

"Математику уже за то любить стоит, что она ум в порядок приводит."

М.В.Ломоносов

## 1. Проблеми некласичної оптимізації

### 1.1. Основна задача оптимізації: знайти мінімум функції

$$f : X \rightarrow \mathbf{R},$$

визначеною на деякій множині  $X$ , при обмеженні  $x \in D \subset X$ . Стисло це записується таким чином

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in D. \quad (1.1)$$

Множина  $D$  називається множиною *допустимих елементів* задачі (1.1). Якщо  $D = X$ , тоді задача (1.1) називається *задачею без обмежень*.

**В1.1.** Розв'язком задачі (1.1) є  $\dot{x} \in X$  таке, що

$$f(x) \geq f(\dot{x}) \quad \forall x \in D.$$

Такий мінімум називається *глобальним* або *абсолютним* мінімумом задачі (1.1). Позначення:  $\dot{x} \in \text{absmin}(1.1)$ .

Величина  $f(\dot{x})$  ( $\dot{x} \in \text{absmin}(1.1)$ ) називається *чисельним значенням* задачі (1.1) та позначається  $S_{\min}$  або  $S_{\text{absmin}}$ .

Множина розв'язків задачі (1.1) позначається  $\text{Arg}(1.1)$ .

Якщо мінімум не досягається на  $D$ , тоді вказують послідовність  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$  таку, що

$$f(x_n) \rightarrow S_{\min}.$$

(Тобто розглядають замість (1.1) задачу:  $f(x) \rightarrow \inf, \quad x \in D$ .)

При розгляді задачі (1.1) корисно визначати не тільки абсолютні мінімуми задачі але і локальні мінімуми.

**В1.2.** *Локальним* мінімумом задачі (1.1) називається  $\dot{x} \in X$  таке, що

$$f(x) \geq f(\dot{x}) \quad \forall x \in U \cap D,$$

де  $U$  є деяким оточенням  $\dot{x} \in D$ . Позначення:  $\dot{x} \in \text{locmin}(1.1)$ .

**1.2.** Нехай  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . Якщо функція  $f$  диференційована  $k$  раз в точці  $\dot{x} \in \mathbf{R}$ , тоді пишуть  $f \in C^k(\dot{x})$ . Околом точці  $\dot{x} \in \mathbf{R}$  є множина

$$U = \{x \in \mathbf{R} : |x - \dot{x}| < r\} \quad \text{для деякого } r \in \mathbf{R}_+ = \{s \in \mathbf{R} : s > 0\}.$$

Розглянемо задачу оптимізації:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (1.2)$$

Позначимо для такої задачі  $\text{locmin } f = \text{locmin}(1.2)$ .

**Теорема 1.1** (Ферма, 1629). *Якщо  $\dot{x} \in \text{locmin } f$  та  $f \in C^1(\dot{x})$ , тоді*

$$f'(\dot{x}) = 0. \quad \triangleleft \triangleright$$

**Теорема 1.2.** *Припустимо, що  $f \in C^2(\dot{x})$  в деякій точці  $\dot{x} \in \mathbf{R}$ .*

1. *Необхідні умови мінімуму:*

$$\dot{x} \in \text{locmin } f \quad \Rightarrow \quad f'(\dot{x}) = 0, \quad f''(\dot{x}) \geq 0.$$

2. *Достатні умови мінімуму:*

$$f'(\dot{x}) = 0, \quad f''(\dot{x}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} \in \text{locmin } f. \quad \triangleleft \triangleright$$

**Теорема 1.3.** *Припустимо, що  $f \in C^k(\dot{x})$  в деякій точці  $\dot{x} \in \mathbf{R}$  для  $k \geq 2$ .*

1. *Необхідні умови мінімуму:*

$$\dot{x} \in \text{locmin } f \quad \Rightarrow$$

$$a) \quad f'(\dot{x}) = 0, \dots, f^k(\dot{x}) = 0 \quad \text{або}$$

$$b) \quad f'(\dot{x}) = 0, \dots, f^{2l-1}(\dot{x}) = 0 \quad f^{2l}(\dot{x}) \geq 0 \quad \text{для } l : 2 \leq 2l \leq k.$$

2. *Достатні умови мінімуму:*

$$f'(\dot{x}) = 0, \dots, f^{2l-1}(\dot{x}) = 0 \quad f^{2l}(\dot{x}) > 0 \quad \text{для } l : 2 \leq 2l \leq k$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} \in \text{locmin } f. \quad \triangleleft \triangleright$$

**1.3.** Розглянемо функцію  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ . Якщо  $f$  диференційована  $k$  раз по  $x_1, \dots, x_n$  в точці  $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$ , тоді пишуть  $f \in C^k(\dot{x})$ . Околом  $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$  є множина

$$U = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - \dot{x}| < r\} \quad \text{для деякого } r \in \mathbf{R}_+.$$

**Теорема 1.4.** Якщо  $\dot{x} \in \text{locmin } f$  і  $f \in C^1(\dot{x})$ , тоді

$$\nabla f(\dot{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f(\dot{x})}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f(\dot{x})}{\partial x_n} = 0.$$

◁ Розглянемо функцію однієї змінної  $\varphi(x_i) = f(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{i-1}, x_i, \dot{x}_{i+1}, \dots, \dot{x}_n)$  для  $i = 1, \dots, n$ . Маємо  $\dot{x} \in \text{locmin } \varphi$

$$\Rightarrow \quad \varphi'_{x_i}(\dot{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f(\dot{x})}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad \triangleright$$

**Теорема 1.5.** Припустимо, що  $f \in C^2(\dot{x})$  в деякій точці  $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$  та позначимо

$$\nabla^2 f(\dot{x}) = \left( \frac{\partial^2 f(\dot{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n.$$

1. Необхідні умови мінімуму:

$$\dot{x} \in \text{locmin } f \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\dot{x}) = 0, \quad \langle \nabla^2 f(\dot{x}) h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n.$$

2. Достатні умови мінімуму:

$$\nabla f(\dot{x}) = 0, \quad \langle \nabla^2 f(\dot{x}) h, h \rangle > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} \in \text{locmin } f.$$

◁ 1. Маємо  $\dot{x} \in \text{locmin } f$ , отже  $\nabla f(\dot{x}) = 0$  та

$$f(\dot{x} + \alpha h) - f(\dot{x}) \geq 0$$

для фіксованого  $h \in \mathbf{R}^n$  і малих  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

Використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$f(\dot{x} + \alpha h) - f(\dot{x}) = \frac{\alpha^2}{2} \langle \nabla^2 f(\dot{x}) h, h \rangle + r(\alpha h) \geq 0$$

для фіксованого  $h \in \mathbf{R}^n$  і малих  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Розділивши на  $\alpha^2$  та обчислюючи  $\lim_{\alpha \rightarrow 0}$ , маємо

$$\langle \nabla^2 f(\dot{x}) h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n. \quad \triangleright 1.$$

◁ 2. Використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$f(\dot{x} + h) - f(\dot{x}) = \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(\dot{x}) h, h \rangle + r(h) \geq \frac{\kappa}{2} |h|^2 + r(h) \geq 0$$

для деякого  $\kappa > 0$  і малих  $h \in \mathbf{R}^n$ , оскільки  $r(h)$  є достатньо малим. Таким чином

$$\dot{x} \in \text{locmin } f. \quad \triangleright 2.$$

#### 1.4. Задача планування на підприємстві.

Нехай на підприємстві є виробничі ресурси  $m$  типів в об'ємах  $b_1, \dots, b_m$ . Підприємство виробляє продукцію  $n$  типів. На виробництво одиниці продукції  $j$ -го типу потрібно використовувати ресурс кожного  $i$ -го типу в об'ємі  $a_i^j$ . Прибуток від реалізації одиниці продукції  $j$ -го типу дорівнює  $c_j$ . Таким чином, при виготовленні  $x_j$  одиниць продукції кожного  $j$ -го типу прибуток є

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Знайти план виробництва  $x \in \mathbf{R}^n$  такий, що прибуток  $f(x)$  є максимальним:

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in \overline{\mathbf{R}}_+^n :$$

$$a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^n x_n = b_1,$$

$$a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^n x_n = b_2,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \dots + a_m^n x_n = b_m,$$

де  $\overline{\mathbf{R}}_+^n = \{x \in \mathbf{R}^n : x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n\}$ .

Ця задача називається задачею лінійного програмування в канонічній формі.

Рівність

$$a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \dots + a_i^n x_n = b_i$$

означає, що ресурс кожного  $i$ -го типу витрачений повністю.

Якщо ресурс кожного  $i$ -го типу витрачений не повністю, тоді розглядають наступну задачу:

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in \overline{\mathbf{R}}_+^n :$$

$$\begin{aligned}
 a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^n x_n &\leq b_1, \\
 a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^n x_n &\leq b_2, \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \dots + a_m^n x_n &\leq b_m,
 \end{aligned}$$

яку можна звести до задачі лінійного програмування в канонічній формі за допомогою введення фіктивних змінних  $x_{n+1}, \dots, x_{n+k}$  із нульовим прибутком від реалізації одиниці продукції  $(n+l)$ -го типу :  $c_{n+l} = 0$ ,  $l = 1, \dots, k$ .

Задача лінійного програмування є задачею оптимізації із обмеженнями типу рівностей та нерівностей.

### 1.5. Задача оптимізації із обмеженнями типу рівностей.

Розглянемо функції  $f_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , де  $i = 0, 1 \dots m$ . Якщо функція  $f_i$  диференційована  $k$  раз по  $x_1, \dots, x_n$  у деякому околу  $U(\dot{x})$  точці  $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$ , тоді пишуть

$$f_i \in C^k(U(\dot{x})).$$

Задачею оптимізації із обмеженнями типу рівностей називається наступна задача:

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (1.3)$$

**Теорема 1.6** (принцип Лагранжа). *Якщо  $\dot{x} \in \text{locmin}$  (1.3) і  $f_i \in C^1(U(\dot{x}))$  для  $i = 0, 1 \dots m$ , тоді*

$$\exists \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1} \setminus \{0\} :$$

$$\nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0 \nabla f_0(\dot{x}) + \lambda_1 \nabla f_1(\dot{x}) + \dots + \lambda_m \nabla f_m(\dot{x}) = 0,$$

де функція  $\Lambda(\dot{x}, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x)$  називається функцією Лагранжа, а  $\dot{x} \in \mathbf{R}^n$  таке, що  $\nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0$  називається стаціонарною точкою функції Лагранжа.

◁ Припустимо, що вектори

$$\nabla f_i(\dot{x}) = \left( \frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_n} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m$$

лінійно залежні. Тоді  $\exists \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1} \setminus \{0\} : \nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0$ .

Розглянемо тепер випадок, коли вектори

$$\nabla f_i(\dot{x}) = \left( \frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_n} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m$$

лінійно незалежні. Тоді

$$\text{rank} \left( \frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_j} \right)_{i=0,1,\dots,m, j=1,\dots,n} = m + 1$$

і можна вважати, що

$$\det \left( \frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_j} \right)_{i=0,1,\dots,m, j=1,\dots,m+1} \neq 0.$$

Крім того, можна вважати, що  $f_0(\dot{x}) = 0$  (якщо  $f_0(\dot{x}) \neq 0$ , тоді розглянемо функцію  $\tilde{f}_0(x) = f_0(x) - f_0(\dot{x})$  для якої  $\tilde{f}_0(\dot{x}) = 0$ , де  $\dot{x} \in \text{locmin}(1.3)$ ).

Визначимо відображення із околу точці  $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1}) \in \mathbf{R}^{m+1}$  в  $\mathbf{R}^{m+1}$  формулою

$$F(\tilde{x}) = (F_0(\tilde{x}), \dots, F_m(\tilde{x})) = (f_0(\tilde{x}, \dot{x}_{m+2}, \dots, \dot{x}_n), \dots, f_m(\tilde{x}, \dot{x}_{m+2}, \dots, \dot{x}_n)),$$

де  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{m+1})$ . Маємо  $F(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1}) = 0$ ,  $F \in C^1(U(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1}))^{m+1}$  і

$$\det \left( \frac{\partial F_i(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1})}{\partial x_j} \right)_{i=0,1,\dots,m, j=1,\dots,m+1} \neq 0.$$

За теоремою про обернену функцію існує обернене відображення  $F^{-1}$  із околу точці  $\tilde{y} = 0$  в окіл точці  $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1})$  таке, що

$$F^{-1}(0) = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1})$$

і  $|F^{-1}(y) - (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1})| \leq \kappa|y|$  для деякого  $\kappa > 0$ . Зокрема для малих  $\varepsilon \in \mathbf{R}$ , визначено

$$\tilde{x}(\varepsilon) = F^{-1}(\varepsilon, 0, \dots, 0)$$

та  $F(\tilde{x}(\varepsilon)) = (\varepsilon, 0, \dots, 0)$ . Отже, отримуємо

$$f_0(\tilde{x}(\varepsilon), \dot{x}_{m+2}, \dots, \dot{x}_n) = \varepsilon, \quad f_i(\tilde{x}(\varepsilon), \dot{x}_{m+2}, \dots, \dot{x}_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$|\tilde{x}(\varepsilon) - (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{m+1})| \leq \kappa|\varepsilon|,$$

що суперечить припущенням  $f_0(\dot{x}) = 0$  і  $\dot{x} \in \text{locmin}(1.3)$ , оскільки може бути  $\varepsilon < 0$ . Таким чином, вектори

$$\nabla f_i(\dot{x}) = \left( \frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i(\dot{x})}{\partial x_n} \right), \quad i = 0, 1, \dots, m$$

лінійно залежні.  $\triangleright$

**Теорема 1.7** (необхідні умови мінімуму у задачі (1.3)). *Якщо  $f_i \in C^2(U(\dot{x}))$  для  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $\dot{x} \in \text{locmin}(1.3)$  та*

$$\dim \text{Lin} \{ \nabla f_1(\dot{x}), \dots, \nabla f_m(\dot{x}) \} = n,$$

тоді

$$\exists \lambda = (1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1} :$$

$$\nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f_0(\dot{x}) + \lambda_1 \nabla f_1(\dot{x}) + \dots + \lambda_m \nabla f_m(\dot{x}) = 0$$

і

$$\langle \nabla^2 \Lambda(\dot{x}, \lambda) h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n : \quad \langle \nabla f_i(\dot{x}), h \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, m,$$

де

$$\text{Lin} \{ \nabla f_1(\dot{x}), \dots, \nabla f_m(\dot{x}) \} = \{ c_1 \nabla f_1(\dot{x}) + \dots + c_m \nabla f_m(\dot{x}) : c_i \in \mathbf{R} \}. \quad \triangleleft \triangleright$$

**Теорема 1.8** (достатні умови мінімуму у задачі (1.3)). *Якщо  $f_i \in C^2(U(\dot{x}))$  для  $i = 0, 1 \dots m$ ,*

$$\dim \text{Lin} \{ \nabla f_1(\dot{x}), \dots, \nabla f_m(\dot{x}) \} = n,$$

$$\exists \lambda = (1, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1} :$$

$$\nabla_x \Lambda(\dot{x}, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f_0(\dot{x}) + \lambda_1 \nabla f_1(\dot{x}) + \dots + \lambda_m \nabla f_m(\dot{x}) = 0$$

і

$$\langle \nabla^2 \Lambda(\dot{x}, \lambda) h, h \rangle > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} : \quad \langle \nabla f_i(\dot{x}), h \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, m,$$

тоді  $\dot{x} \in \text{locmin}(1.3)$ .  $\triangleleft \triangleright$

## 2. Опуклі множини та функції

Для лінійного нормованого простору  $X$  і  $a, b \in X$ , множина

$$[a, b] = \{ \alpha a + (1 - \alpha) b : 0 \leq \alpha \leq 1 \}$$

називається *відрізком*, що сполучає  $a$  і  $b$ .

**В2.1.** Множина  $K \subset X$  називається *опуклою*, якщо

$$[a, b] \subset K \quad \forall a, b \in K.$$

**В2.2.** Функція  $f : K \rightarrow \mathbf{R}$  на опуклій множині  $K$  називається *опуклою*, якщо

$$f(\alpha a + (1 - \alpha) b) \leq \alpha f(a) + (1 - \alpha) f(b) \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Типовим прикладом опуклої функції є *функція норми* на лінійному нормованому просторі над  $\mathbf{R}$ .

