{\widetilde{\varepsilon}}))$$

де послідовність $\{A(u_{\widetilde{\varepsilon}})\}$ обмежена, оскільки відображення A обмежене. Тому

$$B(u_{\widetilde{\varepsilon}}) \to \theta \quad \text{при} \quad \widetilde{\varepsilon} \to 0.$$

Для $v \in V$ використовуючи монотонність B, маємо

$$\langle B(v) - B(u_{\widetilde{\varepsilon}}), v - u_{\widetilde{\varepsilon}}\rangle \geq 0$$

і обчислюючи $\lim_{\widetilde{\varepsilon}\to 0}$ отримуємо

$$\langle B(v), v - u\rangle \geq 0.$$

Виберемо $v = u \pm tw$ в цій нерівності при $t > 0$ і $w \in V$. Тоді

$$\pm\langle B(u \pm tw), w\rangle \geq 0 \qquad \forall\, w \in V$$

і враховуючи неперервність укладаємо, що $\langle B(u), w\rangle = 0 \Leftrightarrow B(u) = \theta \Leftrightarrow u \in K$.

Для $v \in K$ використовуючи монотонність A і B, маємо

$$\langle A(v) - f, v - u_{\widetilde{\varepsilon}}\rangle = \langle A(v) - A(u_{\widetilde{\varepsilon}}), v - u_{\widetilde{\varepsilon}}\rangle + \langle A(u_{\widetilde{\varepsilon}}) - f, v - u_{\widetilde{\varepsilon}}\rangle =$$

$$= \langle A(v) - A(u_{\widetilde{\varepsilon}}), v - u_{\widetilde{\varepsilon}}\rangle + \frac{1}{\widetilde{\varepsilon}}\langle B(v) - B(u_{\widetilde{\varepsilon}}), v - u_{\widetilde{\varepsilon}}\rangle \geq 0$$

та обчислюючи $\lim_{\widetilde{\varepsilon}\to 0}$ отримуємо

$$\langle A(v) - f, v - u\rangle \geq 0 \qquad \forall\, v \in K,$$

тобто $u \in K$ задовольняє (7.5) через теорему 7.2. $\triangleright$

Крім того, якщо A є строго монотонним, тобто

$$\langle A(v) - A(w), v - w\rangle > 0 \qquad \forall\, v, w \in V \quad \text{при} \quad v \neq w,$$

тоді елементи u_ε (для кожного ε) і u в теоремі 7.6 визначені однозначно та

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Приклад 7.7. Нехай Ω є областю, $V = H_0^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ і

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : \quad v \geq 0 \ \text{в} \ \Omega\} \subset H_0^1(\Omega).$$

Тоді можна вибрати оператор штрафу таким чином

$$\langle B(v), w\rangle = -\int\limits_\Omega v^-(x)w(x)\,d\,x,$$

де $v^-(x) = -\min\{v(x), 0\}$. Відповідно, задача (7.4) має вигляд

$$\text{знайти } u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) : \quad \int\limits_\Omega (\nabla u_\varepsilon, \nabla v)\,d\,x - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Omega u_\varepsilon^- v\,d\,x = \int\limits_\Omega f v\,d\,x \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

і еквівалентна задаче: знайти $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$:

$$-\Delta u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon^- = f \quad \text{в} \ H^{-1}(\Omega), \qquad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \ \partial\Omega \quad \text{в} \ H^1(\Omega).$$

Теорема 7.8 ($\exists$ для варіаційної рівності у банаховому простору). *Нехай V є сепарабельним банаховим рефлексивним простором, $f \in V^*$ та $A : V \to V^*$ є неперервним обмеженим монотонним коерцитивним відображенням.*

Тоді $\exists\, u \in V$:

$$\langle A(u), v\rangle = \langle f, v\rangle \qquad \forall\, v \in V. \tag{7.6}$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що задача (7.6) еквівалентна задаче: знайти $u \in V$:

$$\langle A(v), v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \qquad \forall\, v \in V. \tag{7.7)}$$

$\triangleleft$ Існують лінійно незалежні $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset V$ такі, що простір

$$\widetilde{V} = \{\, v \in V \,:\, v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i, \quad \forall\, \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad \forall\, m \in \mathbf{N}\,\}$$

є щільним в V.

Фіксуємо ціле $m > 0$ і визначимо скінченновимірний лінійний простір

$$V_m = \{\, v \in V \,:\, v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R}\,\}.$$

Розглянемо наступну задачу : знайти $u_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^m w_i \in V_m$ таке, що

$$\langle A(v), v-u_m\rangle \geq \langle f, v-u_m\rangle \qquad \forall\, v \in V_m. \tag{7.8}$$

Така задача є варіаційною нерівністю в $\mathbf{R}^m$ і тому існування $u_m \in V_m$ відоме.

Через теорему 7.2 ця задача еквівалентна задачі : знайти $u_m \in V_m$ таке, що

$$\langle A(u_m), v-u_m\rangle \geq \langle f, v-u_m\rangle \qquad \forall\, v \in V_m.$$

Звідки при $v = \theta$ отримуємо

$$\langle A(u_m), u_m\rangle \leq \langle f, u_m\rangle \leq \|f\|_{V^*}\|u_m\|_V.$$

Це означає, що існує $M > 0$ таке, що $\|u_m\|_V \leq M$. Тоді через теорему 7.5 існують $u \in V$ і підпослідовність $\{u_{\widetilde{m}}\} \subset \{u_m\} \subset V$ такі, що

$$u_{\widetilde{m}} \rightharpoonup u \quad \text{при} \quad \widetilde{m} \to \infty.$$

Залишається обчислити $\lim_{\widetilde{m}\to\infty}$ в (7.8) і скористатися щільністю $\widetilde{V}$ в V, щоб отримати (7.7). $\triangleright$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що оператор $A = (-\Delta) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, визначений рівністю

$$\langle A(u), v\rangle = -\langle \Delta u, v\rangle = \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, dx$$

для $u, v \in H_0^1(\Omega)$, задовольняє умовам обмеженості, неперервності, монотонності та коерцитивності.**)**

Нехай задано відображення $a(x,\xi) : \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Розглянемо умови коли оператор $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, визначений рівністю

$$\langle A(u), v\rangle = \int_\Omega (a(x, \nabla u(x)), \nabla v(x))\, dx \tag{7.9}$$

для $u, v \in H_0^1(\Omega)$, задовольняє умовам обмеженості, неперервності, монотонності та коерцитивності (тобто умовам теореми 7.6).

Теорема 7.9 (Немицкого). *Нехай* $p, p_1, \ldots, p_m \in \mathbf{R}$ *такі, що* $p \geq 1, p_1 \geq 1, p_2 \geq 1, \ldots, p_m \geq 1$ *і* $a(x,\xi) : \Omega \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ *задовольняє умовам (Каратеодорі):*

(a) *функція* $a(x,\cdot) : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ *неперервна для майже всіх* $x \in \Omega$;

(b) *функція* $a(\cdot,\xi) : \Omega \to \mathbf{R}$ *вимірна для всіх* $\xi \in \mathbf{R}^m$.

Тоді $a(x, u_1(x), \ldots, u_m(x)) \in L^p(\Omega)$ *для* $\forall\ (u_1, \ldots, u_m) \in L^{p_1}(\Omega) \times \ldots \times L^{p_m}(\Omega)$

$$\Leftrightarrow\ \exists\, g \in L^p(\Omega)\ \ i\ \ c \geq 0\ :\quad |a(x,\xi)| \leq g(x) + c\sum_{i=1}^m |\xi_i|^{p_i/p} \tag{7.10}$$

для майже всіх $x \in \Omega$ *і всіх* $\xi = (\xi_1 \ldots \xi_m) \in \mathbf{R}^m$.

Крім того, оператор (Немицкого)

$$a(x, \cdot, \ldots, \cdot) : L^{p_1}(\Omega) \times \ldots \times L^{p_m}(\Omega) \to L^p(\Omega) \tag{7.11}$$

є обмеженим і неперервним, якщо виконано (7.10).

$\triangleleft$ Нехай $(u_1, \ldots, u_m) \in L^{p_1}(\Omega) \times \ldots \times L^{p_m}(\Omega)$. Перевіримо, наприклад, що тоді $a(x, u_1(x), \ldots, u_m(x)) \in L^p(\Omega)$. Відомо і безпосередньо перевіряється, що функція $a(x, u_1(x), \ldots, u_m(x))$ є вимірною. Із (7.10) і відомої нерівності

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m)^p \leq m^{p-1}(\alpha_1^p + \ldots + \alpha_m^p) \qquad (\text{де} \quad \alpha_i \geq 0 \quad \text{і} \quad p \geq 1)$$

маємо

$$|a(x, u_1(x), \ldots, u_m(x))|^p \leq (m+1)^{p-1}|g(x)|^p + c^p(m+1)^{p-1}\sum_{i=1}^m |u_i(x)|^{p_i}.$$

Інтегруючи цю нерівність, отримуємо

$$\|a(x,u_1,\ldots,u_m)\|_{L^p(\Omega)} \le (m+1)^{(p-1)/p}\|g\|_{L^p(\Omega)} + c(m+1)^{(p-1)/p}\sum_{i=1}^{m}\|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i/p} < \infty,$$

тобто оператор Немицкого (7.11) є обмеженим. Доведення зворотного твердження і перевірка неперервності цього оператора є складнішим і громіздким. $\triangleright$

Оператор $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ (визначений в (7.9)), який діє по формулі

$$u \mapsto A(u) = -\mathrm{div}\ (a(x,\nabla u(x)))$$

є неперервним і обмеженим, якщо $a(x,\xi)$ задовольняє умовам Каратеодорі та

$$\exists\ \beta > 0\ :\quad |a(x,\xi)| \le \beta\,|\xi|$$

для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi = (\xi_1 \ldots \xi_n) \in \mathbf{R}^n$.

Дійсно, оператор $(a(x,\nabla(\cdot)) : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)^n$ є неперервним і обмеженим через теорему 7.9. Крім того, відомо, що оператор $(-\mathrm{div}) : L^2(\Omega)^n \to H^{-1}(\Omega)$ є неперервним і обмеженим.

Також, цей оператор є коерцитивним і (строго) монотонним якщо, наприклад

$$\exists\ \alpha > 0\ :\quad (a(x,\xi) - a(x,\zeta), \xi - \zeta) \ge \alpha\,|\xi - \zeta|^2$$

і $a(x,0) = 0$ для майже всіх $x \in \Omega$ та всіх $\xi,\zeta \in \mathbf{R}^m$.

Зокрема, $a(x,\xi) = \xi$ задає оператор $A = (-\Delta) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, визначений рівністю (7.9), який діє по формулі

$$u \mapsto A(u) = -\Delta\, u(x),$$

і є неперервним, обмеженим, коерцитивним та монотонним.

8. Слабо напівнеперервні функціонали

B8.1. Розглянемо послідовність $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$, множина межових точок якої позначається через $\lim \mathrm{Pt}\,\{\alpha_k\}$ (тобто $\alpha_0 \in \lim \mathrm{Pt}\,\{\alpha_k\}$, якщо існує підпослідовність $\{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що $\alpha_l \to \alpha_0$). *Верхня та нижня границі* цієї послідовності визначаються рівностями

$$\limsup_{k\to\infty} \alpha_k = \sup\{\,\alpha : \alpha\in \lim \mathrm{Pt}\,\{\alpha_k\}\}, \quad \liminf_{k\to\infty} \alpha_k = \inf\{\,\alpha : \alpha\in \lim \mathrm{Pt}\,\{\alpha_k\}\}.$$

Відомо і безпосередньо перевіряється, що кожна обмежена послідовність має верхню та нижню границі. Крім того, послідовність $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ є збіжною

$$\Leftrightarrow \qquad \limsup_{k\to\infty} \alpha_k = \liminf_{k\to\infty} \alpha_k.$$

Теорема 8.2 (Банаха-Штейнхауса). *Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормованим простором та $x_k \rightharpoonup x$. Тоді існує стала $C > 0$ така,що*

$$\sup_k \|x_k\|_L \le C. \qquad \triangleleft \ \triangleright$$

Теорема 8.3. *Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормованим простором та $x_k \rightharpoonup x$. Тоді*

$$\|x\|_L \le \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_L. \qquad \triangleleft \ \triangleright$$

Приклад 8.4. Нехай $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L = l^2(\mathbf{R})$ та $x_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots) \in l^2(\mathbf{R})$ має всі елементи $x_k^i = 0$ за виключенням $x_k^k = 1$, тоді $x_k \rightharpoonup 0$. Однак, $\|x_k\|_{l^2(R)} = 1$, тобто така послідовність є слабко збіжною але не є сильно збіжною.

Таким чином, існують слабко збіжні послідовності $x_k \rightharpoonup x$, для яких

$$\|x\|_L < \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_L.$$

З іншого боку, для нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ завжди

$$\|x\|_L = \lim_{k\to\infty} \|x_k\|_L,$$

якщо $x_k \to x$.

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що

$$f_k = \sin(2\pi\, k\, x) \rightharpoonup 0 \qquad \text{в} \qquad L^2(0,1). \text{)}$$

Теорема 8.5 (про сильну напівнеперервність знизу інтегрального функціонала). *Нехай* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *є областю,* $\beta \in \mathbf{R}$ *і функція*

$$h(x,\xi) \,:\, \Omega \times \mathbf{R}^m \to [\beta,\infty]$$

задовольняє умовам опуклості і Каратеодорі :

(a) *функція* $h(x,\cdot)\,:\mathbf{R}^m \to [\beta,\infty]$ *опукла і неперервна для майже всіх* $x \in \Omega$;

(b) *функція* $h(\cdot,\xi)\,:\,\Omega \to [\beta,\infty]$ *вимірна для всіх* $\xi \in \mathbf{R}^m$.

Тоді

$$v_k \to v \;\text{ в }\; L^1(\Omega)^m \quad\Rightarrow\quad \int\limits_\Omega h(x,v(x))\,dx \le \liminf_{k\to\infty}\int\limits_\Omega h(x,v_k(x))\,dx. \quad \lhd\,\rhd \tag{8.1}$$

Співвідношення (8.1) називається умовою *сильної напівнеперервності знизу* інтегрального функціонала (на $L^1(\Omega)^m$). Відповідно, умова (секвенціальної) *слабкої напівнеперервності знизу* інтегрального функціонала (на $L^1(\Omega)^m$) визначається співвідношенням

$$v_k \rightharpoonup v \;\text{ в }\; L^1(\Omega)^m \quad\Rightarrow\quad \int\limits_\Omega h(x,v(x))\,dx \le \liminf_{k\to\infty}\int\limits_\Omega h(x,v_k(x))\,dx. \tag{8.2}$$

Теорема 8.6 (про сильну і слабку напівнеперервність знизу функціонала). *Нехай* B *є нормованим простором і функціонал* $I:\,B \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ *є опуклим. Тоді* I *є сильно напівнеперервним знизу на* B $\Leftrightarrow$

I *є слабо напівнеперервним знизу на* B. $\lhd\,\rhd$

Зокрема, в умовах теореми 8.5 співвідношення (8.1) та (8.2) є еквівалентними.

Теорема 8.7 (про існування мінімуму інтегрального функціонала). *Нехай* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *є областю,* $f \in W_0^{1,p}(\Omega)^*, 1<p<\infty,$ $\beta \in \mathbf{R}$ *і функція*

$$h(x,\xi) \,:\, \Omega \times \mathbf{R}^n \to [\beta,\infty]$$

задовольняє умовам опуклості, Каратеодорі і коерцитивності :

(a) *функція* $h(x,\cdot)\,:\mathbf{R}^n \to [\beta,\infty]$ *опукла і неперервна для майже всіх* $x \in \Omega$;

(b) *функція* $h(\cdot,\xi)\,:\,\Omega \to [\beta,\infty]$ *вимірна для всіх* $\xi \in \mathbf{R}^n$;

(c) *існує* $\alpha \in \mathbf{R}$ *таке, що для майже всіх* $x \in \Omega$ *і всіх* $\xi \in \mathbf{R}^n$ *виконана нерівність*

$$h(x,\xi) \ge \alpha\,|\xi|^p + \beta.$$

Припустимо, що

$$\inf_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v) < \infty,$$

де

$$I(v) = \int_\Omega h(x, \nabla v(x))\, dx - \langle f, v\rangle.$$

Тоді $\exists\, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$I(u) = \inf_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v).$$

$\triangleleft$ Використовуючи умови теореми і коерцитивность функції $h(x,\xi)$, маємо

$$I(v) \ge \alpha\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx + \beta\,\mathrm{mes}\,(\Omega) - \|f\|_{W_0^{1,p}(\Omega)^*}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Тому із нерівності Фрідріхса випливає, що знайдуться $\sigma > 0$ і δ такі, що

$$I(v) \ge \sigma\,\|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \delta \qquad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Розглянемо деяку мінімізуючу послідовність $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ для функціонала I, тобто

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k) = \inf_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v).$$

Існування такої послідовності випливає із визначення інфінума.

Враховуючи припущення $\inf_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v) < \infty$ і збіжність $I(v) \to \infty$ при $\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to \infty$, отримуємо, що послідовність $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою в рефлексивному просторі $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Таким чином, існують $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ і підпослідовність $\{u_l\}_{l=1}^\infty \subset \{u_k\}_{k=1}^\infty$:

$$\nabla u_l \rightharpoonup \nabla u \quad \text{в} \quad L^p(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \nabla u_l \rightharpoonup \nabla u \quad \text{в} \quad L^1(\Omega).$$

Використовуючи теореми 8.5 і 8.6, отримуємо

$$\int_\Omega h(x, \nabla u(x))\, dx \le \liminf_{l\to\infty} \int_\Omega h(x, \nabla u_l(x))\, dx.$$

Крім того, за визначенням (слабкій збіжності) маємо

$$\langle f, u_l\rangle \to \langle f, u\rangle.$$

Отже,

$$\inf_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v) \le I(u) \le \liminf_{l\to\infty} I(u_l) = \lim_{k\to\infty} I(u_k) = \inf_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v)$$

і тому $I(u) = \inf_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v)$. $\triangleright$

Нехай функція

$$h(x,\xi) : \Omega \times \mathbf{R}^{n\times m} \to [\beta, \infty]$$

задовольняє всім умовам теореми 8.7 за виключенням умови опуклості, тоді функціонал

$$I(v) = \int_\Omega h(x, \nabla v(x))\, dx$$

є слабо напівнеперервним знизу на $W_0^{1,p}(\Omega)^m$ $\Leftrightarrow$ виконана умова

$$\int_\Omega h(x, \xi + \nabla\varphi(x))\, dx \ge \int_\Omega h(x,\xi)\, dx \qquad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^{n\times m}, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^m,$$

яка називається умовою *квазіопуклості* функції $h(x,\xi)$.