**Теорема 2.1.** Нехай  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  є такою, що  $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$ . Тоді

$$f \text{ є опуклою} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n. \quad \triangleleft \triangleright$$

Множина всіх лінійних і неперервних відображень  $\varphi : X \rightarrow \mathbf{R}$  називається *спряженим* (або *дуальним*) до  $X$  і позначається  $X^*$ . Елементи  $\varphi \in X^*$  називаються *функціоналами*. Норма функціоналу  $\varphi \in X^*$  визначається рівністю

$$\|\varphi\|_B = \sup_{\|a\|_X \leq 1} |\varphi(a)| = \sup_{a \neq \theta} \frac{|\varphi(a)|}{\|a\|_X}.$$

Лінійний простір  $(X^*, \|\cdot\|_B)$  є банаховим (нормованим та повним).

Гільбертів (повний передгільбертів) простір  $H$  можна ототожнити із  $H^*$  (як нормований простір) через наступне твердження.

**Теорема 2.2** (Рісс). Нехай  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  є гільбертів простір і  $\varphi \in H^*$ . Тоді

$$\exists 1 \ a \in H : \quad \varphi(x) = \langle x, a \rangle_H \quad \forall x \in H$$

*i*

$$\|\varphi\|_B = \|a\|_H = \sqrt{\langle a, a \rangle_H}.$$

**В2.3.** Субдиференціалом опуклої функції  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  у точці  $\dot{x} \in X$  називається наступна підмножина в  $X^*$  :

$$\partial f(\dot{x}) = \{ y \in X^* : \langle x - \dot{x}, y \rangle \leq f(x) - f(\dot{x}) \quad \forall x \in X \},$$

де  $\langle x - \dot{x}, y \rangle = y(x - \dot{x})$  є значенням функціоналу  $y \in X^*$  на елементі  $x - \dot{x} \in X$ .

Наприклад, якщо  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  і  $f \in C^1(\mathbf{R}^n) = \{ f \in C^0(\mathbf{R}^n) : \nabla f \in C^0(\mathbf{R}^n) \}$ , тоді

$$\partial f(\dot{x}) = \nabla f(\dot{x}).$$

**Теорема 2.3.** Нехай  $f, g : X \rightarrow \mathbf{R}$  є опуклими і  $f, g$  неперервні в деякій точці  $x_0 \in X$ . Тоді

$$\partial(f + g)(\dot{x}) = \partial f(\dot{x}) + \partial g(\dot{x}) \quad \forall \dot{x} \in X. \quad \triangleleft \triangleright$$

**Теорема 2.4** (Ферма для опуклих функцій). Нехай  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  є опуклою та розглядається задача оптимізації:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X.$$

Тоді

$$\dot{x} \in \text{absmin } f \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \partial f(\dot{x}).$$

$\triangleleft$

$$\dot{x} \in \text{absmin } f \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - f(\dot{x}) \geq 0 = \langle x - \dot{x}, y \rangle \quad \forall x \in X \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \partial f(\dot{x}). \quad \triangleright$$

Наприклад, для функцій  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  субдиференціалом  $\partial f(\dot{x})$  є множина кутових коефіцієнтів, при яких прямі що проходять через точку  $(\dot{x}, f(\dot{x}))$  лежать під графіком функції  $y = f(x)$ .

**Завдання для самостійної роботи:** для  $f(x) = |x|$  перевірити, що

$$\partial f(\dot{x}) = \text{sgn } \dot{x}, \quad \dot{x} \neq 0,$$

$$\partial f(\dot{x}) = [-1, 1], \quad \dot{x} = 0.$$

**Теорема 2.5.** Нехай  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  є такою, що  $f \in C^1[0, 1]$  та розглядається задача оптимізації:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in [0, 1].$$

Якщо  $\dot{x} \in \text{locmin } f$ , тоді виконана одна із наступних умов

$$i) \quad f'(\dot{x}) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < \dot{x} < 1;$$

$$ii) \quad f'(\dot{x}) \geq 0 \quad \text{при} \quad \dot{x} = 0;$$

$$iii) \quad f'(\dot{x}) \leq 0 \quad \text{при} \quad \dot{x} = 1.$$

◁ Для  $\dot{x} \in \text{locmin } f$ , використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$f(x) - f(\dot{x}) = f'(\dot{x})(x - \dot{x}) + r(x - \dot{x}) \geq 0,$$

де  $r(x - \dot{x})$  є малим для  $x$  достатньо близьких до  $\dot{x}$ . Таким чином, для  $x \in [0, 1]$  достатньо близьких до  $\dot{x} \in \text{locmin } f$ , маємо одну із наступних умов

$$i) \quad f'(\dot{x}) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < \dot{x} < 1 \quad (\text{Теорема Ферма});$$

$$ii) \quad f'(\dot{x}) \geq 0 \quad \text{при} \quad \dot{x} = 0, \quad \text{оскільки} \quad (x - \dot{x}) \geq 0;$$

$$iii) \quad f'(\dot{x}) \leq 0 \quad \text{при} \quad \dot{x} = 1, \quad \text{оскільки} \quad (x - \dot{x}) \leq 0. \quad \triangleright$$

Умови  $i), ii), iii)$  теореми 2.5 можна записати у вигляді нерівності:

$$\text{знайти} \quad \dot{x} \in [0, 1] : \quad f'(\dot{x})(x - \dot{x}) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

яка називається *варіаційною нерівністю*.

**Теорема 2.6.** Нехай  $f : K \rightarrow \mathbf{R}$  функція на замкнутій опуклій множині  $K \subset \mathbf{R}^n$ ,  $f \in C^1(K) = \{f \in C^0(K) : \nabla f \in C^0(K)\}$  і розглядається задача оптимізації:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in K.$$

Якщо  $\dot{x} \in \text{locmin } f$ , тоді  $\dot{x} \in K$  є розв'язком варіаційної нерівності :

$$\text{знайти} \quad \dot{x} \in K : \quad \nabla f(\dot{x})(x - \dot{x}) \geq 0 \quad \forall x \in K, \quad (2.1)$$

де  $\nabla f(\dot{x})(x - \dot{x}) = \langle \nabla f(\dot{x}), (x - \dot{x}) \rangle$  позначає скалярний добуток векторів.

◁ Множина  $K$  є опуклою, отже  $[x, \dot{x}] \subset K$  для  $\dot{x} \in \text{locmin } f$ . Функція

$$\Phi(t) = f(\dot{x} + t(x - \dot{x})), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

визначена і досягає локальний мінімум при  $t = 0$ , тому (як в теоремі 2.5) маємо

$$\Phi'(0) = \nabla f(\dot{x})(x - \dot{x}) \geq 0 \quad \forall x \in K. \quad \triangleright$$

**Теорема 2.7.** *Нехай  $f : K \rightarrow \mathbf{R}$  опукла функція на замкнутій опуклій множині  $K \subset \mathbf{R}^n$ ,  $f \in C^1(K)$  та  $\dot{x} \in K$  є розв'язком варіаційної нерівності (2.1).*

*Тоді*

$$\dot{x} \in \text{absmin } f.$$

◁ Для опуклої функції  $f \in C^1(K)$ , маємо  $\partial f(\dot{x}) = \nabla f(\dot{x})$  і

$$f(x) - f(\dot{x}) \geq \nabla f(\dot{x})(x - \dot{x}) \quad \forall x \in K.$$

Враховуючи варіаційну нерівність (2.1) отримуємо, що

$$f(x) \geq f(\dot{x}) \quad \forall x \in K. \quad \triangleright$$

Розв'язок  $\dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}_+^n$  задачі планування на підприємстві за визначенням задовольняє нерівності

$$c \dot{x} \geq c x \quad \forall x \in \overline{\mathbf{R}}_+^n$$

і відповідним обмеженням типу рівностей ( $Ax = b$ ), де  $c = (c_1, \dots, c_n)$ .

Таким чином, розв'язок  $\dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}_+^n$  цієї задачі є розв'язком варіаційної нерівності

$$\text{знайти } \dot{x} \in D : \quad c(\dot{x} - x) \geq 0 \quad \forall x \in D,$$

де  $D = \overline{\mathbf{R}}_+^n \cap \{y \in \mathbf{R}^n : Ay = b\}$ .

**Теорема 2.8** (про проєкцію на опуклу підмножину в  $\mathbf{R}^n$ ). *Нехай  $K$  є замкнутою опуклою підмножиною в  $\mathbf{R}^n$ . Тоді для кожного фіксованого  $x \in \mathbf{R}^n$*

$$\exists 1 y \in K : \quad |x - y| = \inf_{\eta \in K} |x - \eta|. \quad (2.2)$$

◁ Позначимо через  $\eta_k$  мінімізуючу послідовність, тобто

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |x - \eta_k| = d = \inf_{\eta \in K} |x - \eta|. \quad (2.3)$$

Існування такої послідовності впливає із визначення інфімуму. Із рівності паралелограма

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2, \quad a, b \in \mathbf{R}^n,$$

при  $a = x - \eta_k$  і  $b = x - \eta_h$ , отримуємо

$$|\eta_k - \eta_h|^2 = 2|x - \eta_k|^2 + 2|x - \eta_h|^2 - 4\left|x - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h)\right|^2. \quad (2.4)$$

Множина  $K$  є опуклою, тому  $\frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h) \in K$  і

$$d^2 \leq \left|x - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h)\right|^2.$$

Отже

$$|\eta_k - \eta_h|^2 \leq 2|x - \eta_k|^2 + 2|x - \eta_h|^2 - 4d^2$$

і послідовність  $\{\eta_k\} \subset K$  є фундаментальною через (2.3).

Таким чином, існує  $y \in K$  таке, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = y$  і

$$|x - y| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x - \eta_k| = d.$$

Припустимо, що  $y, \tilde{y} \in K$  задовольняють (2.2). Тоді, враховуючи (2.4), маємо

$$|y - \tilde{y}|^2 = 2|x - y|^2 + 2|x - \tilde{y}|^2 - 4\left|x - \frac{1}{2}(y + \tilde{y})\right|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0. \quad \triangleright$$

Розв'язок  $y \in K$  задачі (2.2) називається *проекцією*  $x$  на  $K$  і позначається

$$y = \text{Pr}_K(x).$$

За визначенням  $\text{Pr}_K(x) = x$  для  $\forall x \in K$ .

**Лема 2.9.** Нехай  $K$  є замкнутою опуклою підмножиною  $\mathbf{R}^n$ . Тоді

$$y = \text{Pr}_K(x) \Leftrightarrow \langle y, \eta - y \rangle \geq \langle x, \eta - y \rangle \quad \forall \eta \in K.$$

$\Leftarrow (\Rightarrow)$  Нехай  $x \in \mathbf{R}^n$  і  $y = \text{Pr}_K(x)$ , тоді

$$y + t(\eta - y) \in K \quad \forall \eta \in K, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Із (2.2) випливає, що функція

$$\Phi(t) = |x - y - t(\eta - y)|^2 = |x - y|^2 - 2t \langle x - y, \eta - y \rangle + t^2 |\eta - y|^2$$

досягає мінімуму при  $t = 0$  і  $\Phi'(0) \geq 0$ . Тобто  $\langle x - y, \eta - y \rangle \leq 0 \quad \forall \eta \in K$ , або

$$\langle y, \eta - y \rangle \geq \langle x, \eta - y \rangle \quad \forall \eta \in K. \quad (\Rightarrow) \triangleright$$

◁(⇐) Нехай  $y \in K$  і  $\langle y, \eta - y \rangle \geq \langle x, \eta - y \rangle \quad \forall \eta \in K$ , тоді

$$0 \leq \langle y - x, (\eta - x) + (x - y) \rangle = -|y - x|^2 + \langle y - x, \eta - x \rangle.$$

Таким чином,  $|y - x|^2 \leq \langle y - x, \eta - x \rangle \leq |y - x||\eta - x|$  і

$$|y - x| \leq |\eta - x| \quad \forall \eta \in K. \quad (\Leftarrow) \triangleright$$

**Лема 2.10.** Нехай  $K$  є замкнутою опуклою підмножиною  $\mathbf{R}^n$ . Тоді

$$|\text{Pr}_K(x) - \text{Pr}_K(\tilde{x})| \leq |x - \tilde{x}| \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbf{R}^n,$$

зокрема, відображення  $\text{Pr}_K : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  є неперервним.

◁ Нехай  $x, \tilde{x} \in \mathbf{R}^n$  і  $y = \text{Pr}_K(x), \tilde{y} = \text{Pr}_K(\tilde{x})$ . Тоді

$$\langle y, \tilde{\eta} - y \rangle \geq \langle x, \tilde{\eta} - y \rangle \quad \forall \tilde{\eta} \in K,$$

$$\langle \tilde{y}, \eta - \tilde{y} \rangle \geq \langle \tilde{x}, \eta - \tilde{y} \rangle \quad \forall \eta \in K.$$

Вибираючи  $\tilde{\eta} = \tilde{y}, \eta = y$  і додаючи, отримуємо

$$|y - \tilde{y}|^2 = \langle y - \tilde{y}, y - \tilde{y} \rangle \leq \langle x - \tilde{x}, y - \tilde{y} \rangle \leq |x - \tilde{x}| |y - \tilde{y}|. \quad \triangleright$$

**Теорема 2.11** (Брауер). Нехай  $K$  є компактною опуклою підмножиною  $\mathbf{R}^n$  та  $F : K \rightarrow K$  є неперервним відображенням. Тоді

$$\exists x \in K : \quad x = F(x). \quad \triangleleft \triangleright$$

**Теорема 2.12.** Нехай  $K$  є компактною опуклою підмножиною в  $\mathbf{R}^n$  та  $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$  є неперервним відображенням. Тоді

$$\exists x \in K : \quad \langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

◁ Достатньо довести, що

$$\exists x \in K : \quad \langle x, y - x \rangle \geq \langle x - F(x), y - x \rangle \quad \forall y \in K.$$

Відображення  $\text{Pr}_K \circ (I - F) : K \rightarrow K$  є неперервним, отже

$$\exists x \in K : \quad x = \text{Pr}_K \circ (I - F)(x).$$

Використовуючи лему 2.9, маємо

$$\langle x, y - x \rangle \geq \langle x - F(x), y - x \rangle \quad \forall y \in K. \quad \triangleright$$

Нехай  $K$  є замкнутою опуклою підмножиною  $\mathbf{R}^n$  і  $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$  є неперервним відображенням. Розглянемо задачу:

$$\text{знайти } x \in K : \quad \langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K. \quad (2.5)$$

Якщо  $K$  обмежено, тоді існування розв'язку доведене в теоремі 2.12. У загальному випадку, розв'язку може не бути, наприклад, для  $K = \mathbf{R}$  і  $F(x) = e^x$ .

Позначимо через  $\Sigma_r = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq r\}$  замкнуту кулю радіусу  $r$  і

$$K_r = K \cap \Sigma_r.$$

При  $K_r \neq \emptyset$  із теореми 2.12 випливає, що

$$\exists x_r \in K_r : \quad \langle F(x_r), y - x_r \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K_r. \quad (2.6)$$

**Теорема 2.13.** *Нехай  $K$  є замкнутою опуклою підмножиною в  $\mathbf{R}^n$  та  $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$  є неперервним відображенням. Тоді*

$$\exists \text{ розв'язок задачі (2.5)} \quad \Leftrightarrow$$

*для деякого  $r > 0$  розв'язок задачі (2.6) задовольняє умові  $|x_r| < r$ .*

$\triangleleft(\Rightarrow)$  Якщо  $x$  розв'язок задачі (2.5), тоді  $x$  розв'язок задачі (2.6) при  $|x| < r$  ( $\Rightarrow$ ) $\triangleright$

$\triangleleft(\Leftarrow)$  Якщо  $|x_r| < r$  тоді

$$\forall y \in K \quad \exists \varepsilon \geq 0 \quad : \quad w = x_r + \varepsilon(y - x_r) \in K_r.$$

Таким чином,

$$x_r \in K_r \subset K : \quad 0 \leq \langle F(x_r), w - x_r \rangle = \varepsilon \langle F(x_r), y - x_r \rangle \quad \forall y \in K,$$

тобто  $x_r$  розв'язок задачі (2.5). ( $\Leftarrow$ ) $\triangleright$

**Теорема 2.14.** *Нехай  $K$  є замкнутою опуклою підмножиною в  $\mathbf{R}^n$  та  $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$  є неперервним відображенням таким, що*

$$\frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0 \rangle}{|x - x_0|} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad x \in K, \quad (2.7)$$

*для деякого  $x_0 \in K$ . Тоді  $\exists$  розв'язок задачі (2.5).*

◁ Нехай  $H > |F(x_0)|$  та  $r \geq |x_0|$  такі, що

$$\langle F(x) - F(x_0), x - x_0 \rangle \geq H |x - x_0| \quad \text{при} \quad |x| \geq r, \quad x \in K.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \langle F(x), x - x_0 \rangle &\geq H |x - x_0| + \langle F(x_0), x - x_0 \rangle \geq \\ &\geq H |x - x_0| - |F(x_0)| |x - x_0| \geq (H - |F(x_0)|)(|x| - |x_0|) > 0 \end{aligned}$$

при  $|x| \geq r$ . Якщо  $x_r \in K_r$  розв'язок задачі (2.6), тоді

$$\langle F(x_r), x_r - x_0 \rangle = -\langle F(x_r), x_0 - x_r \rangle \leq 0$$

і тому  $|x_r| < r$ . ▷

**В2.3.** Умова (2.7) називається умовою *коерцитивності* для  $F$ .

Варіаційна нерівність (2.5) може мати багато розв'язків, наприклад, при  $F=0$ .