9. Усереднення варіаційних нерівностей

Нехай для $n \geq 1$ задані обмежена область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ із ліпшицевою границею $\partial\Omega$, функція $f \in L^2(\Omega)$ та послідовність функцій $\{\psi_\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega)$, що залежить від малого додатного параметра ε і рівномірно обмежена щодо цього параметра, тобто

$$\|\psi_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$$

із сталою C, що не залежить від ε, при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для деякого додатного ε_0.

Розглянемо наступну задачу с малим параметром ε щодо функції $\hat{u}_\varepsilon \in \mathrm{K}_\varepsilon$:

$$\int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla\hat{u}_\varepsilon\right)(\nabla\hat{v} - \nabla\hat{u}_\varepsilon)\,dx \geq \int_\Omega f\,(\hat{v} - \hat{u}_\varepsilon)\,dx$$

$$\forall\,\hat{v} \in \mathrm{K}_\varepsilon \equiv \{\hat{v} \in H_0^1(\Omega) : \hat{v} \geq \psi_\varepsilon \quad \text{в} \quad H^1(\Omega)\}, \tag{9.1}$$

де вектор-функція $a(y,\xi)$ є 1-періодичною по $y \in \mathbf{R}^n$ для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$. Отже, $a(y,\xi)$ для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$ цілком визначається своїм обмеженням на комірку періодичності $Y = [0,1]^n$.

Припускається, що $a(y,\xi)$ для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$ є вимірною на Y, $a(y,0) = 0$ та

$$0 < (a(y,\xi) - a(y,\zeta))(\xi - \zeta) \quad \text{для} \quad \xi \neq \zeta,$$

$$\alpha\,|\xi|^2 \leq a(y,\xi)\,\xi, \qquad |a(y,\xi) - a(y,\zeta)| \leq \beta\,|\xi - \zeta| \tag{9.2}$$

$$\text{для кожного } \xi, \zeta \in \mathbf{R}^n \text{ м. с. в } Y,$$

де α та β є заданими додатними сталими.

Таким чином, існує єдиний (для фіксованого ε) розв'язок варіаційної нерівності (9.1) та за допомогою заміни $\hat{u}_\varepsilon = u_\varepsilon + \psi_\varepsilon$, $\hat{v} = v + \psi_\varepsilon$ ця нерівність еквівалентна варіаційний нерівності для $u_\varepsilon \in \mathrm{K}$:

$$\int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla\psi_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon\right)(\nabla v - \nabla u_\varepsilon)\,dx \geq \int_\Omega f\,(v - u_\varepsilon)\,dx \tag{9.3}$$

$$\forall\,v \in \mathrm{K} \equiv \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq 0 \quad \text{в} \quad H^1(\Omega)\}.$$

За теоремою Мінті ця нерівність еквівалентна варіаційний нерівності для $u_\varepsilon \in \mathrm{K}$:

$$\int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla\psi_\varepsilon + \nabla v\right)(\nabla v - \nabla u_\varepsilon)\,dx \geq \int_\Omega f\,(v - u_\varepsilon)\,dx \quad \forall\,v \in \mathrm{K}. \tag{9.4}$$

Теорема 9.1 (про рівномірну обмеженість). *Нехай* $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ *є розв'язком варіаційної нерівності (9.3) для фіксованого* ε. *Тоді*

$$\| u_\varepsilon \|_{H_0^1(\Omega)} \le C$$

із сталою C*, що не залежить від* ε*, при* $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ *для деякого додатного* ε_0.

$\triangleleft$ Обираючи $v = 0$ в (9.3) та додаючи відповідні інтеграли, маємо

$$\alpha \, \| \nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega)^n} \le C \, \| f \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla u_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)^n} +$$

$$+ \beta \, \| \nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)^n} \| \nabla \psi_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)^n}$$

та

$$\| \nabla u_\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega)^n} \le C \left(\| f \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \nabla \psi_\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega)^n} \right),$$

із сталою С, що не залежить від ε, оскільки $\|\nabla u_\varepsilon\| - \|\nabla \psi_\varepsilon\| \le \|\nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\|$. $\triangleright$

Теорема 9.2. *Нехай* $b(u, v)$ *є білінійною формою на гільбертовому просто-ру* H, $v_\varepsilon \to v$ *і* $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* H *(при* $\varepsilon \to 0$*). Тоді*

$$b(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \to b(v, u). \qquad \triangleleft \ \triangleright$$

Із теорем 7.5, 9.1 і 9.2 одразу отримуємо наступне просте твердження.

Теорема 9.3 (про збіжність). *Нехай* $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ *є розв'язком варіаційної нерівності (9.3) для фіксованого* ε, $a(y, \xi) = a(\xi)$ *не залежить від* $y \in Y$ *при* $\xi \in \mathbf{R}^n$ *та* $\psi_\varepsilon \to \psi_0$ *в* $H_0^1(\Omega)$. *Тоді*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \qquad \text{в} \qquad H_0^1(\Omega),$$

де $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *є розв'язком наступної варіаційної нерівності для* $u_0 \in \mathrm{K}$:

$$\int_\Omega a\,(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)\,(\nabla v - \nabla u_0)\, dx \ge \int_\Omega f\,(v - u_0)\, dx \qquad \forall\, v \in \mathrm{K}.$$

$\triangleleft$ Дійсно, із теорем 7.5 та 9.1 випливає, що існують $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ та підпослідовність $\{u_{\tilde\varepsilon}\} \subset H_0^1(\Omega)$ таки, що

$$u_{\tilde\varepsilon} \rightharpoonup u_0.$$

Таким чином, використовуючи теорему 9.2 та обчислюючи границю в (9.4), отримуємо потрібну нерівність варіаційну за теоремою Мінті. $\triangleright$

Область Ω є обмеженою. Тому, можна вважати, що існує $l > 0$ таке, що

$$\Omega \subset [0, \varepsilon m]^n \subset [0, l]^n$$

для фіксованих ε та цілого m.

Лема 9.4. *Для функції $U \in L^2(Y)$, подовженої по періодичності на $\mathbf{R}^n$, та функції $v \in H_0^2(\Omega)$, виконується нерівність*

$$\left| \int\limits_{\Omega} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x)\, dx - \int\limits_{Y} U(y)\, dy \int\limits_{\Omega} v(x)\, dx \right| \leq \varepsilon^2\, l^n \|U\|_{L^2(Y)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}.$$

$\triangleleft$ Визначимо $M(y) \in H^2_{pe*}(Y)$ як розв'язок рівняння

$$\Delta_y M(y) = U(y) - \int_Y U(y)\, dy$$

та подовжимо $M(y)$ по періодичності. Враховуючи, що

$$\varepsilon^2 \Delta_x M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \Delta_y M(y)\big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} = U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \int_Y U(y)\, dy,$$

отримаємо

$$\int_\Omega U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x)\, dx - \int_Y U(y)\, dy \int_\Omega v(x)\, dx =$$

$$= \varepsilon^2 \int_\Omega \Delta_x M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x)\, dx = \varepsilon^2 \int_\Omega M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta v(x)\, dx.$$

Таким чином, використовуючи нерівність Коші-Буняковського-Шварца, маємо

$$\left| \int\limits_{\Omega} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x)\, dx - \int\limits_{Y} U(y)\, dy \int\limits_{\Omega} v(x)\, dx \right| \leq \varepsilon^2\, \|M^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}.$$

та

$$\|M^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int\limits_{[0,\,\varepsilon m]^n} M^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon^n \int\limits_{[0,\,m]^n} M^2(y)\, dy = \varepsilon^n m^n\, \|M\|^2_{L^2(Y)} \leq l^n \|U\|^2_{L^2(Y)}$$

для $M^\varepsilon = M(x/\varepsilon)$, оскільки відомо, що $\|M\|^2_{L^2(Y)} \leq \|U\|^2_{L^2(Y)}$. $\triangleright$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що для $U \in L^2(Y)$, подовженої по періодичності на $\mathbf{R}^n$, та $v \in H_0^1(\Omega)$, виконується нерівність

$$\left| \int\limits_{\Omega} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x)\, dx - \int\limits_{\Omega} \int\limits_{Y} U(y)\, v(x)\, dy dx \right| \leq \varepsilon\, l^n \|U\|_{L^2(Y)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \quad)$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що для $U \in L^2(Y)$, подовженої по періодичності на $\mathbf{R}^n$, та $v \in L^2(\Omega)$ виконується співвідношення

$$\int\limits_\Omega U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x)\, dx \to \int\limits_\Omega \int\limits_Y U(y)\, v(x)\, dy dx \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to 0,$$

тобто

$$U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \int\limits_Y U(y)\, dy \qquad \text{в} \qquad L^2(\Omega). \quad)$$

В9.5. Послідовність $\{v_\varepsilon(x)\} \subset L^2(\Omega)$ називається *двомасштабно збіжною* до $v_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$ (позначення $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$) при $\varepsilon \to 0$, якщо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega v_\varepsilon(x)\, \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_\Omega \int_Y v_0(x,y)\, \varphi(x,y)\, dy\, dx \tag{9.5}$$

для кожного $\varphi \in L^2_{per}(Y; C(\overline{\Omega}))$. Тут і надалі індекс per означає 1-періодичність по $y \in \mathbf{R}^n$, а включення $\varphi \in L^2_{per}(Y; C(\overline{\Omega}))$ означає, що обмеження $\varphi(x,y)$ на Y належить $L^2(Y; C(\overline{\Omega}))$. Зокрема, для $\varphi \in L^2_{per}(Y; C(\overline{\Omega}))$ маємо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_\Omega \int_Y \varphi(x,y)\, dy\, dx.$$

Крім того, відомо, що для $\varphi \in L^2_{per}(Y; C(\overline{\Omega}))$ виконуються співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx = \int_\Omega \int_Y \varphi(x,y)^2\, dy\, dx$$

та

$$\int_\Omega \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx \le \int_\Omega \int_Y \varphi(x,y)^2\, dy\, dx.$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити наступне твердження: якщо $v_\varepsilon \to v$ в $L^2(\Omega)$, тоді

$$v_\varepsilon \xrightarrow{2} v. \quad)$$

Теорема 9.6 (про двомасштабну компактність в $L^2(\Omega)$). *Нехай $\{v_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$ є рівномірно обмеженою послідовністю. Тоді існують $v_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$ та підпослідовність $\{v_{\widetilde{\varepsilon}}\} \subset L^2(\Omega)$ таки, що*

$$v_{\widetilde{\varepsilon}} \xrightarrow{2} v_0$$

та $v_{\widetilde{\varepsilon}} \rightharpoonup v = \int\limits_Y v_0(x,y)\, dy$ в $L^2(\Omega)$. ◁ ▷

Визначимо простір дійснозначних тригонометричних поліномів рівністю

$$\mathrm{Trig}_*(Y) = \{\, u = \sum_{m\in Z^n\setminus\{0\}:\ |m|\le M} \alpha_m\, e^{(x,m)\,2\pi i} \ :\ \alpha_m = \overline{\alpha}_{-m} \quad \forall\, m \in\ Z^n_*\}$$

та простір $C^\infty_{0pe*}(\Omega\times Y)$ як множину скінчених лінійних комбінацій функцій виду $v = v_0(x)\cdot v_p(y)$, де $v_0(x) \in C^\infty_0(\Omega)$ і $v_p(y) \in \mathrm{Trig}_*(Y)$. Аналогічно, замінюючи $\mathrm{Trig}_*(Y)$ на $\mathrm{Trig}(Y)$, визначимо простір $C^\infty_{0per}(\Omega\times Y)$.

Відомо, що $C^\infty_0(\Omega)$ щільно в $L^2(\Omega)$ і $H^1_0(\Omega)$. Крім того, $C^\infty_{0pe*}(\Omega\times Y)$ щільно в $L^2(\Omega; H^1_{pe*}(Y))$ і $L^2(\Omega; L^2_*(Y)) = L^2(\Omega; H^0_{pe*}(Y))$ та $C^\infty_{0per}(\Omega\times Y)$ щільно в $L^2(\Omega; L^2(Y)) = L^2(\Omega\times Y)$.

Теорема 9.7 (про двомасштабну компактність в $H^1_0(\Omega)$). *Нехай* $\{\, v_\varepsilon\} \subset H^1_0(\Omega)$ *є рівномірно обмеженою послідовністю. Тоді знайдуться таки* $u_0\,(x) \in H^1_0(\Omega)$ *та* $u_1\,(x,y) \in L^2(\Omega; H^1_{pe*}(Y))$, *що (після виділення підпослідовності при* $\varepsilon\to 0$*)*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \qquad \text{в} \quad H^1_0(\Omega) \qquad i \qquad \nabla\, u_\varepsilon \xrightarrow{\ 2\ } \nabla\, u_0 + \nabla_y\, u_1.$$

$\lhd$ Із теорем 7.5 і 9.6 випливає, що існують $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ та $u_g(x,y) \in L^2(\Omega\times Y)$ таки, що

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \qquad \text{в} \quad H^1_0(\Omega) \qquad i \qquad \nabla\, u_\varepsilon \xrightarrow{\ 2\ } u_g\,.$$

Визначаючи $\widehat{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$, можна вважати, що $u_\varepsilon \rightharpoonup 0$ в $H^1_0(\Omega)$ і $\int_Y u_g(x,y)dy = 0$.

Нехай $\varphi(x,y) \in C^\infty_{0pe*}(\Omega\times Y)^n$, тоді

$$\varepsilon\,\mathrm{rot}\,(\, w(x,x/\varepsilon)\,) = (\,\mathrm{rot}_y\, w(x,y) + \varepsilon\,\mathrm{rot}_x\, w(x,y)) \quad \text{для} \quad y = x/\varepsilon$$

та

$$0 = \varepsilon\int_\Omega (\nabla\, u_\varepsilon)\,\mathrm{rot}\,(\, w(x,x/\varepsilon)\,)\, d\,x \ \to \int_\Omega\int_Y (u_g)\,\mathrm{rot}_y\, w(x,y)\, d\,y\, d\,x$$

за визначенням двомасштабної збіжності (9.5). Таким чином, $\mathrm{rot}_y\, u_g(x,y) = 0$ та із теореми Вейля випливає, що знайдеться $u_1\,(x,y) \in L^2(\Omega; H^1_{pe*}(Y))$ таке, що

$$u_g(x,y) = \nabla_y\, u_1(x,y). \qquad \rhd$$

Теорема 9.8. *Нехай* $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$ *є розв'язком варіаційної нерівності (9.3). Тоді знайдуться такі* $\psi_0,\ u_0 \in H^1_0(\Omega)$ *і* $\psi_1,\ u_1 \in L^2(\Omega; H^1_{pe*}(Y))$, *що*

$$\psi_\varepsilon \rightharpoonup \psi_0\,, \qquad u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \qquad \text{в} \quad H^1_0(\Omega)\,,$$

$$\nabla\psi_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla\psi_0 + \nabla_y\psi_1\,, \qquad \nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla u_0 + \nabla_y u_1$$

та $u_0 \geq 0$ *в* $H^1(\Omega)$ *(після виділення підпослідовностей при* $\varepsilon \to 0$*).*

$\triangleleft$ Ця теорема випливає із теорем 9.1 та 9.7. $\triangleright$

Теорема 9.9. *Нехай* H *є гільбертовим простором. Тоді*

$$v_\varepsilon \to v \qquad \Leftrightarrow \qquad i)\quad v_\varepsilon \rightharpoonup v; \qquad ii)\quad \|v_\varepsilon\|_H \to \|v\|_H.$$

$\triangleleft$ Дійсно, $\|v_\varepsilon - v\|_H^2 = \langle v_\varepsilon, v_\varepsilon\rangle - \langle v, v\rangle + \langle v, v\rangle - \langle v, v_\varepsilon\rangle + \langle v, v\rangle - \langle v_\varepsilon, v\rangle \to 0.$ $\triangleright$

В9.10. Послідовність $\{v_\varepsilon(x)\} \subset L^2(\Omega)$ називається *двомасштабно сильно збіжною* до $v_0(x,y) \in L^2(\Omega\times Y)$ (позначення $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$) при $\varepsilon \to 0$, якщо

$$v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0 \qquad \text{та} \qquad \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \to \|v_0\|_{L^2(\Omega\times Y)}.$$

Теорема 9.11 (про двомасштабну сильну збіжність). *Нехай послідовність* $\{v_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$ *така, що* $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$ *та* $v_0 \in C^\infty_{0per}(\Omega\times Y)$*. Тоді*

$$\|\, v_\varepsilon(x) - v_0(x, x/\varepsilon)\,\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

$\triangleleft$ Дійсно, за визначенням 9.5 маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \|\, v_\varepsilon(x) - v_0(x,x/\varepsilon)\,\|^2_{L^2(\,\Omega\,)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (v_\varepsilon(x) - v_0(x,x/\varepsilon))^2\,dx\ =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \bigl(v_\varepsilon(x)^2 - 2\,v_\varepsilon(x)\,v_0(x,x/\varepsilon) + v_0(x,x/\varepsilon)^2\bigr)\,dx =$$

$$= \int_\Omega\int_Y (v_0(x,y)^2 - 2\,v_0(x,y)\,v_0(x,y)\ +\ v_0(x,y)^2)\,dy\,dx\ = 0. \quad \triangleright$$

Насправді ця теорема є вірною при $v_0 \in L^2_{per}(Y; C(\overline{\Omega}\,))$, що випливає із визначення двомасштабної збіжності (9.5).

Теорема 9.12 (про апроксимаційну двомасштабну сильну збіжність). *Нехай послідовність* $\{v_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$ *така, що* $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$*. Тоді знайдеться послідовність* $\{v_0^i\} \subset C^\infty_{0per}(\Omega\times Y)$ *така, що*

$$\lim_{i\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\ \bigl\|\, v_\varepsilon(x) - v_0^i(x,x/\varepsilon)\,\bigr\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

$\triangleleft$ Простір $C^\infty_{0per}(\Omega\times Y)$ є щільним у $L^2(\Omega\times Y)$. Тому знайдеться послідовність $\{v_0^i\} \subset C^\infty_{0per}(\Omega\times Y)$ така, що $\lim_{i\to\infty}\|\, v_0 - v_0^i\,\|_{L^2(\Omega\times Y)} = 0$ та

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \bigl\|\, v_\varepsilon(x) - v_0^i(x,x/\varepsilon)\,\bigr\|^2_{L^2(\,\Omega\,)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \bigl(v_\varepsilon(x) - v_0^i(x,x/\varepsilon)\bigr)^2\,dx\ =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \big(v_\varepsilon(x)^2 - 2\, v_\varepsilon(x)\, v_0^i(x, x/\varepsilon) + v_0^i(x, x/\varepsilon)^2 \big)\, dx =$$

$$= \int_\Omega \int_Y (v_0(x,y)^2 - 2\, v_0(x,y)\, v_0^i(x,y) \,+\, v_0^i(x,y)^2)\, dy\, dx \,=\, \|\, v_0 - v_0^i \,\|^2_{L^2(\Omega\times Y)}. \quad \triangleright$$