Нехай  $x, \tilde{x} \in K$  є розв'язки цієї нерівності. Тоді

$$\langle F(x), (y - x) \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K,$$

$$\langle F(\tilde{x}), (y - \tilde{x}) \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Обираючи  $y = \tilde{x}$  в першій нерівності,  $y = x$  в другій нерівності і складаючи ці нерівності, отримуємо

$$\langle F(x) - F(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle \leq 0.$$

**В2.4.** Відображення  $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$  називається *монотонним*, якщо

$$\langle F(x) - F(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle \geq 0 \quad \forall x, \tilde{x} \in K.$$

Відображення  $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$  називається *строго монотонним*, якщо

$$\langle F(x) - F(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle > 0 \quad \forall x, \tilde{x} \in K : x \neq \tilde{x}.$$

Для деякого  $p \in \mathbf{R}_+$ , відображення  $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$  називається *p-сильно монотонним*, якщо

$$\langle F(x) - F(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle \geq |x - \tilde{x}|^p \quad \forall x, \tilde{x} \in K.$$

Таким чином, доведені наступні твердження.

**Теорема 2.15.** *Нехай  $K$  є замкнутою опуклою підмножиною  $\mathbf{R}^n$  та  $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$  є неперервним, коерцитивним і строго монотонним відображенням. Тоді*

$$\exists 1 x \in K : \quad \langle F(x), (y - x) \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K. \quad \triangleleft \triangleright$$

**Теорема 2.16.** *Нехай  $K$  є замкнутою опуклою підмножиною  $\mathbf{R}^n$  та  $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$  є неперервним і  $p$ -сильно монотонним відображенням при  $p > 1$ . Тоді*

$$\exists 1 x \in K : \quad \langle F(x), (y - x) \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K. \quad \triangleleft \triangleright$$

**Приклад 2.17.** Визначимо замкнуту опуклу множину

$$\overline{\mathbf{R}}_+^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \}$$

неперервну функцію  $F : \overline{\mathbf{R}}_+^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  і розглянемо задачу:

$$\text{знайти } \dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}_+^n : \quad F(\dot{x}) \in \overline{\mathbf{R}}_+^n \quad \text{і} \quad \langle F(\dot{x}), x - \dot{x} \rangle = 0 \quad \forall x \in \overline{\mathbf{R}}_+^n. \quad (2.8)$$

**Завдання для самостійної роботи:** перевірити, що елемент  $\dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}_+^n$  є розв'язком варіаційної нерівності:

$$\text{знайти } \dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}_+^n : \quad \langle F(\dot{x}), x - \dot{x} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \overline{\mathbf{R}}_+^n$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} \in \overline{\mathbf{R}}_+^n \quad \text{є розв'язком задачі (2.8).}$$

**Задача із перешкодою.** Нехай  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  є обмеженою областю (зв'язаною відкритою множиною) із гладкою межею  $\partial\Omega$  і  $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$  така що  $\psi \leq 0$  на  $\partial\Omega$ . Визначимо опуклу множину

$$K = \{ v \in C^1(\overline{\Omega}) : \quad v \geq \psi \text{ в } \Omega \quad \text{і} \quad v = 0 \text{ на } \partial\Omega \} \subset C^1(\overline{\Omega})$$

і розглянемо задачу оптимізації:

$$f(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \rightarrow \inf, \quad v \in K. \quad (2.9)$$

Припустимо, що розв'язок  $u \in K$  задачі (2.9) існує. Тоді функція

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} |\nabla[u(x) + t(v(x) - u(x))]|^2 dx, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

визначена і досягає локальний мінімум при  $t = 0$ , тому (як в теоремі 2.5) маємо

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) - \nabla u(x) \rangle dx \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

яке називається *варіаційною нерівністю із перешкодою*.

**Задача про мінімальну поверхню.** Нехай  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  і  $K$  як в попередньому прикладі. Розглянемо задачу оптимізації:

$$f(v) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla v(x)|^2} dx \rightarrow \inf, \quad v \in K. \quad (2.10)$$

Це задача про знаходження функції  $u \in K$ , графік якої є мінімальною поверхнею серед всіх поверхонь графіків функцій  $v \in K$ .

Припустимо, що розв'язок  $u \in K$  задачі (2.10) існує. Тоді відповідна варіаційна нерівність має вигляд

$$\text{знайти } u \in K : \int_{\Omega} \frac{\langle \nabla u(x), \nabla v(x) - \nabla u(x) \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} dx \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

### 3. Простори Соболева.

**В3.1.** Відкрита обмежена зв'язна підмножина  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  називається *областю* у  $\mathbf{R}^n$ . Замикання області  $\Omega$  в  $\mathbf{R}^n$  позначається  $\bar{\Omega}$  (і є компактною множиною), а

$$\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$$

називається *межею* цієї області.

Визначимо на лінійному просторі  $C^1(\bar{\Omega}) = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : \nabla v \in C^0(\bar{\Omega})^n\}$  норми

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_{W^{1,\infty}} = \max \{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \} \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

**В3.2.** Поповнення нормованого простору  $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$  позначається

$$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \quad \text{при} \quad 1 \leq p \leq \infty$$

та називається простором *Соболева першого порядку* інтегрованих у ступені  $p$  (класів еквівалентних) функцій на  $\Omega$ . Зокрема, для елементів із  $W^{1,p}(\Omega)$  визначений інтеграл і диференціювання. У відповідності із теоремою.

**Теорема 3.3.** Розглянемо оператора градієнта  $\nabla$  як лінійний оператор із  $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$  в  $(L^p(\Omega)^n, \|\cdot\|_{L^p(\Omega)^n})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Тоді  $\nabla \in B(C^1(\bar{\Omega}), L^p(\Omega)^n)$ ,

$$\exists 1 \quad \bar{\nabla} \in B(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n) : \quad \bar{\nabla}(v) = \nabla(v) \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega})$$

*i*

$$\|\bar{\nabla}\|_{B(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n)} = 1. \quad \triangleleft \triangleright$$

Для цілого  $l \geq 1$  визначимо лінійні простори

$$C^l(\bar{\Omega}) = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : \nabla v \in C^0(\bar{\Omega})^n, \dots, \nabla^l v \in C^0(\bar{\Omega})^{n^l}\},$$

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{l=1}^{\infty} C^l(\bar{\Omega})$$

і розглянемо лінійний простір функцій, що є нескінченно диференційованими і мають компактні носії

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \text{supp } v \subset \Omega\},$$

де  $\text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}}$  називається *носієм* функції  $v$ .

**В3.4.** Поповнення нормованого простору  $(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$  позначається

$$(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \quad \text{при} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

За визначенням,  $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$  є повним підпростором в  $W^{1,p}(\Omega)$ .

**(Завдання для самостійної роботи:**

1. Нехай  $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$ ,  $s > 0$  і

$$\psi(x) = |x|^{-s}.$$

Перевірити, що

$$\psi \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow ps < n \quad \text{і} \quad \psi \in W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow p(s+1) < n.$$

2. Нехай  $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$  і

$$u(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Перевірити, що  $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)^n$  при  $1 \leq p < n$ .)

## 4. Задача із перешкодою.

При  $p = 2$  простір  $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$  є гільбертовим із скалярним добутком

$$(u, v)_{W^{m,p}(\Omega)} = \int_{\Omega} u \bar{v} dx + \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \bar{v}) dx,$$

де зазвичай пишуть  $\nabla$  замість  $\bar{\nabla}$ . Такі гільбертові простори позначаються також

$$(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) = (W^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)})$$

і  $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}) = (W_0^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)})$ .

Зокрема, простір  $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$  над  $\mathbf{R}$  є гільбертовим із скалярним добутком

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) dx.$$

**Теорема 4.1** (нерівність Фрідріхса). *Нехай  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Тоді існує постійна  $C = C(\Omega)$  така, що*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}. \quad \triangleleft \triangleright$$

Із нерівності Фрідріхса випливає, що норми  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  і  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)^n}$  є еквівалентними на  $H_0^1(\Omega)$ . Дійсно, для  $u \in H_0^1(\Omega)$  маємо наступні нерівності

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq (1 + C^2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 = (1 + C^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Таким чином,  $H_0^1(\Omega)$  можна розглядати із скалярним добутком

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) dx.$$

**В4.2.** Нехай  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  є обмеженою областю (зв'язаною відкритою множиною) і  $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$  така що  $\psi \leq 0$  на  $\partial\Omega$ . Визначимо опуклу множину

$$K = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v \geq \psi \text{ в } \Omega \text{ і } v = 0 \text{ на } \partial\Omega\} \subset C^1(\bar{\Omega})$$

і розглянемо задачу оптимізації:

$$f(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \rightarrow \inf, \quad v \in K, \quad (4.1)$$

яка називається *задачею мінімізації із перешкодою* у класичній постановці.

Припустимо, що розв'язок  $u \in K$  задачі (4.1) існує. Тоді функція

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} |\nabla[u(x) + t(v(x) - u(x))]|^2 dx, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

визначена і досягає локальний мінімум при  $t = 0$ , тому маємо нерівність

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) - \nabla u(x) \rangle dx \geq 0 \quad \forall v \in K, \quad (4.2)$$

яка називається *варіаційною нерівністю із перешкодою* у класичній постановці.

Задачі (4.1) і (4.2) можуть не мати розв'язків. Проте, ці задачі завжди мають розв'язки "в слабкій постановці".

**В4.3.** Нехай  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  при  $1 \leq p \leq \infty$  і  $E \subset \bar{\Omega}$ . Пишуть

$$u \geq 0 \quad \text{на } E \quad \text{в } W^{1,p}(\Omega),$$

якщо існує послідовність  $\{u_n\} \subset C^1(\bar{\Omega})$  така, що

$$u_n \geq 0 \quad \forall x \in E \quad \text{і} \quad u_n \rightarrow u \quad \text{у нормі } W^{1,p}(\Omega).$$

Якщо  $-u \geq 0$  на  $E$  в  $W^{1,p}(\Omega)$ , тоді пишуть  $u \leq 0$  на  $E$  в  $W^{1,p}(\Omega)$ . Відповідно, якщо  $u \geq 0$  і  $u \leq 0$  на  $E$  в  $W^{1,p}(\Omega)$ , тоді пишуть

$$u = 0 \quad \text{на } E \quad \text{в } W^{1,p}(\Omega).$$

Нехай  $\psi \in H^1(\Omega)$  така що  $\psi \leq 0$  на  $\partial\Omega$  в  $H^1(\Omega)$ . Визначимо множину

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi \quad \text{в } \Omega\} \subset H_0^1(\Omega). \quad (4.3)$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що множина  $K \subset H^1(\Omega)$  є повною та опуклою ( $a, b \in K, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \alpha a + (1 - \alpha) b \in K$ )).

**Теорема 4.4** ( $\exists 1$  розв'язку задачі мінімізації з перешкодою). *Нехай множина  $K \subset H_0^1(\Omega)$  визначена рівністю (4.3). Тоді*

$$\exists 1 u \in K : \quad f(u) = \min_{v \in K} f(v), \quad f(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$$

*і  $u \in K$  задовольняє варіаційний нерівності*

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v - \nabla u \rangle dx \geq 0 \quad \forall v \in K. \quad (4.4)$$

◁ Позначимо через  $v_k$  мінімізуючу послідовність, тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k\|_{H_0^1(\Omega)} = m = \inf_{v \in K} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (4.5)$$

Існування такої послідовності випливає із визначення інфімуму. Із закону паралелограма (виконаного у кожному гільбертовому просторі)

$$\|d + b\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|d - b\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = 2\|d\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\|b\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \forall d, b \in H_0^1(\Omega),$$

при  $d = v_k$  і  $b = v_h$ , отримуємо

$$\|v_k - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = 2\|v_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\|v_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(v_k + v_h)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Множина  $K$  є опуклою, тому  $\frac{1}{2}(v_k + v_h) \in K$  і  $m^2 \leq \left\|\frac{1}{2}(v_k + v_h)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2$ . Отже

$$\|v_k - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2\|v_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\|v_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - 4m^2$$

і послідовність  $\{v_k\} \subset K$  є фундаментальною через (4.5).

Таким чином

$$\exists u \in K : \quad f(u) = \min_{v \in K} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \min_{v \in K} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Крім того, для  $v \in K$  функція

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} |\nabla[u(x) + t(v(x) - u(x))]|^2 dx, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

визначена і досягає локальний мінімум при  $t = 0$ , тому  $u \in K$  задовольняє варіаційний нерівності (4.4).

Нехай  $u, \tilde{u} \in K$  розв'язки варіаційної нерівності (4.4), тобто

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v - \nabla u \rangle dx &\geq 0 & \forall v \in K, \\ \int_{\Omega} \langle \nabla \tilde{u}, \nabla \tilde{v} - \nabla \tilde{u} \rangle dx &\geq 0 & \forall \tilde{v} \in K. \end{aligned}$$

Обираючи  $v = \tilde{u}$  в першій нерівності,  $\tilde{v} = u$  в другій нерівності і додаючи ці нерівності, отримуємо

$$\|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u = \tilde{u} \quad \triangleright$$

**Приклад 4.5.** Розглянемо розв'язок  $u \in K$  варіаційної нерівності (4.4) за додаткових умов  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  і  $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$ . Тоді

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{в } \Omega_1, & u &= \psi \quad \text{в } \Omega_0, \\ u &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned}$$

де

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : u(x) > \psi(x)\} \quad \text{і} \quad \Omega_0 = \{x \in \Omega : u(x) = \psi(x)\}.$$

◁ Нехай  $u \in K$  задовольняє (4.4) і  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ . Тоді знайдеться  $\alpha \in \mathbf{R}$  таке, що  $u(x) - \psi(x) \geq \alpha > 0$  при  $x \in \text{supp } \varphi$ . Продовжуючи  $\varphi$  нулем на  $\Omega_0$ , маємо

$$v = u \pm \varepsilon \varphi \geq \psi \quad \text{в } \Omega$$

при  $0 < \varepsilon < \alpha [\max |\varphi(x)|]^{-1}$ , тобто  $v \in K$ .

Обираючи таке  $v \in K$  в (4.4), отримуємо

$$\pm \varepsilon \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \varphi) dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$$

або

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1).$$

Таким чином

$$-\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad u = \psi \quad \text{в } \Omega_0. \quad \triangleright$$

Нехай  $\psi_1, \psi_2 \in H^1(\Omega) : \psi_2 \geq \psi_1$  в  $\Omega$ ,  $\psi_1 \leq 0$  і  $\psi_2 \geq 0$  на  $\partial\Omega$  в  $H^1(\Omega)$ .

Визначимо множину

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : \psi_2 \geq v \geq \psi_1 \text{ в } \Omega \text{ і } v = 0 \text{ на } \partial\Omega \text{ в } H^1(\Omega)\}. \quad (4.6)$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що множина  $K \subset H_0^1(\Omega)$  є повною та опуклою.)

Повторюючи доведення теореми 4.4, отримуємо наступне твердження.

**Теорема 4.6** ( $\exists 1$  розв'язку задачі мінімізації з перешкодами). *Нехай множина  $K \subset H_0^1(\Omega)$  визначена рівністю (4.6). Тоді*

$$\exists 1 u \in K : \quad f(u) = \min_{v \in K} f(v), \quad f(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \quad \triangleleft \triangleright$$

Нехай  $\psi_1, \psi_2 \in H^1(\Omega) : \psi_2 \geq \psi_1$  на  $\partial\Omega$  в  $H^1(\Omega)$ . Визначимо множину

$$K = \{v \in H^1(\Omega) : \psi_2 \geq v \geq \psi_1 \text{ на } \partial\Omega \text{ в } H^1(\Omega)\}. \quad (4.7)$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що множина  $K \subset H^1(\Omega)$  є повною та опуклою.)

Повторюючи доведення теореми 4.4, отримуємо також наступне твердження.

**Теорема 4.7** ( $\exists 1$  розв'язку задачі мінімізації з перешкодами на межі). *Нехай множина  $K \subset H^1(\Omega)$  визначена рівністю (4.7). Тоді*

$$\exists 1 u \in K : \quad f(u) = \min_{v \in K} f(v), \quad f(v) = \int_{\Omega} (|\nabla v(x)|^2 + |v(x)|^2) dx. \quad \triangleleft \triangleright$$

Відзначимо, що теорема може бути не виконаною для  $f(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$ , оскільки таке  $f(v)$  не визначає норму на  $H^1(\Omega)$ .