Повернемося до задачі (9.4) та припустимо, що ψ_0 і ψ_1 у теоремі 9.8 є визначеними однозначно та

$$\nabla\, \psi_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla\, \psi_0 \,+\, \nabla_y\, \psi_1.$$

Тоді знайдуться послідовності $\{\psi_0^i\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ та $\{\psi_1^i\} \subset C_{0pe*}^\infty(\Omega\times Y)$ такі, що

$$\lim_{i\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \big\|\, \nabla\, \psi_\varepsilon\,(\,x) \,-\, \nabla\, \psi_0^{\,i}\,(\,x) \,-\, (\nabla_y\, \psi_1^{\,i})\,(\,x, x/\varepsilon) \big\|_{L^2(\,\Omega\,)^n} =\, 0. \tag{9.6}$$

Фіксуємо $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ і $v_1 \in C_{0pe*}^\infty(\Omega\times Y)$ такі, що $v_0 \geq 0$ в Ω та визначимо

$$\mathrm{K}_2 \equiv \{\, (w_0\,, w_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{pe*}^1\,(Y)) \;:\; w_0 \geq 0 \;\text{ в }\; H^1(\Omega)\,\}.$$

Тоді $(v_0\,, v_1) \in \mathrm{K}_2$ і знайдеться така постійна δ, що $|\, v_1\,| \leq \delta$ в $\overline{\Omega} \times Y$.

Оберемо для кожного ε невід'ємну функцію $e_\varepsilon \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, рівну нулю при $\mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon$ і одиниці при $\mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon$, де $\mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega)$ позначає відстань від точки x до межі $\partial\Omega$. Для достатньо малих ε $(\leq \varepsilon_{\,0})$ такі функції існують, $|\, \varepsilon\, \nabla\, e_\varepsilon\,| \leq C$ в Ω та носій функції $\nabla\, e_\varepsilon$ міститься в прикордонній смузі $\Omega_{2\varepsilon} \subset \Omega$ ширини 2ε. Отже,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\, \varepsilon\, \nabla\, e_\varepsilon\,\|_{L^2\,(\,\Omega\,)^n} = \lim_{\varepsilon\to 0} \|\, \varepsilon\, \nabla\, e_\varepsilon\,\|_{L^2\,(\,\Omega_{\,2\varepsilon})^n} =\, 0 \tag{9.7}$$

і можна вважати, що $e_\varepsilon \,=\, 1$ на носії функції $v_1\,(x, x/\varepsilon)$. Таким чином, маємо $v_1\,(x, x/\varepsilon) +\, \delta\, e_\varepsilon \geq 0$ в Ω. Обираючи у задачі (9.4) функцію

$$v = v_0(x) +\, \varepsilon\, v_1\,(x, x/\varepsilon) +\, \varepsilon\, \delta\, e_\varepsilon$$

та враховуючи, що

$$\nabla\,(\,\varepsilon\, v_1(x, x/\varepsilon)\,) = (\nabla_y\, v_1(x,y) + \varepsilon\, \nabla_x\, v_1(x,y)) \quad \text{при} \quad y = x/\varepsilon,$$

отримаємо при $(\nabla_y\, v_1)^\varepsilon = (\nabla_y\, v_1)\,(x, x/\varepsilon)$ та $(\nabla_y\, \psi_1^{\,i})^\varepsilon = (\nabla_y\, \psi_1^{\,i})\,(x, x/\varepsilon)$ наступну варіаційну нерівність

$$\int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}\,, \nabla\, \psi_0^{\,i} \,+ (\nabla_y\, \psi_1^{\,i})^\varepsilon +\, \nabla\, v_0 \,+ (\nabla_y\, v_1)^\varepsilon \right) (\,\nabla\, v_0 \,+ (\nabla_y\, v_1)^\varepsilon \,-\, \nabla u_\varepsilon)\, dx \;\geq$$

$$\geq \int_\Omega f\,(v_0 - u_\varepsilon)\,dx + \sigma_\varepsilon^i, \tag{9.8}$$

де $\lim\limits_{i\to\infty}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sigma_\varepsilon^i = 0$ завдяки (9.6) та (9.7).

Враховуючи, що $a\,(y\,,\nabla\,\psi_0^i + \nabla_y\,\psi_1^i + \nabla\,v_0 + \nabla_y\,v_1) \in L_P^2\,(\,Y; C(\overline{\Omega}\,)^n)$ та переходячи до границі, отримаємо варіаційну нерівність для $(u_0\,,u_1) \in \mathrm{K}_2$:

$$\int_\Omega\int_Y a\,(\,y, \nabla\,\psi_0 + \nabla_y\,\psi_1 + \nabla\,v_0 + \nabla_y\,v_1)\,(\,\nabla\,v_0 + \nabla_y\,v_1 - \nabla\,u_0 - \nabla_y\,u_1\,)\,dy\,dx \geq$$

$$\geq \int_\Omega f\,(v_0 - u_0)\,dx\,, \tag{9.9}$$

де $(v_0\,,v_1) \in \mathrm{K}_2$. Перевіряється, що ця нерівність виконана не тільки для гладких та фінітних $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ і $v_1 \in C_{0pe*}^\infty(\Omega\times Y)$, але й для всіх $(v_0\,,v_1) \in \mathrm{K}_2$. Дійсно, для

$$(v_0\,,v_1) \in \mathrm{K}_2 \equiv \{\,(w_0\,,w_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{pe*}^1\,(Y))\ :\ w_0 \geq 0 \ \text{ в } \ H^1(\Omega)\,\}.$$

знайдуться $v_0^i \in C_0^\infty(\Omega)$ і $v_1^i \in C_{0pe*}^\infty(\Omega \times Y)$ таки, що $v_0 \geq 0$ в Ω та

$$\lim_{i\to\infty}\left\|\,\nabla\,v_0 + \nabla_y\,v_1 - \nabla\,v_0^i - \nabla_y\,v_1^i\,\right\|_{L^2(\,\Omega\times Y)^n} = 0\,.$$

Нерівність (9.9) виконана для $(v_0^i\,,v_1^i) \in \mathrm{K}_2$ і тому для $(v_0\,,v_1) \in \mathrm{K}_2$ завдяки (9.2) (тобто $|\,a\,(y,\xi) - a\,(y,\zeta)\,| \leq \beta\,|\,\xi - \zeta\,|$).

Теорема 9.13 ($\exists\,1$ для двомасштабної варіаційної нерівності). *Існує єдиний розв'язок* $(u_0\,,u_1) \in \mathrm{K}_2$ *варіаційної нерівності (9.9), що розглядається для всіх* $(v_0, v_1) \in \mathrm{K}_2$, *та ця нерівність еквівалентна нерівності для* $(u_0, u_1) \in \mathrm{K}_2$:

$$\int_\Omega\int_Y a\,(\,y, \nabla\,\psi_0 + \nabla_y\,\psi_1 + \nabla\,u_0 + \nabla_y\,u_1)\,(\,\nabla\,v_0 + \nabla_y\,v_1 - \nabla\,u_0 - \nabla_y\,u_1\,)\,dy\,dx \geq$$

$$\geq \int_\Omega f\,(v_0 - u_0)\,dx \qquad \forall\,(v_0\,,v_1) \in \mathrm{K}_2\,. \tag{9.10}$$

$\lhd$ Через теорему 9.8 існує деякий розв'язок $(u_0\,,u_1) \in \mathrm{K}_2$ варіаційної нерівності (9.9), що розглядається $\forall\,(v_0\,,v_1) \in \mathrm{K}_2$. Фіксуємо $(w_0\,,w_1) \in \mathrm{K}_2$ та оберемо

$$(v_0, v_1) = (u_0 + \sigma\,(w_0 - u_0), u_1 + \sigma\,(w_1 - u_1)) \quad \text{для} \quad 0 < \sigma \leq 1$$

в нерівності (9.9). Тоді $(v_0\,,v_1) \in \mathrm{K}_2$ і нерівність (9.9) приймає вигляд

$$\int_\Omega\int_Y a\,(\,y\,,\nabla\,\psi_0 + \nabla_y\,\psi_1 + \nabla\,u_0 + \sigma\nabla(w_0 - u_0) + \nabla_y\,u_1 + \sigma\nabla_y(w_1 - u_1))\,\cdot$$

$$\cdot (\nabla w_0 + \nabla_y w_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1)\, dy\, dx \geq \int_\Omega f\ (w_0 - u_0)\, dx\,,$$

де $(w_0, w_1) \in \mathrm{K}_2$. Використовуючи (9.2), в цій нерівності можна перейти до границі при $\sigma \to 0$ і отримати, що $(u_0, u_1) \in \mathrm{K}_2$ є розв'язком нерівності (9.10).

Нехай $(u_0, u_1) \in \mathrm{K}_2$ є деяким розв'язом (9.10). Із (9.2) маємо

$$a(y,\xi)(\xi - \zeta) \geq a(y,\zeta)(\xi - \zeta)$$

для $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^n$ м. с. в Y. Виберемо в цій нерівності

$$\xi = \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1, \quad \zeta = \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1$$

для м. в. $x \in \Omega$ та м. в. $y \in Y$ та проінтегруємо результат по $\Omega \times Y$, тоді

$$\int_\Omega \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1)(\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1)\, dy\, dx \geq$$

$$\geq \int_\Omega \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1)(\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1)\, dy\, dx \geq$$

$$\geq \int_\Omega f\ (v_0 - u_0)\, dx$$

для $(v_0, v_1) \in \mathrm{K}_2$, оскільки $(u_0, u_1) \in \mathrm{K}_2$ є деяким розв'язом нерівності (9.10), тобто, варіаційна нерівність (9.9) еквівалентна варіаційний нерівності (9.10).