## 6. Варіаційні нерівності у гільбертових просторах.

Розглянемо гільбертів простір  $(H, (\cdot, \cdot)_H)$  над  $\mathbf{R}$ . Відображення

$$a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}, \quad u, v \mapsto a(u, v)$$

називається *білінійною формою* на  $H$ , якщо  $a(u, v)$  неперервна і лінійна по кожному із аргументів. Білінійна форма *симетрична*, якщо

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in H.$$

**В6.1.** Білінійна форма  $a(u, v)$  називається *коерцитивною* на  $H$ , якщо

$$\exists \alpha > 0 : \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H.$$

З визначень випливає, що білінійна коерцитивна симетрична форма  $a(u, v)$  визначає норму  $\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}$  на  $H$ , еквівалентну нормі  $\|v\|_H$ .

Кожен лінійний неперервний оператор  $A : H \rightarrow H^*$  визначає білінійну форму

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in H. \quad (6.1)$$

Дійсно, білінійність  $a(u, v)$  випливає із лінійності  $A$  і білінійності  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , а неперервність із нерівності

$$|a(u, v)| = |\langle Au, v \rangle| \leq \|Au\|_{H^*} \|v\|_H \leq \|A\|_{B(H, H^*)} \|u\|_H \|v\|_H.$$

З іншого боку, якщо задана білінійна форма  $a(u, v)$  на  $H$ , тоді для кожного  $u \in H$  відображення

$$v \mapsto a(u, v) \quad \text{для } v \in H,$$

визначає лінійний неперервний функціонал на  $H$ . Тому існує лінійний оператор  $A : H \rightarrow H^*$ , такою що виконана рівність (6.1).

**Теорема 6.2** ( $\exists$  1 розв'язку варіаційної нерівності у гільбертовому просторі).

Нехай  $K$  є повною опуклою підмножиною гільбертового простору  $H$ ,  $f \in H^*$  і  $a(u, v)$  є білінійною коерцитивною формою на  $H$ . Тоді

$$\exists 1 u \in K : \quad a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \quad (6.2)$$

Крім того, відображення  $f \mapsto u$  є ліпшицевим, тобто, якщо  $u, \tilde{u} \in H$  розв'язки варіаційної нерівності (6.2), відповідні  $f, \tilde{f} \in H^*$ , тоді

$$\|u - \tilde{u}\|_H \leq (1/\alpha)\|f - \tilde{f}\|_{H^*}. \quad (6.3)$$

◁ Доведемо спочатку нерівність (6.3). Нехай  $u, \tilde{u} \in H$  розв'язки варіаційної нерівності (6.2), відповідні  $f, \tilde{f} \in H^*$ , тобто

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K,$$

$$a(\tilde{u}, \tilde{v} - \tilde{u}) \geq \langle \tilde{f}, \tilde{v} - \tilde{u} \rangle \quad \forall \tilde{v} \in K.$$

Обираючи  $v = \tilde{u}$  в першій нерівності,  $\tilde{v} = u$  в другій нерівності і складаючи ці нерівності, отримуємо  $a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) \leq \langle f - \tilde{f}, u - \tilde{u} \rangle$ . Таким чином, маємо

$$\alpha \|u - \tilde{u}\|_H^2 \leq \|f - \tilde{f}\|_{H^*} \|u - \tilde{u}\|_H.$$

Звідки слідує (6.3) і, крім того, єдиність розв'язку варіаційної нерівності (6.2) (якщо цей розв'язок існує). Далі, ототожнюємо  $H$  і  $H^*$ .

Доведення існування розв'язку ґрунтується на наступних лемах.

**Лема 6.3** (про проєкцію на опуклу множину) *Нехай  $K$  є повною опуклою підмножиною  $H$ . Тоді для кожного  $w \in H$*

$$\exists 1 \text{ Pr}_K(w) \in K : \|w - \text{Pr}_K(w)\|_H = \inf_{v \in K} \|w - v\|_H.$$

Крім того, проєкція  $\text{Pr}_K(w)$  елементу  $w \in H$  на  $K$  характеризується нерівністю

$$\langle w - \text{Pr}_K(w), v - \text{Pr}_K(w) \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \quad (6.4)$$

і задовольняє нерівності  $\|\text{Pr}_K(v) - \text{Pr}_K(w)\|_H \leq \|v - w\|_H$ .

◁◁ Доведення цієї леми є аналогічним доведенню теореми 2.8. ▷▷

**Лема 6.4.** *Нехай  $K$  є повною опуклою підмножиною  $H$  і  $a(u, v)$  є білінійною коерцитивною формою на  $H$ . Тоді  $u \in K$  є розв'язком задачі (6.2)*

$$\Leftrightarrow u = \text{Pr}_K(u - \gamma(Au - f)), \quad (6.5)$$

де  $\gamma > 0$  і оператор  $A : H \rightarrow H$  такий, що  $a(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in H$ .

Таким чином,  $u \in K$  є нерухомою точкою оператора

$$Bu = \text{Pr}_K(u - \gamma(Au - f)). \quad (6.6)$$

« $\Leftarrow$  Визначимо  $w = u - \gamma(Au - f)$ . В силу (6.4) співвідношення (6.5) еквівалентно тому, що  $u \in K$  та

$$\langle (u - \gamma(Au - f)) - u, v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K,$$

тобто  $u \in K$  розв'язок варіаційної нерівності (6.2), оскільки  $\gamma > 0$ .  $\gg$

Для доведення теореми 6.2 відмітимо, що

$$\|Av - Aw\|_H \leq M \|v - w\|_H \quad \text{і} \quad -\langle Av - Aw, v - w \rangle \leq -\alpha \|v - w\|_H^2, \quad (6.7)$$

де  $M = \|A\|_{B(H,H)}$ . Таким чином, враховуючи, що

$$\|\text{Pr}_K(v) - \text{Pr}_K(w)\|_H \leq \|v - w\|_H,$$

маємо

$$\begin{aligned} \|Bv - Bw\|_H^2 &\leq \|v - \gamma(Av - f) - w + \gamma(Aw - f)\|_H^2 = \\ &= \|v - w - \gamma(Av - Aw)\|_H^2 = \\ &= \|v - w\|_H^2 - 2\gamma \langle v - w, Av - Aw \rangle + \gamma^2 \|Av - Aw\|_H^2 \leq \\ &\leq \|v - w\|_H^2 - 2\gamma \alpha \|v - w\|_H^2 + \gamma^2 M^2 \|v - w\|_H^2 = \\ &= (1 - 2\gamma \alpha + \gamma^2 M^2) \|v - w\|_H^2, \end{aligned}$$

де  $B$  визначено співвідношенням (6.6). Таким чином, якщо

$$0 < \gamma < 2\alpha/M^2,$$

тоді оператор  $B$  є стискаючим із постійною стиснення

$$\sqrt{1 - 2\gamma \alpha + \gamma^2 M^2} < 1$$

і теорема 6.2 випливає із теореми Банаха про стискаючі відображення.  $\triangleright$

Насправді, доведено наступне, більш загальне чим теорема 6.2, твердження.

**Теорема 6.5** ( $\exists 1$  розв'язку варіаційної нерівності у гільбертовому просторі).  
Нехай  $K$  є повною опуклою підмножиною  $H$  і відображення  $A : H \rightarrow H$  задовольняє нерівностям (6.7). Тоді

$$\exists 1 u \in K : \quad \langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \quad (6.8)$$

Крім того, відображення  $f \mapsto u$  є ліпшицевим, тобто, якщо  $u, \tilde{u} \in H$  розв'язки варіаційної нерівності (6.8), відповідні  $f, \tilde{f} \in H$ , тоді

$$\|u - \tilde{u}\|_H \leq (1/\alpha) \|f - \tilde{f}\|_H. \quad \triangleleft \triangleright$$

Нехай  $\varphi \in H^1(\Omega)$  така що  $\varphi \leq 0$  на  $\partial\Omega$ . Визначимо множину

$$K = \{v \in H_0^1(\overline{\Omega}) : v \geq \varphi \text{ в } \Omega\} \subset H_0^1(\Omega).$$

Таким чином, для  $f \in L^2(\Omega)$  із теореми 6.2 випливає, що

$$\exists 1 u \in K : \quad \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla(v - u)) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx \quad \forall v \in K, \quad (6.9)$$

де

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx, \quad \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx.$$

Крім того, відображення  $f \mapsto u$  є ліпшицевим.

Задача (6.9) також називається *варіаційною нерівністю із перешкодою*.

Зокрема, задача оптимізації (із перешкодою):

$$F(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx - 2 \int_{\Omega} f v dx \rightarrow \min, \quad v \in K,$$

має розв'язок  $u \in K$ . Оскільки при  $0 \leq t \leq 1$  функція

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} |\nabla[u(x) + t(v(x) - u(x))]|^2 dx - 2 \int_{\Omega} f [u(x) + t(v(x) - u(x))] dx,$$

визначена і досягає локальний мінімум при  $t = 0$  та

$$\int_{\Omega} [\nabla u(x)][\nabla(v(x) - u(x))] dx \geq \int_{\Omega} f(x)(v(x) - u(x)) dx \quad \forall v \in K.$$

Таким чином, задача із перешкодою має єдиний розв'язок  $u \in K$ .

## 7. Варіаційні нерівності у банахових просторах

**Теорема 7.1.** *Нехай  $K$  є повною опуклою підмножиною гільбертового простору  $H$ ,  $f \in H^*$  і  $a(u, v)$  є білінійною коерцитивною формою на  $H$ . Тоді*

$$\exists 1 u \in K : \quad a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \quad \triangleleft \triangleright$$

**Теорема 7.2** (Мінті). *Нехай  $K$  є повною опуклою підмножиною банахового простору  $V$ ,  $f \in V^*$ ,  $A : V \rightarrow V^*$  є неперервним відображенням, яке монотонне, тобто*

$$\langle A(v) - A(w), v - w \rangle \geq 0 \quad \forall v, w \in V. \quad (7.1)$$

*Тоді задача*

$$\text{знайти } u \in K : \quad \langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K \quad (7.2)$$

*еквівалентна задачі*

$$\text{знайти } u \in K : \quad \langle A(v), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \quad (7.3)$$

$\triangleleft (\Rightarrow)$  Нехай  $u \in K$  задовольняє (7.2)  $\forall v \in K$ , тоді

$$\langle A(v), v - u \rangle = \langle A(u), v - u \rangle + \langle A(v) - A(u), v - u \rangle.$$

Використовуючи умову монотонності (7.1) і (7.2), отримуємо

$$\langle A(v), v - u \rangle \geq \langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K,$$

тобто  $u \in K$  задовольняє (7.3)  $\forall v \in K$ .  $(\Rightarrow) \triangleright$

$\triangleleft (\Rightarrow)$  Нехай  $u \in K$  задовольняє (7.3)  $\forall v \in K$ . Фіксуємо  $w \in K$ ,  $t \in [0, 1]$  та обираємо  $v = (1 - t)u + tw = u + t(w - u)$  в (7.3), тоді

$$\begin{aligned} \langle A(v), v - u \rangle &= \langle A(u + t(w - u)), t(w - u) \rangle \\ &= t \langle A(u + t(w - u)), w - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle = t \langle f, w - u \rangle. \end{aligned}$$

Таким чином, при  $t > 0$  маємо

$$\langle A(u + t(w - u)), w - u \rangle \geq \langle f, w - u \rangle \quad \forall w \in K$$

і обчислюючи  $\lim_{t \rightarrow 0+}$  отримуємо, що  $u \in K$  задовольняє (7.2)  $\forall w \in K$ .  $(\Rightarrow) \triangleright$

**Теорема 7.3.** *Нехай  $K$  є повною опуклою підмножиною банахового простору  $V$ ,  $f \in V^*$ ,  $A : V \rightarrow V^*$  є неперервним монотонним відображенням.*

*Тоді множина розв'язків задачі (еквівалентній задаче (7.2)):*

$$\text{знайти } u \in K : \quad \langle A(v), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K \quad (7.3)$$

*є повною та опуклою.*

◁ Нехай  $u_1, u_2 \in K$  розв'язки задачі (7.3). Тоді для

$$u = tu_1 + (1 - t)u_2 \in K$$

при  $t \in [0, 1]$  маємо

$$\begin{aligned} \langle A(v), v - u \rangle &= \langle A(v), t(v - u_1) + (1 - t)(v - u_2) \rangle = \\ &= t\langle A(v), v - u_1 \rangle + (1 - t)\langle A(v), v - u_2 \rangle \geq \\ &\geq t\langle f, v - u_1 \rangle + (1 - t)\langle f, v - u_2 \rangle = \\ &= \langle f, t(v - u_1) + (1 - t)(v - u_2) \rangle = \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K, \end{aligned}$$

тобто множина розв'язків задачі (7.3) є опуклою.

Нехай  $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$  послідовність розв'язків задачі (7.3) і  $u_m \rightarrow u$  в  $V$ . Тоді  $u \in K$ , оскільки  $K$  є повним, і

$$\langle A(v), v - u_m \rangle \geq \langle f, v - u_m \rangle \quad \forall v \in K.$$

Обчислюючи  $\lim_{m \rightarrow \infty}$  в цій нерівності для кожного  $v \in K$ , отримуємо

$$\langle A(v), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K,$$

тобто множина розв'язків задачі (7.3) є повною. ▷

**В7.4.** *Послідовність  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$  нормованого простору  $(L, \|\cdot\|_L)$  називається слабко збіжною до  $x \in L$  (позначення  $x_k \rightharpoonup x$ ), якщо*

$$\langle f, x_k \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad \forall f \in L^* = B(L, \mathbf{C}).$$

**Теорема 7.5** (про слабку компактність). *Нехай  $(L, \|\cdot\|_L)$  є рефлексивний простір і послідовність  $\{x_k\}_{m=1}^{\infty} \subset L$  така, що*

$$\|x_m\|_L \leq M \quad \text{для деякого } M \in \mathbf{R}.$$

Тоді існують  $x \in L$  і підпослідовність  $\{x_{\tilde{m}}\}_{\tilde{m}=1}^{\infty} \subset \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L$  такі, що

$$x_{\tilde{m}} \rightharpoonup x. \quad \triangleleft \triangleright$$

Нехай  $K$  є повною опуклою підмножиною у рефлексивному банаховому просторі  $V$ . Припустимо, що існує неперервне обмежене монотонне відображення  $B : V \rightarrow V^*$  таке, що

$$B(v) = \theta \quad \Leftrightarrow \quad v \in K.$$

Таке відображення називається *оператором штрафу* (відповідним  $K \subset V$ ).

Якщо  $V$  гільбертів простір, тоді, наприклад,  $B(v) = v - \text{Pr}_K(v)$  для  $v \in V$ .

Для  $f \in V^*$  і кожного  $\varepsilon > 0$  розглянемо задачу (з штрафом)

$$\text{знайти } u_\varepsilon \in V : \quad \langle A(u_\varepsilon) + \varepsilon^{-1}B(u_\varepsilon), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V, \quad (7.4)$$

тобто знайти  $u_\varepsilon \in V$  :

$$A(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}B(u_\varepsilon) = f \quad \text{в } V^*.$$

**Теорема 7.6** ( $\exists$  для варіаційної нерівності у банаховому просторі). *Нехай  $K$  є повною опуклою підмножиною сепарабельного банахового рефлексивного простору  $V$ ,  $\theta \in K$ , існує оператор штрафу  $B : V \rightarrow V^*$ ,  $f \in V^*$  та  $A : V \rightarrow V^*$  є неперервним обмеженим монотонним відображенням таким, що*

$$\lim_{\|v\|_V \rightarrow \infty} \frac{\langle A(v), v \rangle}{\|v\|_V} \rightarrow \infty$$

(умова коерцитивності).

Тоді для кожного  $\varepsilon > 0$

$$\exists u_\varepsilon \in V : \quad \langle A(u_\varepsilon) + \varepsilon^{-1}B(u_\varepsilon), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V,$$

існують  $u \in V$  і підпослідовність  $\{u_{\tilde{\varepsilon}}\} \subset \{u_\varepsilon\} \subset V$  такі, що

$$u_{\tilde{\varepsilon}} \rightharpoonup u \quad \text{при} \quad \tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$$

та

$$\langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \quad (7.5)$$

◁ Відображення  $B_\varepsilon = A + \varepsilon^{-1}B$  є неперервним обмеженим і монотонним для кожного  $\varepsilon > 0$ , оскільки такі  $A$  і  $B$ . Крім того,  $B_\varepsilon$  є коерцитивним. Дійсно

$$\langle B_\varepsilon(v), v \rangle = \langle A(v), v \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle B(v) - B(\theta), v - \theta \rangle \geq \langle A(v), v \rangle,$$

оскільки  $B$  є монотонним (і  $B(\theta) = \theta$  для  $\theta \in K$ ), тому

$$\frac{\langle B_\varepsilon(v), v \rangle}{\|v\|_V} \geq \frac{\langle A(v), v \rangle}{\|v\|_V} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|v\|_V \rightarrow \infty.$$

Таким чином, для кожного  $\varepsilon > 0$  існує розв'язок  $u_\varepsilon \in V$  задачі (7.4) через теорему 7.8 (яка наведена надалі). Для кожного  $\varepsilon > 0$  також маємо

$$\langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle \leq \langle B_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle = \langle f, u_\varepsilon \rangle \leq \|f\|_{V^*} \|u_\varepsilon\|_V$$

або

$$\frac{\langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle}{\|u_\varepsilon\|_V} \leq \|f\|_{V^*}.$$

Це означає, що існує  $M > 0$  таке, що  $\|u_\varepsilon\|_V \leq M$ . Тоді через теорему 7.5 існують  $u \in V$  і підпослідовність  $\{u_{\tilde{\varepsilon}}\} \subset \{u_\varepsilon\} \subset V$  такі, що

$$u_{\tilde{\varepsilon}} \rightharpoonup u \quad \text{при} \quad \tilde{\varepsilon} \rightarrow 0.$$

Із (7.4) випливає, що

$$B(u_{\tilde{\varepsilon}}) = \tilde{\varepsilon}(f - A(u_{\tilde{\varepsilon}}))$$

де послідовність  $\{A(u_{\tilde{\varepsilon}})\}$  обмежена, оскільки відображення  $A$  обмежене. Тому

$$B(u_{\tilde{\varepsilon}}) \rightarrow \theta \quad \text{при} \quad \tilde{\varepsilon} \rightarrow 0.$$

Для  $v \in V$  використовуючи монотонність  $B$ , маємо

$$\langle B(v) - B(u_{\tilde{\varepsilon}}), v - u_{\tilde{\varepsilon}} \rangle \geq 0$$

і обчислюючи  $\lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0}$  отримуємо

$$\langle B(v), v - u \rangle \geq 0.$$

Виберемо  $v = u \pm tw$  в цій нерівності при  $t > 0$  і  $w \in V$ . Тоді

$$\pm \langle B(u \pm tw), w \rangle \geq 0 \quad \forall w \in V$$

і враховуючи неперервність укладаємо, що  $\langle B(u), w \rangle = 0 \Leftrightarrow B(u) = \theta \Leftrightarrow u \in K$ .

Для  $v \in K$  використовуючи монотонність  $A$  і  $B$ , маємо

$$\begin{aligned} \langle A(v) - f, v - u_{\tilde{\varepsilon}} \rangle &= \langle A(v) - A(u_{\tilde{\varepsilon}}), v - u_{\tilde{\varepsilon}} \rangle + \langle A(u_{\tilde{\varepsilon}}) - f, v - u_{\tilde{\varepsilon}} \rangle = \\ &= \langle A(v) - A(u_{\tilde{\varepsilon}}), v - u_{\tilde{\varepsilon}} \rangle + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \langle B(v) - B(u_{\tilde{\varepsilon}}), v - u_{\tilde{\varepsilon}} \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

та обчислюючи  $\lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0}$  отримуємо

$$\langle A(v) - f, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

тобто  $u \in K$  задовольняє (7.5) через теорему 7.2.  $\triangleright$

Крім того, якщо  $A$  є строго монотонним, тобто

$$\langle A(v) - A(w), v - w \rangle > 0 \quad \forall v, w \in V \quad \text{при} \quad v \neq w,$$

тоді елементи  $u_{\varepsilon}$  (для кожного  $\varepsilon$ ) і  $u$  в теоремі 7.6 визначені однозначно та

$$u_{\varepsilon} \rightharpoonup u \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

**Приклад 7.7.** Нехай  $\Omega$  є областю,  $V = H_0^1(\Omega)$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  і

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq 0 \text{ в } \Omega\} \subset H_0^1(\Omega).$$

Тоді можна вибрати оператор штрафу таким чином

$$\langle B(v), w \rangle = - \int_{\Omega} v^-(x) w(x) dx,$$

де  $v^-(x) = -\min\{v(x), 0\}$ . Відповідно, задача (7.4) має вигляд

$$\text{знайти } u_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} (\nabla u_{\varepsilon}, \nabla v) dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^- v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

і еквівалентна задаче: знайти  $u_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$  :

$$-\Delta u_{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} u_{\varepsilon}^- = f \quad \text{в } H^{-1}(\Omega), \quad u_{\varepsilon} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \quad \text{в } H^1(\Omega).$$

**Теорема 7.8** ( $\exists$  для варіаційної рівності у банаховому просторі). *Нехай  $V$  є сепарабельним банаховим рефлексивним простором,  $f \in V^*$  та  $A : V \rightarrow V^*$  є неперервним обмеженим монотонним коерцитивним відображенням.*

Тоді  $\exists u \in V$  :

$$\langle A(u), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (7.6)$$

**(Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що задача (7.6) еквівалентна задаче: знайти  $u \in V$  :

$$\langle A(v), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in V. \quad (7.7))$$

◁ Існують лінійно незалежні  $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset V$  такі, що простір

$$\tilde{V} = \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \forall \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad \forall m \in \mathbf{N} \right\}$$

є щільним в  $V$ .

Фіксуємо ціле  $m > 0$  і визначимо скінченновимірний лінійний простір

$$V_m = \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

Розглянемо наступну задачу : знайти  $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i^m w_i \in V_m$  таке, що

$$\langle A(v), v - u_m \rangle \geq \langle f, v - u_m \rangle \quad \forall v \in V_m. \quad (7.8)$$

Така задача є варіаційною нерівністю в  $\mathbf{R}^m$  і тому існування  $u_m \in V_m$  відоме.

Через теорему 7.2 ця задача еквівалентна задачі : знайти  $u_m \in V_m$  таке, що

$$\langle A(u_m), v - u_m \rangle \geq \langle f, v - u_m \rangle \quad \forall v \in V_m.$$

Звідки при  $v = \theta$  отримуємо

$$\langle A(u_m), u_m \rangle \leq \langle f, u_m \rangle \leq \|f\|_{V^*} \|u_m\|_V.$$

Це означає, що існує  $M > 0$  таке, що  $\|u_m\|_V \leq M$ . Тоді через теорему 7.5 існують  $u \in V$  і підпослідовність  $\{u_{\tilde{m}}\} \subset \{u_m\} \subset V$  такі, що

$$u_{\tilde{m}} \rightharpoonup u \quad \text{при} \quad \tilde{m} \rightarrow \infty.$$

Залишається обчислити  $\lim_{\tilde{m} \rightarrow \infty}$  в (7.8) і скористатися щільністю  $\tilde{V}$  в  $V$ , щоб отримати (7.7). ▷

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що оператор  $A = (-\Delta) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ , визначений рівністю

$$\langle A(u), v \rangle = -\langle \Delta u, v \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx$$

для  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ , задовольняє умовам обмеженості, неперервності, монотонності та коерцитивності.)

Нехай задано відображення  $a(x, \xi) : \Omega \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Розглянемо умови коли оператор  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ , визначений рівністю

$$\langle A(u), v \rangle = \int_{\Omega} (a(x, \nabla u(x)), \nabla v(x)) dx \quad (7.9)$$

для  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ , задовольняє умовам обмеженості, неперервності, монотонності та коерцитивності (тобто умовам теореми 7.6).

**Теорема 7.9** (Немицького). *Нехай  $p, p_1, \dots, p_m \in \mathbf{R}$  такі, що  $p \geq 1, p_1 \geq 1, p_2 \geq 1, \dots, p_m \geq 1$  і  $a(x, \xi) : \Omega \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  задовольняє умовам (Каратеодорі):*

- (а) функція  $a(x, \cdot) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  неперервна для майже всіх  $x \in \Omega$ ;
- (б) функція  $a(\cdot, \xi) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  вимірна для всіх  $\xi \in \mathbf{R}^m$ .

Тоді  $a(x, u_1(x), \dots, u_m(x)) \in L^p(\Omega)$  для  $\forall (u_1, \dots, u_m) \in L^{p_1}(\Omega) \times \dots \times L^{p_m}(\Omega)$

$$\Leftrightarrow \exists g \in L^p(\Omega) \text{ і } c \geq 0 : |a(x, \xi)| \leq g(x) + c \sum_{i=1}^m |\xi_i|^{p_i/p} \quad (7.10)$$

для майже всіх  $x \in \Omega$  і всіх  $\xi = (\xi_1 \dots \xi_m) \in \mathbf{R}^m$ .

Крім того, оператор (Немицького)

$$a(x, \cdot, \dots, \cdot) : L^{p_1}(\Omega) \times \dots \times L^{p_m}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega) \quad (7.11)$$

є обмеженим і неперервним, якщо виконано (7.10).

◁ Нехай  $(u_1, \dots, u_m) \in L^{p_1}(\Omega) \times \dots \times L^{p_m}(\Omega)$ . Перевіримо, наприклад, що тоді  $a(x, u_1(x), \dots, u_m(x)) \in L^p(\Omega)$ . Відомо і безпосередньо перевіряється, що функція  $a(x, u_1(x), \dots, u_m(x))$  є вимірною. Із (7.10) і відомої нерівності

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_m)^p \leq m^{p-1}(\alpha_1^p + \dots + \alpha_m^p) \quad (\text{де } \alpha_i \geq 0 \text{ і } p \geq 1)$$

маємо

$$|a(x, u_1(x), \dots, u_m(x))|^p \leq (m+1)^{p-1} |g(x)|^p + c^p (m+1)^{p-1} \sum_{i=1}^m |u_i(x)|^{p_i}.$$

Інтегруючи цю нерівність, отримуємо

$$\|a(x, u_1, \dots, u_m)\|_{L^p(\Omega)} \leq (m+1)^{(p-1)/p} \|g\|_{L^p(\Omega)} + c(m+1)^{(p-1)/p} \sum_{i=1}^m \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i/p} < \infty,$$

тобто оператор Немицького (7.11) є обмеженим. Доведення зворотного твердження і перевірка неперервності цього оператора є складнішим і громіздким.  $\triangleright$

Оператор  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  (визначений в (7.9)), який діє по формулі

$$u \mapsto A(u) = -\operatorname{div} (a(x, \nabla u(x)))$$

є неперервним і обмеженим, якщо  $a(x, \xi)$  задовольняє умовам Каратеодорі та

$$\exists \beta > 0 : |a(x, \xi)| \leq \beta |\xi|$$

для майже всіх  $x \in \Omega$  і всіх  $\xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ .

Дійсно, оператор  $(a(x, \nabla(\cdot))) : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^n$  є неперервним і обмеженим через теорему 7.9. Крім того, відомо, що оператор  $(-\operatorname{div}) : L^2(\Omega)^n \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  є неперервним і обмеженим.

Також, цей оператор є коерцитивним і (строго) монотонним якщо, наприклад

$$\exists \alpha > 0 : (a(x, \xi) - a(x, \zeta), \xi - \zeta) \geq \alpha |\xi - \zeta|^2$$

і  $a(x, 0) = 0$  для майже всіх  $x \in \Omega$  та всіх  $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^m$ .

Зокрема,  $a(x, \xi) = \xi$  задає оператор  $A = (-\Delta) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ , визначений рівністю (7.9), який діє по формулі

$$u \mapsto A(u) = -\Delta u(x),$$

і є неперервним, обмеженим, коерцитивним та монотонним.

## 8. Слабо напівнеперервні функціонали

**В8.1.** Розглянемо послідовність  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ , множина межових точок якої позначається через  $\lim \text{Pt} \{\alpha_k\}$  (тобто  $\alpha_0 \in \lim \text{Pt} \{\alpha_k\}$ , якщо існує підпослідовність  $\{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$  така, що  $\alpha_l \rightarrow \alpha_0$ ). Верхня та нижня границі цієї послідовності визначаються рівностями

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \sup \{ \alpha : \alpha \in \lim \text{Pt} \{ \alpha_k \} \}, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \inf \{ \alpha : \alpha \in \lim \text{Pt} \{ \alpha_k \} \}.$$

Відомо і безпосередньо перевіряється, що кожна обмежена послідовність має верхню та нижню границі. Крім того, послідовність  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$  є збіжною

$$\Leftrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha_k.$$

**Теорема 8.2** (Банаха-Штейнхауса). Нехай  $(L, \|\cdot\|_L)$  є нормованим простором та  $x_k \rightharpoonup x$ . Тоді існує стала  $C > 0$  така, що

$$\sup_k \|x_k\|_L \leq C. \quad \triangleleft \triangleright$$

**Теорема 8.3.** Нехай  $(L, \|\cdot\|_L)$  є нормованим простором та  $x_k \rightharpoonup x$ . Тоді

$$\|x\|_L \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_L. \quad \triangleleft \triangleright$$

**Приклад 8.4.** Нехай  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L = l^2(\mathbf{R})$  та  $x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots) \in l^2(\mathbf{R})$  має всі елементи  $x_k^i = 0$  за виключенням  $x_k^k = 1$ , тоді  $x_k \rightharpoonup 0$ . Однак,  $\|x_k\|_{l^2(\mathbf{R})} = 1$ , тобто така послідовність є слабо збіжною але не є сильно збіжною.

Таким чином, існують слабо збіжні послідовності  $x_k \rightharpoonup x$ , для яких

$$\|x\|_L < \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_L.$$

З іншого боку, для нормованого простору  $(L, \|\cdot\|_L)$  завжди

$$\|x\|_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_L,$$

якщо  $x_k \rightarrow x$ .

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що

$$f_k = \sin(2\pi k x) \rightharpoonup 0 \quad \text{в} \quad L^2(0, 1).)$$

**Теорема 8.5** (про сильну напівнеперервність знизу інтегрального функціонала). *Нехай  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  є областю,  $\beta \in \mathbf{R}$  і функція*

$$h(x, \xi) : \Omega \times \mathbf{R}^m \rightarrow [\beta, \infty]$$

*задовольняє умовам опуклості і Каратеодорі :*

- (а) *функція  $h(x, \cdot) : \mathbf{R}^m \rightarrow [\beta, \infty]$  опукла і неперервна для майже всіх  $x \in \Omega$ ;*
- (б) *функція  $h(\cdot, \xi) : \Omega \rightarrow [\beta, \infty]$  вимірна для всіх  $\xi \in \mathbf{R}^m$ .*

*Тоді*

$$v_k \rightarrow v \text{ в } L^1(\Omega)^m \Rightarrow \int_{\Omega} h(x, v(x)) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h(x, v_k(x)) dx. \quad \triangleleft \triangleright \quad (8.1)$$

Співвідношення (8.1) називається умовою *сильної напівнеперервності знизу* інтегрального функціонала (на  $L^1(\Omega)^m$ ). Відповідно, умова (секвенціальної) *слабкої напівнеперервності знизу* інтегрального функціонала (на  $L^1(\Omega)^m$ ) визначається співвідношенням

$$v_k \rightharpoonup v \text{ в } L^1(\Omega)^m \Rightarrow \int_{\Omega} h(x, v(x)) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h(x, v_k(x)) dx. \quad (8.2)$$

**Теорема 8.6** (про сильну і слабку напівнеперервність знизу функціонала). *Нехай  $B$  є нормованим простором і функціонал  $I : B \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$  є опуклим. Тоді  $I$  є сильно напівнеперервним знизу на  $B \Leftrightarrow$*

$$I \text{ є слабо напівнеперервним знизу на } B. \quad \triangleleft \triangleright$$

Зокрема, в умовах теореми 8.5 співвідношення (8.1) та (8.2) є еквівалентними.