Припустимо, що $(u_0^1, u_1^1) \in \mathrm{K}_2$ та $(u_0^2, u_1^2) \in \mathrm{K}_2$ розв'язками нерівності (9.10). Розглянемо цю нерівність для (u_0^1, u_1^1) і оберемо $(v_0, v_1) = (u_0^2, u_1^2)$. Аналогічно, розглянемо цю нерівність для (u_0^2, u_1^2) і оберемо $(v_0, v_1) = (u_0^1, u_1^1)$. Додаючи першу нерівність до другої отримуємо нерівність

$$\int_\Omega \int_Y \big(a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1) - a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 +$$

$$+ \nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2) \big) (\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 - \nabla u_0^2 - \nabla_y u_1^2)\, dy\, dx \leq 0\,.$$

Відповідно до (9.2), отримуємо

$$\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 = \nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2 \qquad \text{м. с. в} \quad \Omega \times Y.$$

Інтегруючи цю рівність по Y та враховуючи рівності

$$\int_Y \nabla_y u_1^1\, dy = \int_Y \nabla_y u_1^2\, dy = 0,$$

маємо $\nabla u_0^1 = \nabla u_0^2$ м. с. в Ω. $\triangleright$

Оберемо $v_0 = u_0$ в (9.10) і припустимо формально, що $\xi = \nabla \psi_0 + \nabla u_0$ та $U = \psi_1 + u_1$. Таким чином, отримаємо варіаційну нерівність для $U \in H^1_{pe*}(Y)$:

$$\int_Y a\,(\,y\,,\,\xi + \nabla_y U)\,(\,\nabla_y V \,-\, \nabla_y U\,)\; dy \,\geq\, 0 \qquad \forall\ V \in H^1_{pe*}(Y)\,. \tag{9.11}$$

Теорема 9.14. *Для фіксованого $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{R}^n$ існує єдиний розв'язок $U \in H^1_{pe*}(Y)$ варіаційної нерівності (9.11) та ця нерівність еквівалентна варіаційному рівнянню для $U \in H^1_{pe*}(Y)$:*

$$\int_Y a\,(\,y\,,\,\xi + \nabla_y U\,)\;\nabla_y V\; dy \,=\, 0 \qquad \forall\ V \in H^1_{pe*}(Y)\,. \tag{9.12}$$

Крім того, функція $U = U(\xi)$ є слабо неперервною як функція на $\mathbf{R}^n$ із значеннями в $H^1_{pe*}(Y)$.

$\lhd$ Вже відомо, що для фіксованого $\xi \in \mathbf{R}^n$ існує єдиний розв'язок (9.11) та ця нерівність еквівалентна варіаційному рівнянню (9.12).

Фіксуємо $\xi \in \mathbf{R}^n$. Необхідно перевірити, що

$$\nabla_y U\,(\,\xi_i) \rightharpoonup \nabla_y U\,(\,\xi\,) \quad \text{слабко в} \quad L^2\,(Y)^n \quad \text{при} \quad i \to \infty\,,$$

$$\text{якщо} \quad |\,\xi_i - \xi\,| \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty\,,$$

де $U\,(\,\xi_i) \in H^1_{pe*}\,(Y)$ є єдиним розв'язком (9.11) для $\xi_i \in \mathbf{R}^n$ та $U\,(\,\xi\,)$ є єдиним розв'язком (9.11) для $\xi \in \mathbf{R}^n$. Із (9.2) та (9.12) для $V = U\,(\,\xi\,)$ отримуємо

$$\alpha\,\|\,\nabla_y U\,(\,\xi\,)\,\|^2_{L^2\,(Y)^n} \leq \int_Y (\,a\,(\,y\,, \nabla_y U\,) - a\,(\,y\,,\,\xi + \nabla_y U\,))\,\nabla_y U\;dy \;\leq$$

$$\leq\; \|\,a\,(\,y\,, \nabla_y U\,) - a\,(\,y\,,\,\xi + \nabla_y U\,)\,\|_{\,L^2\,(Y)^n}\,\|\,\nabla_y U\,(\,\xi\,)\,\|_{\,L^2\,(Y)^n}$$

і тому $\|\,\nabla_y U\,(\,\xi\,)\,\|_{\,L^2\,(Y)^n} \,\leq\, (\beta/\alpha)\;|\,\xi\,|$. Таким чином, можна вважати, що послідовність $\{\nabla_y U\,(\,\xi_i)\} \,\subset\, L^2\,(Y)^n$ є рівномірно обмеженою і знайдеться таке $W \in H^1_{pe*}\,(Y)$, що (після виділення підпослідовності при $i \to \infty$)

$$\nabla_y U\,(\,\xi_i) \rightharpoonup \nabla_y W \quad \text{слабко в} \quad L^2\,(Y)^n.$$

Розглянемо задачу (9.11) при $\xi_i \in \mathbf{R}^n$, яка еквівалентна наступній варіаційний нерівності для $U\,(\,\xi_i) \in H^1_{pe*}\,(Y)$:

$$\int_Y a\,(\,y\,,\,\xi_i + \nabla_y V)\,(\,\nabla_y V \,-\, \nabla_y U\,(\,\xi_i)\,)\; dy \,\geq\, 0 \qquad \forall\ V \in H^1_{pe*}\,(Y).$$

Для кожного $V \in H^1_{pe*}(Y)$ у цієї нерівності можна перейти до границі, оскільки

$$a(\, y\,,\, \xi_i + \nabla_y V) \to a(\, y\,,\, \xi + \nabla_y V)$$

в $L^2(Y)^n$, і отримати, що $W = U(\,\xi\,)$. $\triangleright$

Із нерівності $\|\,\nabla_y U(\xi)\,\|^2_{L^2(Y)^n} \le (\beta/\alpha)^2|\,\xi\,|^2$ та неперервності функції $U(\xi)$ отримуємо $U(\,y, \nabla\, v_0(\,x)) \in L^2\,(\,\Omega; H^1_{pe*}(Y))$, якщо $v_0 \in H^1_0(\Omega)$. Таким чином, має сенс наступне твердження про зв'язок розв'язку варіаційної нерівності (9.10) із розв'язками (формально отриманої) варіаційної нерівності (9.11).

Теорема 9.15. *Нехай* $(u_0\,, u_1) \in \mathrm{K}_2$ *є единим розв'язком варіаційної нерівності (9.10). Тоді*

$$u_1 = U(\,y\,, \nabla\,\psi_0(x) + \nabla\,u_0(x)\,) \,-\, \psi_1(x, y),$$

де $U(\xi)$ *є единим (для кожного* $\xi \in \mathbf{R}^n$*) розв'язком варіаційного рівняння (9.12).*

$\triangleleft$ Відповідно із (9.2), маємо

$$0 \le a\,(y, \xi)\,(\,\xi\,-\,\zeta\,) - a\,(y, \zeta)\,(\,\xi\,-\,\zeta\,)$$

для кожного $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^n$ м. с. в Y. Оберемо в цій нерівності

$$\xi = \nabla\,\psi_0 + \nabla\,u_0 + \nabla_y U\,(\nabla\,\psi_0 + \nabla\,u_0)$$

та

$$\zeta = \nabla\,\psi_0 + \nabla\,u_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1$$

для м. в. $x \in \Omega$ і м. в. $y \in Y$ та проінтегруємо результат по $\Omega \times Y$. Тоді

$$0 \le \int_\Omega \int_Y a\,(\,y\,, \eta\, + \nabla_y U\,(\eta))\,\,(\nabla_y U\,(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1\,)\,dy\,dx\,\,-$$

$$-\int_\Omega \int_Y a\,(\,y\,, \eta + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1)\,(\nabla_y U\,(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1)\,dy\,dx, \qquad (9.13)$$

де позначено $\eta = \nabla\,\psi_0 + \nabla\,u_0$. Обираючи $v_0 = u_0$ та $v_1 = U\,(\nabla\,\psi_0 + \nabla\,u_0) - \psi_1$ в (9.10), отримуємо

$$\int_\Omega \int_Y a\,(\,y\,, \eta + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1)\,(\nabla_y U\,(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1)\,dy\,dx \ge 0. \qquad (9.14)$$

Оберемо $\xi = \nabla\psi_0 + \nabla u_0$ та $V = U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1 - u_1$ (для м. в. $x \in \Omega$) в (9.12) та проінтегруємо результат по Ω, отримаємо рівність

$$\int_\Omega \int_Y a(y, \eta + \nabla_y U(\eta))\,(\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1)\,dy\,dx = 0.$$

Враховуючи цю рівність та співвідношення (9.14) укладаємо, що в (9.13) виконана рівність і тому

$$\nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0) = \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1 \qquad \text{м. с. в} \quad \Omega \times Y. \qquad \triangleright$$

Нагадаємо, що досліджуємо варіаційну нерівність для $\widehat{u}_\varepsilon \in \mathrm{K}_\varepsilon$:

$$\int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla\widehat{u}_\varepsilon\right)(\nabla\widehat{v} - \nabla\widehat{u}_\varepsilon)\,dx \geq \int_\Omega f\,(\widehat{v} - \widehat{u}_\varepsilon)\,dx$$
$$\forall\,\widehat{v} \in \mathrm{K}_\varepsilon \equiv \{\,\widehat{v} \in H_0^1(\Omega) : \widehat{v} \geq \psi_\varepsilon \quad \text{в} \quad H^1(\Omega)\,\}, \tag{9.1}$$

яка еквівалентна варіаційний нерівності для $u_\varepsilon \in \mathrm{K}$:

$$\int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla\psi_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon\right)(\nabla v - \nabla u_\varepsilon)\,dx \geq \int_\Omega f\,(v - u_\varepsilon)\,dx \tag{9.3}$$
$$\forall\,v \in \mathrm{K} \equiv \{\,v \in H_0^1(\Omega) : v \geq 0 \quad \text{в} \quad H^1(\Omega)\,\}.$$

Розв'язки цієї нерівності збігаються в сенсі теореми 9.8 до розв'язків варіаційної двомасштабної нерівності для $(u_0, u_1) \in \mathrm{K}_2$:

$$\int_\Omega \int_Y a(y, \nabla\psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1)\,(\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1)\,dy\,dx \geq$$
$$\geq \int_\Omega f\,(v_0 - u_0)\,dx \qquad \forall\,(v_0, v_1) \in \mathrm{K}_2\,. \tag{9.10}$$

Крім того, вже доведено в теоремі 9.15, що

$$u_1 = U(y, \nabla\psi_0(x) + \nabla u_0(x)) - \psi_1(x, y),$$

де $U(\xi)$ є єдиним (для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$) розв'язком варіаційного рівняння для $U \in H^1_{pe*}(Y)$:

$$\int_Y a(y, \xi + \nabla_y U)\,\nabla_y V\,dy = 0 \qquad \forall\;V \in H^1_{pe*}(Y)\,. \tag{9.12}$$

Таким чином, обираючи $v_1 = u_1$ в (9.10) та використовуючи теорему 9.15, отримаємо варіаційну нерівність для $u_0 \in \mathrm{K}$:

$$\int_\Omega A(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)\,(\nabla v_0 - \nabla u_0)\,dx \geq \int_\Omega f\,(v_0 - u_0)\,dx \qquad \forall\,v_0 \in \mathrm{K}, \tag{9.15}$$

де

$$A(\xi) = \int_Y a(y, \xi + \nabla_y U(y, \xi))\, dy. \tag{9.16}$$

Ця варіаційна нерівність еквівалентна (за допомогою заміни $\widehat{u}_0 = \psi_0 + u_0$, $\widehat{v}_0 = \psi_0 + v_0$) варіаційний нерівності для $\widehat{u}_0 \in \mathrm{K}_0$:

$$\int_\Omega A(\nabla \widehat{u}_0)(\nabla \widehat{v}_0 - \nabla \widehat{u}_0)\, dx \geq \int_\Omega f\,(\widehat{v}_0 - \widehat{u}_0)\, dx \tag{9.17}$$

$$\forall\, \widehat{v}_0 \in \mathrm{K}_0 \equiv \{\, \widehat{v}_0 \in H_0^1(\Omega) \,:\, \widehat{v}_0 \geq \psi_0 \quad \text{в} \quad H^1(\Omega)\,\}.$$

Теорема 9.16 (про збіжність розв'язків при усереднені варіаційних нерівностей). *Нехай $\widehat{u}_\varepsilon \in \mathrm{K}_\varepsilon$ є единим розв'язком варіаційної нерівності (9.1) для фіксованого ε та $\nabla \psi_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1$. Тоді*

$$\widehat{u}_\varepsilon \rightharpoonup \widehat{u}_0 \qquad \text{в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{і}$$

$$\nabla \widehat{u}_\varepsilon \overset{2}{\rightharpoonup} \nabla \widehat{u}_0 + \nabla_y U(\nabla \widehat{u}_0) \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

де $\widehat{u}_0 \in \mathrm{K}_0$ є единим розв'язком варіаційної нерівності (9.17) та $U(\xi)$ є единим (для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$) розв'язком варіаційної нерівності (9.11).

$\lhd$ Використовуючи теорему 9.15 та обираючи $v_1 = u_1$ в (9.10), отримаємо, що u_0 (яке визначене в теоремі 9.8) є розв'язком варіаційної нерівності (9.15). Єдиність цього розв'язку (і тому розв'язку задачі (9.17)) випливає із строгої монотонності вектор-функції $A(\xi)$, яку нескладно вивести із (9.2).

Дійсно, для кожного $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^n$ із (9.2) маємо

$$0 \leq (a(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) - a(y, \zeta + \nabla_y U(\zeta)))(\xi - \zeta + \nabla_y U(\xi) - \nabla_y U(\zeta))$$

м. с. в Y. Інтегруючи цю нерівність по Y та враховуючи (9.12), отримаємо

$$0 \leq (A(\xi) - A(\zeta))(\xi - \zeta).$$

Припустимо, що $0 = (A(\xi) - A(\zeta))(\xi - \zeta)$. Тоді

$$0 = (a(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) - a(y, \zeta + \nabla_y U(\zeta)))(\xi - \zeta + \nabla_y U(\xi) - \nabla_y U(\zeta))$$

м. с. в Y і тому $\xi + \nabla_y U(\xi) = \zeta + \nabla_y U(\zeta)$ м. с. в Y завдяки (9.2). Інтегруючи останню рівність по Y, отримуємо $\xi = \zeta$ та

$$0 < (A(\xi) - A(\zeta))(\xi - \zeta) \qquad \text{для} \qquad \xi \neq \zeta,$$

що доводить строгу монотонність $A(\xi)$ та єдиність розв'язку задачі (9.15).

Таким чином, безпосередньо із теорем 9.8, 9.13 та 9.15 випливає, що

$$\widehat{u}_\varepsilon \rightharpoonup \widehat{u}_0 \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega) \qquad \text{і} \qquad \nabla\,\widehat{u}_\varepsilon \xrightharpoonup{2} \nabla\,\widehat{u}_0 + \nabla_y U(\nabla\,\widehat{u}_0) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

без виділення підпослідовностей, оскільки границі є визначеними однозначно. ▷

Відзначимо, що доведене також наступне твердження.

Теорема 9.17. *Нехай* $(u_0\,, u_1) \in \mathrm{K}_2$ *є розв'язком варіаційної нерівності (9.10). Тоді*

$$(u_0\,, u_1) = (u_0\,, U\,(\nabla\,\psi_0 + \nabla\,u_0\,)\; - \;\psi_1),$$

де $u_0 \in \mathrm{K}$ *є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.15),* $U(\xi)$ *є єдиним (для кожного* $\xi \in \mathbf{R}^n$*) розв'язком варіаційного рівняння (9.12) та* ψ_0 *і* ψ_1 *визначені у теоремі 9.8.*

Крім того, буде доведено наступне зворотне твердження.

Теорема 9.18. *Нехай* $u_0 \in \mathrm{K}$ *є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.15),* $U(\xi)$ *є єдиним (для кожного* $\xi \in \mathbf{R}^n$ *) розв'язком варіаційного рівняння (9.12) та* ψ_0 *і* ψ_1 *визначені у теоремі 9.8. Тоді*

$$(u_0\,, u_1) = (u_0\,, U\,(\nabla\,\psi_0 + \nabla\,u_0\,)\; - \;\psi_1)$$

є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.10).

◁ Нехай $(v_0\,, v_1) \in \mathrm{K}_2$ і $u_1 = U\,(\nabla\,\psi_0 + \nabla\,u_0\,)\; - \;\psi_1$. Оберемо

$$\xi = \nabla\,\psi_0\, + \nabla\,u_0$$

і $V = v_1 - u_1$ (для м. в. $x \in \Omega$) у (9.12) та проінтегруємо результат по Ω. Тоді, додаючи отриману рівність до нерівності із (9.15), маємо в точності варіаційну нерівність (9.10), розв'язок якої є єдиним у відповідності до теореми 9.13. ▷

Розглянемо окремий випадок, коли $a\,(y, \xi)$ у задачі (9.1) має вигляд

$$a\,(y, \xi) = \nabla_\xi\, b\,(y, \xi)\,, \tag{9.18}$$

де функція $b\,(y, \xi)$ є вимірною на Y для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$ та неперервною відносно $\xi \in \mathbf{R}^n$ м. с. в Y. Крім того, припускається, що для $a\,(y, \xi)$ виконані нерівності (9.2). В цьому випадку, відомо, що варіаційна нерівність (9.3) еквівалентна (при фіксованому ε) задачі мінімізації для $u_\varepsilon \in \mathrm{K}$:

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \min_{v \in \mathrm{K}} F_\varepsilon(v), \quad F_\varepsilon(v) = \int_\Omega (b (\frac{x}{\varepsilon}, \nabla\psi_\varepsilon + \nabla v) - f\, v)\, dx\,. \tag{9.19}$$

Також відомо, що варіаційне рівняння (9.12) еквівалентно (при фіксованому $\xi \in \mathbf{R}^n$), якщо виконано (9.18), задачі мінімізації для $U \in H^1_{pe*}(Y)$:

$$F_\xi(U) = \min_{V \in H^1_{pe*}(Y)} F_\xi(V), \qquad F_\xi(V) = \int_Y b\,(y\,, \xi + \nabla_y V)\, dy\,. \tag{9.20}$$

Розглянемо також усереднену задачу мінімізації для $u_0 \in \mathrm{K}$:

$$F_0(u_0) = \min_{v_0 \in \mathrm{K}} F_0(v_0), \quad F_0(v_0) = \int_\Omega (B\,(\nabla\psi_0 + \nabla v_0) - f\, v_0)\, dx\,, \tag{9.21}$$

де $B\,(\xi) = \int\limits_Y b\,(\,y\,,\,\xi\, +\, \nabla_y U\,(\,y\,,\xi)\,)\,dy$ та $U\,(\,y\,,\xi)$ є розв'язком задачі мінімізації (9.2) для кожного $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Формально, маємо $\nabla_\xi B\,(\xi) = \int_Y \nabla_\xi b\,(\,y\,,\,\xi + \nabla_y U\,(\xi))\,(E + \nabla_\xi \nabla_y U\,(\xi))\,dy$, тому рівність $A\,(\xi) = \nabla_\xi B\,(\xi)$ не випливає безпосередньо із (9.16) та (9.18). Проте, буде доведено наступне твердження.