**Теорема 8.7** (про існування мінімуму інтегрального функціонала). *Нехай  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  є областю,  $f \in W_0^{1,p}(\Omega)^*$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $\beta \in \mathbf{R}$  і функція*

$$h(x, \xi) : \Omega \times \mathbf{R}^n \rightarrow [\beta, \infty]$$

*задовольняє умовам опуклості, Каратеодорі і коерцитивності :*

- (а) *функція  $h(x, \cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow [\beta, \infty]$  опукла і неперервна для майже всіх  $x \in \Omega$ ;*
- (б) *функція  $h(\cdot, \xi) : \Omega \rightarrow [\beta, \infty]$  вимірна для всіх  $\xi \in \mathbf{R}^n$ ;*
- (с) *існує  $\alpha \in \mathbf{R}$  таке, що для майже всіх  $x \in \Omega$  і всіх  $\xi \in \mathbf{R}^n$  виконана нерівність*

$$h(x, \xi) \geq \alpha |\xi|^p + \beta.$$

Припустимо, що

$$\inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v) < \infty,$$

де

$$I(v) = \int_{\Omega} h(x, \nabla v(x)) dx - \langle f, v \rangle.$$

Тоді  $\exists u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  :

$$I(u) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v).$$

◁ Використовуючи умови теореми і коерцитивність функції  $h(x, \xi)$ , маємо

$$I(v) \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx + \beta \text{mes}(\Omega) - \|f\|_{W_0^{1,p}(\Omega)^*} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Тому із нерівності Фрідрікса випливає, що знайдуться  $\sigma > 0$  і  $\delta$  такі, що

$$I(v) \geq \sigma \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \delta \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Розглянемо деяку мінімізуючу послідовність  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$  для функціонала  $I$ , тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v).$$

Існування такої послідовності впливає із визначення інфімуму.

Враховуючи припущення  $\inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v) < \infty$  і збіжність  $I(v) \rightarrow \infty$  при  $\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \rightarrow \infty$ , отримуємо, що послідовність  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  є обмеженою в рефлексивному просторі  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Таким чином, існують  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  і підпослідовність  $\{u_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  :

$$\nabla u_l \rightharpoonup \nabla u \quad \text{в} \quad L^p(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \nabla u_l \rightharpoonup \nabla u \quad \text{в} \quad L^1(\Omega).$$

Використовуючи теореми 8.5 і 8.6, отримуємо

$$\int_{\Omega} h(x, \nabla u(x)) dx \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h(x, \nabla u_l(x)) dx.$$

Крім того, за визначенням (слабкій збіжності) маємо

$$\langle f, u_l \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle.$$

Отже,

$$\inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v) \leq I(u) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} I(u_l) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v)$$

і тому  $I(u) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I(v)$ .  $\triangleright$

Нехай функція

$$h(x, \xi) : \Omega \times \mathbf{R}^{n \times m} \rightarrow [\beta, \infty]$$

задовольняє всім умовам теореми 8.7 за виключенням умови опуклості, тоді функціонал

$$I(v) = \int_{\Omega} h(x, \nabla v(x)) dx$$

є слабо напівнеперервним знизу на  $W_0^{1,p}(\Omega)^m \Leftrightarrow$  виконана умова

$$\int_{\Omega} h(x, \xi + \nabla \varphi(x)) dx \geq \int_{\Omega} h(x, \xi) dx \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^{n \times m}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^m,$$

яка називається умовою *квазіопуклості* функції  $h(x, \xi)$ .

## 9. Усереднення варіаційних нерівностей

Нехай для  $n \geq 1$  задані обмежена область  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  із ліпшицевою границею  $\partial\Omega$ , функція  $f \in L^2(\Omega)$  та послідовність функцій  $\{\psi_\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega)$ , що залежить від малого додатного параметра  $\varepsilon$  і рівномірно обмежена щодо цього параметра, тобто

$$\|\psi_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$$

із сталою  $C$ , що не залежить від  $\varepsilon$ , при  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  для деякого додатного  $\varepsilon_0$ .

Розглянемо наступну задачу с малим параметром  $\varepsilon$  щодо функції  $\hat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon$  :

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon\right) (\nabla \hat{v} - \nabla \hat{u}_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f (\hat{v} - \hat{u}_\varepsilon) dx$$

$$\forall \hat{v} \in K_\varepsilon \equiv \{\hat{v} \in H_0^1(\Omega) : \hat{v} \geq \psi_\varepsilon \text{ в } H^1(\Omega)\}, \quad (9.1)$$

де вектор-функція  $a(y, \xi)$  є 1-періодичною по  $y \in \mathbf{R}^n$  для кожного  $\xi \in \mathbf{R}^n$ . Отже,  $a(y, \xi)$  для кожного  $\xi \in \mathbf{R}^n$  цілком визначається своїм обмеженням на комірку періодичності  $Y = [0, 1]^n$ .

Припускається, що  $a(y, \xi)$  для кожного  $\xi \in \mathbf{R}^n$  є вимірною на  $Y$ ,  $a(y, 0) = 0$  та

$$0 < (a(y, \xi) - a(y, \zeta)) (\xi - \zeta) \quad \text{для } \xi \neq \zeta,$$

$$\alpha |\xi|^2 \leq a(y, \xi) \xi, \quad |a(y, \xi) - a(y, \zeta)| \leq \beta |\xi - \zeta| \quad (9.2)$$

для кожного  $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^n$  м. с. в  $Y$ ,

де  $\alpha$  та  $\beta$  є заданими додатними сталими.

Таким чином, існує єдиний (для фіксованого  $\varepsilon$ ) розв'язок варіаційної нерівності (9.1) та за допомогою заміни  $\hat{u}_\varepsilon = u_\varepsilon + \psi_\varepsilon$ ,  $\hat{v} = v + \psi_\varepsilon$  ця нерівність еквівалентна варіаційній нерівності для  $u_\varepsilon \in K$  :

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon\right) (\nabla v - \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f (v - u_\varepsilon) dx \quad (9.3)$$

$$\forall v \in K \equiv \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq 0 \text{ в } H^1(\Omega)\}.$$

За теоремою Мінті ця нерівність еквівалентна варіаційній нерівності для  $u_\varepsilon \in K$  :

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla v\right) (\nabla v - \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f (v - u_\varepsilon) dx \quad \forall v \in K. \quad (9.4)$$

**Теорема 9.1** (про рівномірну обмеженість). *Нехай  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  є розв'язком варіаційної нерівності (9.3) для фіксованого  $\varepsilon$ . Тоді*

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$$

із сталою  $C$ , що не залежить від  $\varepsilon$ , при  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  для деякого додатного  $\varepsilon_0$ .

◁ Обираючи  $v = 0$  в (9.3) та додаючи відповідні інтеграли, маємо

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n}^2 &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} + \\ &+ \beta \|\nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} \end{aligned}$$

та

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \right),$$

із сталою  $C$ , що не залежить від  $\varepsilon$ , оскільки  $\|\nabla u_\varepsilon\| - \|\nabla \psi_\varepsilon\| \leq \|\nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\|$ . ▷

**Теорема 9.2.** *Нехай  $b(u, v)$  є білінійною формою на гільбертовому просторі  $H$ ,  $v_\varepsilon \rightarrow v$  і  $u_\varepsilon \rightharpoonup u$  в  $H$  (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Тоді*

$$b(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \rightarrow b(v, u). \quad \triangleleft \triangleright$$

Із теорем 7.5, 9.1 і 9.2 одразу отримуємо наступне просте твердження.

**Теорема 9.3** (про збіжність). *Нехай  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  є розв'язком варіаційної нерівності (9.3) для фіксованого  $\varepsilon$ ,  $a(y, \xi) = a(\xi)$  не залежить від  $y \in Y$  при  $\xi \in \mathbf{R}^n$  та  $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi_0$  в  $H_0^1(\Omega)$ . Тоді*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega),$$

де  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  є розв'язком наступної варіаційної нерівності для  $u_0 \in K$ :

$$\int_{\Omega} a(\nabla \psi_0 + \nabla u_0)(\nabla v - \nabla u_0) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u_0) dx \quad \forall v \in K.$$

◁ Дійсно, із теорем 7.5 та 9.1 випливає, що існують  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  та підпослідовність  $\{u_{\tilde{\varepsilon}}\} \subset H_0^1(\Omega)$  такі, що

$$u_{\tilde{\varepsilon}} \rightharpoonup u_0.$$

Таким чином, використовуючи теорему 9.2 та обчислюючи границю в (9.4), отримуємо потрібну нерівність варіаційну за теоремою Мінті. ▷

Область  $\Omega$  є обмеженою. Тому, можна вважати, що існує  $l > 0$  таке, що

$$\Omega \subset [0, \varepsilon m]^n \subset [0, l]^n$$

для фіксованих  $\varepsilon$  та цілого  $m$ .

**Лема 9.4.** Для функції  $U \in L^2(Y)$ , подовженої по періодичності на  $\mathbf{R}^n$ , та функції  $v \in H_0^2(\Omega)$ , виконується нерівність

$$\left| \int_{\Omega} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx - \int_Y U(y) dy \int_{\Omega} v(x) dx \right| \leq \varepsilon^2 l^n \|U\|_{L^2(Y)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}.$$

◁ Визначимо  $M(y) \in H_{pe*}^2(Y)$  як розв'язок рівняння

$$\Delta_y M(y) = U(y) - \int_Y U(y) dy$$

та подовжимо  $M(y)$  по періодичності. Враховуючи, що

$$\varepsilon^2 \Delta_x M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \Delta_y M(y)|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} = U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \int_Y U(y) dy,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx - \int_Y U(y) dy \int_{\Omega} v(x) dx = \\ & = \varepsilon^2 \int_{\Omega} \Delta_x M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx = \varepsilon^2 \int_{\Omega} M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta v(x) dx. \end{aligned}$$

Таким чином, використовуючи нерівність Коші-Буняковського-Шварца, маємо

$$\left| \int_{\Omega} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx - \int_Y U(y) dy \int_{\Omega} v(x) dx \right| \leq \varepsilon^2 \|M^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}.$$

та

$$\|M^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{[0, \varepsilon m]^n} M^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon^n \int_{[0, m]^n} M^2(y) dy = \varepsilon^n m^n \|M\|_{L^2(Y)}^2 \leq l^n \|U\|_{L^2(Y)}^2$$

для  $M^\varepsilon = M(x/\varepsilon)$ , оскільки відомо, що  $\|M\|_{L^2(Y)}^2 \leq \|U\|_{L^2(Y)}^2$ . ▷

**(Завдання для самостійної роботи:** Перевірити, що для  $U \in L^2(Y)$ , подовженої по періодичності на  $\mathbf{R}^n$ , та  $v \in H_0^1(\Omega)$ , виконується нерівність

$$\left| \int_{\Omega} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx - \int_{\Omega} \int_Y U(y) v(x) dy dx \right| \leq \varepsilon l^n \|U\|_{L^2(Y)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \quad )$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що для  $U \in L^2(Y)$ , подоженої по періодичності на  $\mathbf{R}^n$ , та  $v \in L^2(\Omega)$  виконується співвідношення

$$\int_{\Omega} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y U(y) v(x) dy dx \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

тобто

$$U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \int_Y U(y) dy \quad \text{в} \quad L^2(\Omega). \quad )$$

**В9.5.** Послідовність  $\{v_\varepsilon(x)\} \subset L^2(\Omega)$  називається *двомасштабно збіжною* до  $v_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$  (позначення  $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$ ) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , якщо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v_\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) \varphi(x, y) dy dx \quad (9.5)$$

для кожного  $\varphi \in L^2_{per}(Y; C(\overline{\Omega}))$ . Тут і надалі індекс *per* означає 1-періодичність по  $y \in \mathbf{R}^n$ , а включення  $\varphi \in L^2_{per}(Y; C(\overline{\Omega}))$  означає, що обмеження  $\varphi(x, y)$  на  $Y$  належить  $L^2(Y; C(\overline{\Omega}))$ . Зокрема, для  $\varphi \in L^2_{per}(Y; C(\overline{\Omega}))$  маємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x, y) dy dx.$$

Крім того, відомо, що для  $\varphi \in L^2_{per}(Y; C(\overline{\Omega}))$  виконуються співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x, y)^2 dy dx$$

та

$$\int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx \leq \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x, y)^2 dy dx.$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити наступне твердження: якщо  $v_\varepsilon \rightarrow v$  в  $L^2(\Omega)$ , тоді

$$v_\varepsilon \xrightarrow{2} v. \quad )$$

**Теорема 9.6** (про двомасштабну компактність в  $L^2(\Omega)$ ). *Нехай  $\{v_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$  є рівномірно обмеженою послідовністю. Тоді існують  $v_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$  та підпослідовність  $\{v_{\tilde{\varepsilon}}\} \subset L^2(\Omega)$  такі, що*

$$v_{\tilde{\varepsilon}} \xrightarrow{2} v_0$$

та  $v_{\tilde{\varepsilon}} \rightharpoonup v = \int_Y v_0(x, y) dy$  в  $L^2(\Omega)$ .  $\triangleleft \triangleright$

Визначимо простір дійснозначних тригонометричних поліномів рівністю

$$\text{Trig}_*(Y) = \left\{ u = \sum_{m \in Z^n \setminus \{0\}: |m| \leq M} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} : \alpha_m = \bar{\alpha}_{-m} \quad \forall m \in Z_*^n \right\}$$

та простір  $C_{0pe*}^\infty(\Omega \times Y)$  як множину скінчених лінійних комбінацій функцій виду  $v = v_0(x) \cdot v_p(y)$ , де  $v_0(x) \in C_0^\infty(\Omega)$  і  $v_p(y) \in \text{Trig}_*(Y)$ . Аналогічно, замінюючи  $\text{Trig}_*(Y)$  на  $\text{Trig}(Y)$ , визначимо простір  $C_{0per}^\infty(\Omega \times Y)$ .

Відомо, що  $C_0^\infty(\Omega)$  щільно в  $L^2(\Omega)$  і  $H_0^1(\Omega)$ . Крім того,  $C_{0pe*}^\infty(\Omega \times Y)$  щільно в  $L^2(\Omega; H_{pe*}^1(Y))$  і  $L^2(\Omega; L_*^2(Y)) = L^2(\Omega; H_{pe*}^0(Y))$  та  $C_{0per}^\infty(\Omega \times Y)$  щільно в  $L^2(\Omega; L^2(Y)) = L^2(\Omega \times Y)$ .

**Теорема 9.7** (про двомасштабну компактність в  $H_0^1(\Omega)$ ). *Нехай  $\{v_\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega)$  є рівномірно обмеженою послідовністю. Тоді знайдуться такі  $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$  та  $u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H_{pe*}^1(Y))$ , що (після виділення підпослідовності при  $\varepsilon \rightarrow 0$ )*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{в } H_0^1(\Omega) \quad \text{і} \quad \nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla u_0 + \nabla_y u_1.$$

◁ Із теорем 7.5 і 9.6 випливає, що існують  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  та  $u_g(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$  такі, що

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{в } H_0^1(\Omega) \quad \text{і} \quad \nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} u_g.$$

Визначаючи  $\hat{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ , можна вважати, що  $u_\varepsilon \rightharpoonup 0$  в  $H_0^1(\Omega)$  і  $\int_Y u_g(x, y) dy = 0$ .

Нехай  $\varphi(x, y) \in C_{0pe*}^\infty(\Omega \times Y)^n$ , тоді

$$\varepsilon \text{rot} (w(x, x/\varepsilon)) = (\text{rot}_y w(x, y) + \varepsilon \text{rot}_x w(x, y)) \quad \text{для } y = x/\varepsilon$$

та

$$0 = \varepsilon \int_\Omega (\nabla u_\varepsilon) \text{rot} (w(x, x/\varepsilon)) dx \rightarrow \int_\Omega \int_Y (u_g) \text{rot}_y w(x, y) dy dx$$

за визначенням двомасштабної збіжності (9.5). Таким чином,  $\text{rot}_y u_g(x, y) = 0$  та із теореми Вейля випливає, що знайдеться  $u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H_{pe*}^1(Y))$  таке, що

$$u_g(x, y) = \nabla_y u_1(x, y). \quad \triangleright$$

**Теорема 9.8.** *Нехай  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  є розв'язком варіаційної нерівності (9.3). Тоді знайдуться такі  $\psi_0, u_0 \in H_0^1(\Omega)$  і  $\psi_1, u_1 \in L^2(\Omega; H_{pe*}^1(Y))$ , що*

$$\psi_\varepsilon \rightharpoonup \psi_0, \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{в } H_0^1(\Omega),$$

$$\nabla \psi_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1, \quad \nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla u_0 + \nabla_y u_1$$

та  $u_0 \geq 0$  в  $H^1(\Omega)$  (після виділення підпоследовностей при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

◁ Ця теорема випливає із теорем 9.1 та 9.7. ▷

**Теорема 9.9.** *Нехай  $H$  є гільбертовим простором. Тоді*

$$v_\varepsilon \rightarrow v \quad \Leftrightarrow \quad i) \quad v_\varepsilon \rightharpoonup v; \quad ii) \quad \|v_\varepsilon\|_H \rightarrow \|v\|_H.$$

◁ Дійсно,  $\|v_\varepsilon - v\|_H^2 = \langle v_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle - \langle v, v \rangle + \langle v, v \rangle - \langle v, v_\varepsilon \rangle + \langle v, v \rangle - \langle v_\varepsilon, v \rangle \rightarrow 0$ . ▷

**В9.10.** Последовність  $\{v_\varepsilon(x)\} \subset L^2(\Omega)$  називається *двомасштабно сильно збіжною* до  $v_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$  (позначення  $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$ ) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , якщо

$$v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0 \quad \text{та} \quad \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|v_0\|_{L^2(\Omega \times Y)}.$$

**Теорема 9.11** (про двомасштабну сильну збіжність). *Нехай последовність  $\{v_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$  така, що  $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$  та  $v_0 \in C_{0per}^\infty(\Omega \times Y)$ . Тоді*

$$\|v_\varepsilon(x) - v_0(x, x/\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0.$$

◁ Дійсно, за визначенням 9.5 маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon(x) - v_0(x, x/\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (v_\varepsilon(x) - v_0(x, x/\varepsilon))^2 dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (v_\varepsilon(x)^2 - 2v_\varepsilon(x)v_0(x, x/\varepsilon) + v_0(x, x/\varepsilon)^2) dx = \\ &= \int_{\Omega} \int_Y (v_0(x, y)^2 - 2v_0(x, y)v_0(x, y) + v_0(x, y)^2) dy dx = 0. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Насправді ця теорема є вірною при  $v_0 \in L_{per}^2(Y; C(\bar{\Omega}))$ , що випливає із визначення двомасштабної збіжності (9.5).

**Теорема 9.12** (про апроксимаційну двомасштабну сильну збіжність). *Нехай последовність  $\{v_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$  така, що  $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$ . Тоді знайдеться последовність  $\{v_0^i\} \subset C_{0per}^\infty(\Omega \times Y)$  така, що*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon(x) - v_0^i(x, x/\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

◁ Простір  $C_{0per}^\infty(\Omega \times Y)$  є щільним у  $L^2(\Omega \times Y)$ . Тому знайдеться последовність  $\{v_0^i\} \subset C_{0per}^\infty(\Omega \times Y)$  така, що  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|v_0 - v_0^i\|_{L^2(\Omega \times Y)} = 0$  та

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon(x) - v_0^i(x, x/\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (v_\varepsilon(x) - v_0^i(x, x/\varepsilon))^2 dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (v_{\varepsilon}(x)^2 - 2v_{\varepsilon}(x)v_0^i(x, x/\varepsilon) + v_0^i(x, x/\varepsilon)^2) dx = \\
&= \int_{\Omega} \int_Y (v_0(x, y)^2 - 2v_0(x, y)v_0^i(x, y) + v_0^i(x, y)^2) dy dx = \|v_0 - v_0^i\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2. \quad \triangleright
\end{aligned}$$

Повернемося до задачі (9.4) та припустимо, що  $\psi_0$  і  $\psi_1$  у теоремі 9.8 є визначеними однозначно та

$$\nabla \psi_{\varepsilon} \xrightarrow{2} \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1.$$

Тоді знайдуться послідовності  $\{\psi_0^i\} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$  та  $\{\psi_1^i\} \subset C_{0pe^*}^{\infty}(\Omega \times Y)$  таки, що

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \nabla \psi_{\varepsilon}(x) - \nabla \psi_0^i(x) - (\nabla_y \psi_1^i)(x, x/\varepsilon) \right\|_{L^2(\Omega)^n} = 0. \quad (9.6)$$

Фіксуємо  $v_0 \in C_0^{\infty}(\Omega)$  і  $v_1 \in C_{0pe^*}^{\infty}(\Omega \times Y)$  таки, що  $v_0 \geq 0$  в  $\Omega$  та визначимо

$$K_2 \equiv \{(w_0, w_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{pe^*}^1(Y)) : w_0 \geq 0 \text{ в } H^1(\Omega)\}.$$

Тоді  $(v_0, v_1) \in K_2$  і знайдеться така постійна  $\delta$ , що  $|v_1| \leq \delta$  в  $\bar{\Omega} \times Y$ .

Оберемо для кожного  $\varepsilon$  невід'ємну функцію  $e_{\varepsilon} \in W_0^{1, \infty}(\Omega)$ , рівну нулю при  $\text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon$  і одиниці при  $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon$ , де  $\text{dist}(x, \partial\Omega)$  позначає відстань від точки  $x$  до межі  $\partial\Omega$ . Для достатньо малих  $\varepsilon$  ( $\leq \varepsilon_0$ ) такі функції існують,  $|\varepsilon \nabla e_{\varepsilon}| \leq C$  в  $\Omega$  та носій функції  $\nabla e_{\varepsilon}$  міститься в прикордонній смузі  $\Omega_{2\varepsilon} \subset \Omega$  ширини  $2\varepsilon$ . Отже,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla e_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla e_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_{2\varepsilon})^n} = 0 \quad (9.7)$$

і можна вважати, що  $e_{\varepsilon} = 1$  на носії функції  $v_1(x, x/\varepsilon)$ . Таким чином, маємо  $v_1(x, x/\varepsilon) + \delta e_{\varepsilon} \geq 0$  в  $\Omega$ . Обираючи у задачі (9.4) функцію

$$v = v_0(x) + \varepsilon v_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon \delta e_{\varepsilon}$$

та враховуючи, що

$$\nabla(\varepsilon v_1(x, x/\varepsilon)) = (\nabla_y v_1(x, y) + \varepsilon \nabla_x v_1(x, y)) \quad \text{при } y = x/\varepsilon,$$

отримаємо при  $(\nabla_y v_1)^{\varepsilon} = (\nabla_y v_1)(x, x/\varepsilon)$  та  $(\nabla_y \psi_1^i)^{\varepsilon} = (\nabla_y \psi_1^i)(x, x/\varepsilon)$  наступну варіаційну нерівність

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_0^i + (\nabla_y \psi_1^i)^{\varepsilon} + \nabla v_0 + (\nabla_y v_1)^{\varepsilon}\right) (\nabla v_0 + (\nabla_y v_1)^{\varepsilon} - \nabla u_{\varepsilon}) dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_{\varepsilon}) dx + \sigma_{\varepsilon}^i, \quad (9.8)$$

де  $\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_{\varepsilon}^i = 0$  завдяки (9.6) та (9.7).

Враховуючи, що  $a(y, \nabla \psi_0^i + \nabla_y \psi_1^i + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) \in L^2_P(Y; C(\bar{\Omega})^n)$  та переходячи до границі, отримуємо варіаційну нерівність для  $(u_0, u_1) \in K_2$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx &\geq \\ &\geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx, \end{aligned} \quad (9.9)$$

де  $(v_0, v_1) \in K_2$ . Перевіряється, що ця нерівність виконана не тільки для гладких та фінітних  $v_0 \in C_0^{\infty}(\Omega)$  і  $v_1 \in C_{0pe*}^{\infty}(\Omega \times Y)$ , але й для всіх  $(v_0, v_1) \in K_2$ . Дійсно, для

$$(v_0, v_1) \in K_2 \equiv \{ (w_0, w_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{pe*}^1(Y)) : w_0 \geq 0 \text{ в } H^1(\Omega) \}.$$

знайдуться  $v_0^i \in C_0^{\infty}(\Omega)$  і  $v_1^i \in C_{0pe*}^{\infty}(\Omega \times Y)$  таки, що  $v_0 \geq 0$  в  $\Omega$  та

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left\| \nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla v_0^i - \nabla_y v_1^i \right\|_{L^2(\Omega \times Y)^n} = 0.$$

Нерівність (9.9) виконана для  $(v_0^i, v_1^i) \in K_2$  і тому для  $(v_0, v_1) \in K_2$  завдяки (9.2) (тобто  $|a(y, \xi) - a(y, \zeta)| \leq \beta |\xi - \zeta|$ ).

**Теорема 9.13** ( $\exists 1$  для двомасштабної варіаційної нерівності). *Існує єдиний розв'язок  $(u_0, u_1) \in K_2$  варіаційної нерівності (9.9), що розглядається для всіх  $(v_0, v_1) \in K_2$ , та ця нерівність еквівалентна нерівності для  $(u_0, u_1) \in K_2$ :*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx &\geq \\ &\geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx \quad \forall (v_0, v_1) \in K_2. \end{aligned} \quad (9.10)$$

$\triangleleft$  Через теорему 9.8 існує деякий розв'язок  $(u_0, u_1) \in K_2$  варіаційної нерівності (9.9), що розглядається  $\forall (v_0, v_1) \in K_2$ . Фіксуємо  $(w_0, w_1) \in K_2$  та оберемо

$$(v_0, v_1) = (u_0 + \sigma(w_0 - u_0), u_1 + \sigma(w_1 - u_1)) \quad \text{для } 0 < \sigma \leq 1$$

в нерівності (9.9). Тоді  $(v_0, v_1) \in K_2$  і нерівність (9.9) приймає вигляд

$$\int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \sigma \nabla(w_0 - u_0) + \nabla_y u_1 + \sigma \nabla_y(w_1 - u_1)) \cdot$$

$$\cdot (\nabla w_0 + \nabla_y w_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \geq \int_{\Omega} f(w_0 - u_0) dx,$$

де  $(w_0, w_1) \in K_2$ . Використовуючи (9.2), в цій нерівності можна перейти до границі при  $\sigma \rightarrow 0$  і отримати, що  $(u_0, u_1) \in K_2$  є розв'язком нерівності (9.10).

Нехай  $(u_0, u_1) \in K_2$  є деяким розв'язком (9.10). Із (9.2) маємо

$$a(y, \xi)(\xi - \zeta) \geq a(y, \zeta)(\xi - \zeta)$$

для  $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^n$  м. с. в  $Y$ . Виберемо в цій нерівності

$$\xi = \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1, \quad \zeta = \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1$$

для м. в.  $x \in \Omega$  та м. в.  $y \in Y$  та проінтегруємо результат по  $\Omega \times Y$ , тоді

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \geq \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \geq \\ & \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx \end{aligned}$$

для  $(v_0, v_1) \in K_2$ , оскільки  $(u_0, u_1) \in K_2$  є деяким розв'язком нерівності (9.10), тобто, варіаційна нерівність (9.9) еквівалентна варіаційній нерівності (9.10).

Припустимо, що  $(u_0^1, u_1^1) \in K_2$  та  $(u_0^2, u_1^2) \in K_2$  розв'язками нерівності (9.10). Розглянемо цю нерівність для  $(u_0^1, u_1^1)$  і оберемо  $(v_0, v_1) = (u_0^2, u_1^2)$ . Аналогічно, розглянемо цю нерівність для  $(u_0^2, u_1^2)$  і оберемо  $(v_0, v_1) = (u_0^1, u_1^1)$ . Додаючи першу нерівність до другої отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y (a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1) - a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \\ & + \nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2)) (\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 - \nabla u_0^2 - \nabla_y u_1^2) dy dx \leq 0. \end{aligned}$$

Відповідно до (9.2), отримуємо

$$\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 = \nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2 \quad \text{м. с. в } \Omega \times Y.$$

Інтегруючи цю рівність по  $Y$  та враховуючи рівності

$$\int_Y \nabla_y u_1^1 dy = \int_Y \nabla_y u_1^2 dy = 0,$$

маємо  $\nabla u_0^1 = \nabla u_0^2$  м. с. в  $\Omega$ .  $\triangleright$

Оберемо  $v_0 = u_0$  в (9.10) і припустимо формально, що  $\xi = \nabla \psi_0 + \nabla u_0$  та  $U = \psi_1 + u_1$ . Таким чином, отримуємо варіаційну нерівність для  $U \in H_{pe*}^1(Y)$ :

$$\int_Y a(y, \xi + \nabla_y U) (\nabla_y V - \nabla_y U) dy \geq 0 \quad \forall V \in H_{pe*}^1(Y). \quad (9.11)$$

**Теорема 9.14.** Для фіксованого  $\xi \in \mathbf{R}^n$  існує єдиний розв'язок  $U \in H_{pe*}^1(Y)$  варіаційної нерівності (9.11) та ця нерівність еквівалентна варіаційному рівнянню для  $U \in H_{pe*}^1(Y)$ :

$$\int_Y a(y, \xi + \nabla_y U) \nabla_y V dy = 0 \quad \forall V \in H_{pe*}^1(Y). \quad (9.12)$$

Крім того, функція  $U = U(\xi)$  є слабо неперервною як функція на  $\mathbf{R}^n$  із значеннями в  $H_{pe*}^1(Y)$ .

◁ Вже відомо, що для фіксованого  $\xi \in \mathbf{R}^n$  існує єдиний розв'язок (9.11) та ця нерівність еквівалентна варіаційному рівнянню (9.12).

Фіксуємо  $\xi \in \mathbf{R}^n$ . Необхідно перевірити, що

$$\begin{aligned} \nabla_y U(\xi_i) \rightharpoonup \nabla_y U(\xi) \quad \text{слабко в } L^2(Y)^n \quad \text{при } i \rightarrow \infty, \\ \text{якщо } |\xi_i - \xi| \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

де  $U(\xi_i) \in H_{pe*}^1(Y)$  є єдиним розв'язком (9.11) для  $\xi_i \in \mathbf{R}^n$  та  $U(\xi)$  є єдиним розв'язком (9.11) для  $\xi \in \mathbf{R}^n$ . Із (9.2) та (9.12) для  $V = U(\xi)$  отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla_y U(\xi)\|_{L^2(Y)^n}^2 &\leq \int_Y (a(y, \nabla_y U) - a(y, \xi + \nabla_y U)) \nabla_y U dy \leq \\ &\leq \|a(y, \nabla_y U) - a(y, \xi + \nabla_y U)\|_{L^2(Y)^n} \|\nabla_y U(\xi)\|_{L^2(Y)^n} \end{aligned}$$

і тому  $\|\nabla_y U(\xi)\|_{L^2(Y)^n} \leq (\beta/\alpha) |\xi|$ . Таким чином, можна вважати, що послідовність  $\{\nabla_y U(\xi_i)\} \subset L^2(Y)^n$  є рівномірно обмеженою і знайдеться таке  $W \in H_{pe*}^1(Y)$ , що (після виділення підпослідовності при  $i \rightarrow \infty$ )

$$\nabla_y U(\xi_i) \rightharpoonup \nabla_y W \quad \text{слабко в } L^2(Y)^n.$$

Розглянемо задачу (9.11) при  $\xi_i \in \mathbf{R}^n$ , яка еквівалентна наступній варіаційній нерівності для  $U(\xi_i) \in H_{pe*}^1(Y)$ :

$$\int_Y a(y, \xi_i + \nabla_y V) (\nabla_y V - \nabla_y U(\xi_i)) dy \geq 0 \quad \forall V \in H_{pe*}^1(Y).$$

Для кожного  $V \in H_{pe*}^1(Y)$  у цієї нерівності можна перейти до границі, оскільки

$$a(y, \xi_i + \nabla_y V) \rightarrow a(y, \xi + \nabla_y V)$$

в  $L^2(Y)^n$ , і отримати, що  $W = U(\xi)$ .  $\triangleright$

Із нерівності  $\|\nabla_y U(\xi)\|_{L^2(Y)^n}^2 \leq (\beta/\alpha)^2 |\xi|^2$  та неперервності функції  $U(\xi)$  отримуємо  $U(y, \nabla v_0(x)) \in L^2(\Omega; H_{pe*}^1(Y))$ , якщо  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ . Таким чином, має сенс наступне твердження про зв'язок розв'язку варіаційної нерівності (9.10) із розв'язками (формально отриманої) варіаційної нерівності (9.11).

**Теорема 9.15.** *Нехай  $(u_0, u_1) \in K_2$  є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.10). Тоді*

$$u_1 = U(y, \nabla \psi_0(x) + \nabla u_0(x)) - \psi_1(x, y),$$

де  $U(\xi)$  є єдиним (для кожного  $\xi \in \mathbf{R}^n$ ) розв'язком варіаційного рівняння (9.12).