Теорема 9.18. *Існує єдиний розв'язок $u_0 \in \mathrm{K}$ задачі мінімізації (9.21) та ця задача еквівалентна варіаційний нерівності (9.15), якщо виконано (9.18).*

$\triangleleft$ Із (9.2) та (9.18) випливає, що

$$b\,(y,\xi) - b\,(y,\zeta) \geq a\,(y,\zeta)\,(\,\xi - \zeta\,) \tag{9.22}$$

та

$$0 \leq b\,(y,\xi) - b\,(y,\zeta) - a\,(y,\zeta)\,(\,\xi - \zeta\,) \leq (\beta/2)\,|\,\xi - \zeta\,|^2 \tag{9.23}$$

для кожного $\xi\,, \zeta \in \mathbf{R}^n$ м. с. в Y. Дійсно використовуючи неперервність $b\,(y,\xi)$ та $a\,(y,\xi)$ відносно ξ, маємо співвідношення

$$b\,(y,\xi) - b\,(y,\zeta) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\, b\,(y,\zeta + t\,(\,\xi - \zeta\,))\, dt =$$

$$= \int_0^1 \nabla_\xi\, b\,(y,\zeta + t\,(\,\xi - \zeta\,))\, dt\;(\,\xi - \zeta\,) =$$

$$= a\,(y,\zeta)\,(\,\xi - \zeta\,) + \int_0^1 (\,a\,(y,\zeta + t\,(\,\xi - \zeta\,)) - a\,(y,\zeta))\, dt\;(\,\xi - \zeta\,)$$

і залишається скористатися (9.2).

Нехай $u_0 \in \mathrm{K}$ є розв'язком усередненої задачі (9.15) і $v_0 \in \mathrm{K}$. Оберемо в нерівності (9.22)

$$\xi = \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla v_0),$$

$$\zeta = \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0)$$

для м. в. $x \in \Omega$ і м. в. $y \in Y$ та проінтегруємо результат по $\Omega \times Y$. Тоді, позначаючи $\eta = \nabla \psi_0 + \nabla u_0$, маємо

$$\int_\Omega \int_Y b(y, \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla v_0))\, dy\, dx -$$

$$- \int_\Omega \int_Y b(y, \eta + \nabla_y U(\eta))\, dy\, dx \geq$$

$$\geq \int_\Omega \int_Y a(y, \eta + \nabla_y U(\eta))(\nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla v_0) -$$

$$- \eta - \nabla_y U(\eta))\, dy\, dx \geq \int_\Omega f\,(v_0 - u_0)\, dx,$$

оскільки u_0 задовольняє нерівності із (9.10), де враховано теорему 9.15 та обрано $v_1 = U(y, \nabla \psi_0(x) + \nabla v_0(x)) - \psi_1(x, y)$. З цих нерівностей випливає, що

$$\int_\Omega \int_Y (b(y, \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla v_0)) - f v_0)\, dy\, dx \geq$$

$$\geq \int_\Omega \int_Y (b(y, \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0)) - f u_0)\, dy\, dx \tag{9.24}$$

для всіх $v_0 \in \mathrm{K}$, тобто $u_0 \in \mathrm{K}$ є розв'язком усередненої задачі мінімізації (9.21).

Припустимо зараз, що $u_0 \in \mathrm{K}$ є розв'язком задачі мінімізації (9.21), тобто виконано (9.24). Для фіксованого $\xi \in \mathbf{R}^n$ розглянемо задачу мінімізації (9.20) для $U(\xi) \in H^1_{pe*}(Y)$. Тоді, маємо

$$\int_Y b(y, \xi + \nabla_y V)\, dy \geq \int_Y b(y, \xi + \nabla_y U(\xi))\, dy \quad \forall\, V \in H^1_{pe*}(Y). \tag{9.25}$$

Нехай $(v_0, v_1) \in \mathrm{K}_2$. Обираючи $\xi = \nabla \psi_0 + \nabla v_0$ і $V = v_1$ (для м. в. $x \in \Omega$) в (9.25) та інтегруючи результат по Ω, отримаємо нерівність

$$\int_\Omega \int_Y b(y, \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1)\, dy\, dx \geq$$

$$\geq \int_\Omega \int_Y b(y, \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla v_0))\, dy\, dx. \tag{9.26}$$

Враховуючи цю нерівність в (9.24), маємо співвідношення

$$\int_\Omega \int_Y b\,(\,y\,, \nabla\,\psi_0\, + \nabla\,v_0\, + \nabla_y\,v_1)\;dy\,dx\, -$$

$$- \int_\Omega \int_Y b\,(\,y\,, \nabla\,\psi_0 + \nabla\,u_0 + \nabla_y\,U\,(\nabla\,\psi_0 + \nabla\,u_0))\,dy\,dx \geq \int_\Omega f\,(v_0 - u_0)\,dx.$$

Оберемо в цьому співвідношенні $v_0 = u_0 + \sigma(w_0 - u_0)$ і $v_1 = U\,(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)$, де $w_0 \in \mathrm{K}$ та $0 < \sigma \leq 1$. Тоді, враховуючи нерівність (9.23), де обрано

$$\xi = \nabla\,\psi_0\, +\, \nabla\,u_0\, +\, \sigma\,\nabla\,(w_0 - u_0)\, +\, \nabla_y\,U\,(\nabla\,\psi_0\, +\, \nabla\,u_0),$$

$$\zeta = \nabla\,\psi_0\, + \nabla\,u_0\, + \nabla_y\,U\,(\nabla\,\psi_0\, + \nabla\,u_0),$$

маємо

$$\sigma \int_\Omega \int_Y a\,(\,y\,, \nabla\,\psi_0 + \nabla\,u_0 + \nabla_y\,U\,(\nabla\,\psi_0 + \nabla\,u_0))\,(\,\nabla\,w_0 - \nabla\,u_0\,)\,dy\,dx\, +$$

$$+\, \sigma^{\,2} \int_\Omega |\,\nabla\,(w_0 - u_0)\,|^{\,2}\,dx\, \geq\, \sigma \int_\Omega f\,\,(\,w_0\, -\, u_0)\,\,dx \tag{9.27}$$

для $w_0 \in \mathrm{K}$, оскільки $\xi - \zeta = \sigma\,\nabla\,(w_0 - u_0)$ для обраних ξ та ζ. Обчислюючи границю при $\sigma \to 0$ у (9.27), робимо висновок, що $u_0 \in \mathrm{K}$ є розв'язком усередненої задачі (9.15). ▷

Розглянемо, також двомасштабну задачу мінімізації для $(u_0\,, u_1) \in \mathrm{K}_2$:

$$F_2(u_0\,, u_1)\; =\; \min_{(v_0,\, v_1)\,\in\,\mathrm{K}_2} F_2(v_0\,, v_1)\,, \tag{9.28}$$

де $F_2(v_0\,, v_1) = \int\limits_\Omega \int\limits_Y (\,b\,\,(\,y\,, \nabla\,\psi_0\, + \nabla_y\,\psi_1 + \nabla\,u_0\, + \nabla_y\,u_1)\,\, -\,\, f\,v_0\,)\,dy\,dx\,.$

Теорема 9.19. *Існує єдиний розв'язок* $(u_0\,, u_1) \in \mathrm{K}_2$ *задачі мінімізації (9.28) та ця задача еквівалентна варіаційний нерівності (9.15), якщо виконано (9.18).*

◁ Доведення цього твердження фактично повторює доведення теореми 9.18. Дійсно, розв'язок $(u_0\,, u_1) \in \mathrm{K}_2$ варіаційної нерівності (9.10) є розв'язком двомасштабної задачі мінімізації (9.28) завдяки (9.22) із відповідними ξ та ζ. Зворотне твердження випливає із (9.26), теореми 9.15 і нерівності (9.23). ▷

Таким чином, еквівалентність (при $a\,(y,\xi)\; =\; \nabla_\xi\,b\,(y,\xi)$) задачі мінімізації (9.19) і варіаційної нерівності (9.3) (еквівалентної (9.1)) зберігається при усередненні і двомасштабному усередненні та твердження про збіжність розв'язків задачі мінімізації (9.19) випливає із теореми 9.16.

Рекомендована література

1. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. *Оптимизация.* – М.: Эдиториал УРСС, 2000. 320 с.

2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике.* – М.: Мир, 1972. 587 с.

3. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. 384 с.

4. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. *Введение в вариационные неравенства.* – М.: Мир, 1983. 256 с.

5. Сьярле Ф. *Математическая теория упругости.* – М.: Мир, 1992. 472 с.

6. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, 1979. 399 с.

Додаткова література

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах.* - М.: Наука, 1984. 352 с.

2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.* - М.: Наука, 1965.. 520 с.

3. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики.* М.:Наука, 1989. 384 с.