$\triangleleft$  Відповідно із (9.2), маємо

$$0 \leq a(y, \xi)(\xi - \zeta) - a(y, \zeta)(\xi - \zeta)$$

для кожного  $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^n$  м. с. в  $Y$ . Оберемо в цій нерівності

$$\xi = \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0)$$

та

$$\zeta = \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1$$

для м. в.  $x \in \Omega$  і м. в.  $y \in Y$  та проінтегруємо результат по  $\Omega \times Y$ . Тоді

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y U(\eta)) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) dy dx - \\ & - \int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) dy dx, \end{aligned} \quad (9.13)$$

де позначено  $\eta = \nabla \psi_0 + \nabla u_0$ . Обираючи  $v_0 = u_0$  та  $v_1 = U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1$  в (9.10), отримуємо

$$\int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) dy dx \geq 0. \quad (9.14)$$

Оберемо  $\xi = \nabla \psi_0 + \nabla u_0$  та  $V = U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1 - u_1$  (для м. в.  $x \in \Omega$ ) в (9.12) та проінтегруємо результат по  $\Omega$ , отримаємо рівність

$$\int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y U(\eta)) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) dy dx = 0.$$

Враховуючи цю рівність та співвідношення (9.14) укладаємо, що в (9.13) виконана рівність і тому

$$\nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) = \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1 \quad \text{м. с. в. } \Omega \times Y. \quad \triangleright$$

Нагадаємо, що досліджуємо варіаційну нерівність для  $\hat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon\right) (\nabla \hat{v} - \nabla \hat{u}_\varepsilon) dx &\geq \int_{\Omega} f(\hat{v} - \hat{u}_\varepsilon) dx \\ \forall \hat{v} \in K_\varepsilon &\equiv \{\hat{v} \in H_0^1(\Omega) : \hat{v} \geq \psi_\varepsilon \text{ в } H^1(\Omega)\}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

яка еквівалентна варіаційній нерівності для  $u_\varepsilon \in K$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon\right) (\nabla v - \nabla u_\varepsilon) dx &\geq \int_{\Omega} f(v - u_\varepsilon) dx \\ \forall v \in K &\equiv \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq 0 \text{ в } H^1(\Omega)\}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Розв'язки цієї нерівності збігаються в сенсі теореми 9.8 до розв'язків варіаційної двомасштабної нерівності для  $(u_0, u_1) \in K_2$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx &\geq \\ &\geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx \quad \forall (v_0, v_1) \in K_2. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Крім того, вже доведено в теоремі 9.15, що

$$u_1 = U(y, \nabla \psi_0(x) + \nabla u_0(x)) - \psi_1(x, y),$$

де  $U(\xi)$  є єдиним (для кожного  $\xi \in \mathbf{R}^n$ ) розв'язком варіаційного рівняння для  $U \in H_{pe*}^1(Y)$ :

$$\int_Y a(y, \xi + \nabla_y U) \nabla_y V dy = 0 \quad \forall V \in H_{pe*}^1(Y). \quad (9.12)$$

Таким чином, обираючи  $v_1 = u_1$  в (9.10) та використовуючи теорему 9.15, отримаємо варіаційну нерівність для  $u_0 \in K$ :

$$\int_{\Omega} A(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) (\nabla v_0 - \nabla u_0) dx \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx \quad \forall v_0 \in K, \quad (9.15)$$

де

$$A(\xi) = \int_Y a(y, \xi + \nabla_y U(y, \xi)) dy. \quad (9.16)$$

Ця варіаційна нерівність еквівалентна (за допомогою заміни  $\hat{u}_0 = \psi_0 + u_0$ ,  $\hat{v}_0 = \psi_0 + v_0$ ) варіаційній нерівності для  $\hat{u}_0 \in K_0$ :

$$\int_{\Omega} A(\nabla \hat{u}_0)(\nabla \hat{v}_0 - \nabla \hat{u}_0) dx \geq \int_{\Omega} f(\hat{v}_0 - \hat{u}_0) dx \quad (9.17)$$

$$\forall \hat{v}_0 \in K_0 \equiv \{\hat{v}_0 \in H_0^1(\Omega) : \hat{v}_0 \geq \psi_0 \text{ в } H^1(\Omega)\}.$$

**Теорема 9.16** (про збіжність розв'язків при усередненні варіаційних нерівностей). *Нехай  $\hat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon$  є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.1) для фіксованого  $\varepsilon$  та  $\nabla \psi_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1$ . Тоді*

$$\hat{u}_\varepsilon \rightharpoonup \hat{u}_0 \quad \text{в } H_0^1(\Omega) \quad \text{і}$$

$$\nabla \hat{u}_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla \hat{u}_0 + \nabla_y U(\nabla \hat{u}_0) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

де  $\hat{u}_0 \in K_0$  є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.17) та  $U(\xi)$  є єдиним (для кожного  $\xi \in \mathbf{R}^n$ ) розв'язком варіаційної нерівності (9.11).

◁ Використовуючи теорему 9.15 та обираючи  $v_1 = u_1$  в (9.10), отримаємо, що  $u_0$  (яке визначене в теоремі 9.8) є розв'язком варіаційної нерівності (9.15). Єдиність цього розв'язку (і тому розв'язку задачі (9.17)) впливає із строгої монотонності вектор-функції  $A(\xi)$ , яку нескладно вивести із (9.2).

Дійсно, для кожного  $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^n$  із (9.2) маємо

$$0 \leq (a(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) - a(y, \zeta + \nabla_y U(\zeta)))(\xi - \zeta + \nabla_y U(\xi) - \nabla_y U(\zeta))$$

м. с. в  $Y$ . Інтегруючи цю нерівність по  $Y$  та враховуючи (9.12), отримаємо

$$0 \leq (A(\xi) - A(\zeta))(\xi - \zeta).$$

Припустимо, що  $0 = (A(\xi) - A(\zeta))(\xi - \zeta)$ . Тоді

$$0 = (a(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) - a(y, \zeta + \nabla_y U(\zeta)))(\xi - \zeta + \nabla_y U(\xi) - \nabla_y U(\zeta))$$

м. с. в  $Y$  і тому  $\xi + \nabla_y U(\xi) = \zeta + \nabla_y U(\zeta)$  м. с. в  $Y$  завдяки (9.2). Інтегруючи останню рівність по  $Y$ , отримуємо  $\xi = \zeta$  та

$$0 < (A(\xi) - A(\zeta))(\xi - \zeta) \quad \text{для } \xi \neq \zeta,$$

що доводить строгую монотонність  $A(\xi)$  та єдиність розв'язку задачі (9.15).

Таким чином, безпосередньо із теорем 9.8, 9.13 та 9.15 випливає, що

$$\hat{u}_\varepsilon \rightharpoonup \hat{u}_0 \quad \text{в } H_0^1(\Omega) \quad \text{і} \quad \nabla \hat{u}_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla \hat{u}_0 + \nabla_y U(\nabla \hat{u}_0) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

без виділення підпослідовностей, оскільки границі є визначеними однозначно.  $\triangleright$

Відзначимо, що доведене також наступне твердження.

**Теорема 9.17.** *Нехай  $(u_0, u_1) \in K_2$  є розв'язком варіаційної нерівності (9.10). Тоді*

$$(u_0, u_1) = (u_0, U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1),$$

де  $u_0 \in K$  є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.15),  $U(\xi)$  є єдиним (для кожного  $\xi \in \mathbf{R}^n$ ) розв'язком варіаційного рівняння (9.12) та  $\psi_0$  і  $\psi_1$  визначені у теоремі 9.8.

Крім того, буде доведено наступне зворотне твердження.

**Теорема 9.18.** *Нехай  $u_0 \in K$  є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.15),  $U(\xi)$  є єдиним (для кожного  $\xi \in \mathbf{R}^n$ ) розв'язком варіаційного рівняння (9.12) та  $\psi_0$  і  $\psi_1$  визначені у теоремі 9.8. Тоді*

$$(u_0, u_1) = (u_0, U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1)$$

є єдиним розв'язком варіаційної нерівності (9.10).

$\triangleleft$  Нехай  $(v_0, v_1) \in K_2$  і  $u_1 = U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1$ . Оберемо

$$\xi = \nabla \psi_0 + \nabla u_0$$

і  $V = v_1 - u_1$  (для м. в.  $x \in \Omega$ ) у (9.12) та проінтегруємо результат по  $\Omega$ . Тоді, додаючи отриману рівність до нерівності із (9.15), маємо в точності варіаційну нерівність (9.10), розв'язок якої є єдиним у відповідності до теореми 9.13.  $\triangleright$

Розглянемо окремий випадок, коли  $a(y, \xi)$  у задачі (9.1) має вигляд

$$a(y, \xi) = \nabla_\xi b(y, \xi), \tag{9.18}$$

де функція  $b(y, \xi)$  є вимірною на  $Y$  для кожного  $\xi \in \mathbf{R}^n$  та неперервною відносно  $\xi \in \mathbf{R}^n$  м. с. в  $Y$ . Крім того, припускається, що для  $a(y, \xi)$  виконані нерівності (9.2). В цьому випадку, відомо, що варіаційна нерівність (9.3) еквівалентна

(при фіксованому  $\varepsilon$ ) задачі мінімізації для  $u_\varepsilon \in K$ :

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \min_{v \in K} F_\varepsilon(v), \quad F_\varepsilon(v) = \int_{\Omega} (b(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla\psi_\varepsilon + \nabla v) - f v) dx. \quad (9.19)$$

Також відомо, що варіаційне рівняння (9.12) еквівалентно (при фіксованому  $\xi \in \mathbf{R}^n$ ), якщо виконано (9.18), задачі мінімізації для  $U \in H_{pe*}^1(Y)$ :

$$F_\xi(U) = \min_{V \in H_{pe*}^1(Y)} F_\xi(V), \quad F_\xi(V) = \int_Y b(y, \xi + \nabla_y V) dy. \quad (9.20)$$

Розглянемо також усереднену задачу мінімізації для  $u_0 \in K$ :

$$F_0(u_0) = \min_{v_0 \in K} F_0(v_0), \quad F_0(v_0) = \int_{\Omega} (B(\nabla\psi_0 + \nabla v_0) - f v_0) dx, \quad (9.21)$$

де  $B(\xi) = \int_Y b(y, \xi + \nabla_y U(y, \xi)) dy$  та  $U(y, \xi)$  є розв'язком задачі мінімізації (9.2) для кожного  $\xi \in \mathbf{R}^n$ .

Формально, маємо  $\nabla_\xi B(\xi) = \int_Y \nabla_\xi b(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) (E + \nabla_\xi \nabla_y U(\xi)) dy$ , тому рівність  $A(\xi) = \nabla_\xi B(\xi)$  не впливає безпосередньо із (9.16) та (9.18).

Проте, буде доведено наступне твердження.

**Теорема 9.18.** *Існує єдиний розв'язок  $u_0 \in K$  задачі мінімізації (9.21) та ця задача еквівалентна варіаційній нерівності (9.15), якщо виконано (9.18).*

◁ Із (9.2) та (9.18) випливає, що

$$b(y, \xi) - b(y, \zeta) \geq a(y, \zeta) (\xi - \zeta) \quad (9.22)$$

та

$$0 \leq b(y, \xi) - b(y, \zeta) - a(y, \zeta) (\xi - \zeta) \leq (\beta/2) |\xi - \zeta|^2 \quad (9.23)$$

для кожного  $\xi, \zeta \in \mathbf{R}^n$  м. с. в  $Y$ . Дійсно використовуючи неперервність  $b(y, \xi)$  та  $a(y, \xi)$  відносно  $\xi$ , маємо співвідношення

$$\begin{aligned} b(y, \xi) - b(y, \zeta) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} b(y, \zeta + t(\xi - \zeta)) dt = \\ &= \int_0^1 \nabla_\xi b(y, \zeta + t(\xi - \zeta)) dt (\xi - \zeta) = \\ &= a(y, \zeta) (\xi - \zeta) + \int_0^1 (a(y, \zeta + t(\xi - \zeta)) - a(y, \zeta)) dt (\xi - \zeta) \end{aligned}$$

і залишається скористатися (9.2).

Нехай  $u_0 \in K$  є розв'язком усередненої задачі (9.15) і  $v_0 \in K$ . Оберемо в нерівності (9.22)

$$\xi = \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U (\nabla \psi_0 + \nabla v_0),$$

$$\zeta = \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U (\nabla \psi_0 + \nabla u_0)$$

для м. в.  $x \in \Omega$  і м. в.  $y \in Y$  та проінтегруємо результат по  $\Omega \times Y$ . Тоді, позначаючи  $\eta = \nabla \psi_0 + \nabla u_0$ , маємо

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U (\nabla \psi_0 + \nabla v_0)) dy dx - \\ & \quad - \int_{\Omega} \int_Y b(y, \eta + \nabla_y U (\eta)) dy dx \geq \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y U (\eta)) (\nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U (\nabla \psi_0 + \nabla v_0) - \\ & \quad - \eta - \nabla_y U (\eta)) dy dx \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx, \end{aligned}$$

оскільки  $u_0$  задовольняє нерівності із (9.10), де враховано теорему 9.15 та обрано  $v_1 = U(y, \nabla \psi_0(x) + \nabla v_0(x)) - \psi_1(x, y)$ . З цих нерівностей випливає, що

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y (b(y, \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U (\nabla \psi_0 + \nabla v_0)) - f v_0) dy dx \geq \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y (b(y, \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U (\nabla \psi_0 + \nabla u_0)) - f u_0) dy dx \quad (9.24) \end{aligned}$$

для всіх  $v_0 \in K$ , тобто  $u_0 \in K$  є розв'язком усередненої задачі мінімізації (9.21).

Припустимо зараз, що  $u_0 \in K$  є розв'язком задачі мінімізації (9.21), тобто виконано (9.24). Для фіксованого  $\xi \in \mathbf{R}^n$  розглянемо задачу мінімізації (9.20) для  $U(\xi) \in H_{pe*}^1(Y)$ . Тоді, маємо

$$\int_Y b(y, \xi + \nabla_y V) dy \geq \int_Y b(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) dy \quad \forall V \in H_{pe*}^1(Y). \quad (9.25)$$

Нехай  $(v_0, v_1) \in K_2$ . Обираючи  $\xi = \nabla \psi_0 + \nabla v_0$  і  $V = v_1$  (для м. в.  $x \in \Omega$ ) в (9.25) та інтегруючи результат по  $\Omega$ , отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) dy dx \geq \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U (\nabla \psi_0 + \nabla v_0)) dy dx. \quad (9.26) \end{aligned}$$

Враховуючи цю нерівність в (9.24), маємо співвідношення

$$\int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla \psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) dy dx - \\ - \int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0)) dy dx \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx.$$

Оберемо в цьому співвідношенні  $v_0 = u_0 + \sigma(w_0 - u_0)$  і  $v_1 = U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0)$ , де  $w_0 \in K$  та  $0 < \sigma \leq 1$ . Тоді, враховуючи нерівність (9.23), де обрано

$$\xi = \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \sigma \nabla(w_0 - u_0) + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0),$$

$$\zeta = \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0),$$

маємо

$$\sigma \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0)) (\nabla w_0 - \nabla u_0) dy dx + \\ + \sigma^2 \int_{\Omega} |\nabla(w_0 - u_0)|^2 dx \geq \sigma \int_{\Omega} f(w_0 - u_0) dx \quad (9.27)$$

для  $w_0 \in K$ , оскільки  $\xi - \zeta = \sigma \nabla(w_0 - u_0)$  для обраних  $\xi$  та  $\zeta$ . Обчислюючи границю при  $\sigma \rightarrow 0$  у (9.27), робимо висновок, що  $u_0 \in K$  є розв'язком усередненої задачі (9.15).  $\triangleright$

Розглянемо, також двомасштабну задачу мінімізації для  $(u_0, u_1) \in K_2$ :

$$F_2(u_0, u_1) = \min_{(v_0, v_1) \in K_2} F_2(v_0, v_1), \quad (9.28)$$

де  $F_2(v_0, v_1) = \int_{\Omega} \int_Y (b(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1) - f v_0) dy dx$ .

**Теорема 9.19.** *Існує єдиний розв'язок  $(u_0, u_1) \in K_2$  задачі мінімізації (9.28) та ця задача еквівалентна варіаційній нерівності (9.15), якщо виконано (9.18).*

$\triangleleft$  Доведення цього твердження фактично повторює доведення теореми 9.18. Дійсно, розв'язок  $(u_0, u_1) \in K_2$  варіаційної нерівності (9.10) є розв'язком двомасштабної задачі мінімізації (9.28) завдяки (9.22) із відповідними  $\xi$  та  $\zeta$ . Зворотне твердження випливає із (9.26), теореми 9.15 і нерівності (9.23).  $\triangleright$

Таким чином, еквівалентність (при  $a(y, \xi) = \nabla_{\xi} b(y, \xi)$ ) задачі мінімізації (9.19) і варіаційної нерівності (9.3) (еквівалентної (9.1)) зберігається при усередненні і двомасштабному усередненні та твердження про збіжність розв'язків задачі мінімізації (9.19) випливає із теореми 9.16.

### Рекомендована література

1. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. *Оптимизация*. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. 320 с.
2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике*. – М.: Мир, 1972. 587 с.
3. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*. – М.: Мир, 1972. 384 с.
4. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. *Введение в вариационные неравенства*. – М.: Мир, 1983. 256 с.
5. Сьярле Ф. *Математическая теория упругости*. – М.: Мир, 1992. 472 с.
6. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*. – М.: Мир, 1979. 399 с.

### Додаткова література

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М.: Наука, 1984. 352 с.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа*. – М.: Наука, 1965.. 520 с.
3. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. М.:Наука, 1989. 384 с.