Передмова

Пропонований посібник присвячено додатковим розділам функціонального аналізу та теорії операторних рівнянь, які є важливою частиною арсеналу сучасного фахівця в галузі інформатики та прикладної математики.

В основу посібника покладено два курси лекцій, що читались авторами протягом останніх років у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики й механіко-математичному факультеті. Частина результатів була апробована при викладанні лінійної алгебри та числових методів на факультеті інформаційних технологій.

Розглянуто елементи теорії топологічних просторів і операторних рівнянь у просторах Фреше, Банаха та Гільберта. Запропоновано розвинення добре відомої теорії псевдообернених за Муром – Пенроузом операторів і методу рядів Неймана на випадок операторів, що мають не обов'язково замкнену множину значень. Окрему частину присвячено теорії нелінійних операторних рівнянь. Розглянуто кілька фундаментальних теорем про нерухомі точки, зокрема теореми Брауера, Какутані та Браудера. Задачі про нерухомі точки відображень є зручною загальною формою запису та дослідження різних проблем прикладного нелінійного аналізу. Зокрема, у вигляді задачі пошуку нерухомої точки можуть бути сформульовані задачі розв'язання рівнянь, знаходження екстремуму функцій, знаходження точок рівноваги Неша в грі тощо. В останньому розділі техніку узагальнено-обернених та псевдообернених операторів застосовано для отримання умов існування обмежених і періодичних розв'язків операторних різницевих рівнянь та алгоритмів їх побудови.

В. В. Семенов вдячний МОН України за підтримку досліджень, результати яких згадуються в посібнику (проект «Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології», 0116U004777).

Зауваження та побажання можна надсилати електронною поштою: `lenasas@gmail.com`, `semenov.volodya@gmail.com`.

Розділ 1

Теорія топологічних просторів та операторних рівнянь

1.1. Попередні відомості

Наведено відомі означення та твердження з функціонального аналізу, топології, теорії топологічних векторних просторів і операторів, які будуть використовуватися далі. Матеріал, представлений у цьому підрозділі, є довідковим. Теореми викладено без доведень, з посиланнями на джерела, де можна детальніше та глибше ознайомитися з ними.

1.1.1. Топологічні та векторні простори

Означення 1 ([28]). ***Векторний (лінійний) простір*** E над полем Φ дійсних (комплексних) чисел — це множина з операціями додавання та множення на скаляри ($x, y \in E \to x + y \in E$; $x \in E, \lambda \in \Phi \to \lambda x \in E$) з такими властивостями:

1) $x + y = y + x$;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3) $\exists \theta : x + \theta = \theta + x = x$;

4) $\forall x \;\; \exists -x : x + (-x) = \theta$;

5) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;

6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

8) $1 \cdot x = x$.

Лінійні операції над елементами простору E продовжуються на його підмножини таким чином:

для довільних $x \in E$ та $A \subset E$

$$x + A = \{x + y : y \in A\};$$

для довільних $A \subset E$ та $B \subset E$

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\};$$

для довільних $\lambda \in \Phi$ та $A \subset E$

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Аналогічно для довільної множини $\mathcal{A}$ підмножин з E

$$x + \mathcal{A} = \{x + A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Вправа 1. Показати, що множина $A + A$ в загальному випадку відрізняється від множини $2A$, але завжди має місце включення $2A \subset A + A$.

Підмножина M з E називається ***векторним підпростором*** простору E, якщо $x+y \in M$ та $\lambda x \in M$ для всіх $x, y \in M$ та $\lambda \in \Phi$ (тобто якщо $M + M \subset M$ та $\lambda M \subset M$ для всіх $\lambda \in \Phi$).

Означення 2. Підмножина A векторного простору E називається ***опуклою***, якщо $\lambda x + \mu y \in A$ для довільних $x, y \in A$ та всіх $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ таких, що $\lambda + \mu = 1$.

Означення 3. Підмножина A векторного простору E називається ***врівноваженою***, якщо $\lambda x \in A$ для довільних $x \in A$ та всіх λ таких, що $|\lambda| \leq 1$.

Означення 4. Підмножина A векторного простору E називається ***абсолютно опуклою***, якщо вона одночасно опукла та врівноважена.

Вправа 2. Довести, що попереднє означення рівносильне такій вимозі [28, с.15]: $\lambda x + \mu y \in A$ для всіх $x, y \in A$ та λ, μ таких, що $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

Означення 5. Підмножина A векторного простору E називається ***поглинаючою***, якщо для кожного $x \in E$ існує таке $\lambda > 0$, що $x \in \mu A$, де μ: $|\mu| \geq \lambda$.

Топологічний простір — це множина, наділена структурою відкритих множин, яка дає можливість розглядати збіжність і неперервність. Наведемо точне означення.

Означення 6. ***Топологічний простір*** — це множина S із виділеною сім'єю підмножин $\mathcal{T} \subset 2^S$, які називаються відкритими множинами й задовольняють такі властивості:

i) $\mathcal{T}$ замкнена відносно скінченних перетинів, тобто якщо $A, B \in \mathcal{T}$, то $A \bigcap B \in \mathcal{T}$;

ii) $\mathcal{T}$ замкнена відносно довільних об'єднань, тобто якщо $A_\alpha \in \mathcal{T}$ для всіх α з деякої множини індексів I, то $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}$;

iii) $\emptyset, S \in \mathcal{T}$.

Сім'я $\mathcal{T}$ називається ***топологією*** в S.

Означення 7. Сім'я $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ називається ***базою топології*** $\mathcal{T}$, якщо довільна $T \subset \mathcal{T}$ має вигляд $T = \bigcup_\alpha B_\alpha$ для деякої множини $\{B_\alpha\} \subset \mathcal{B}$.

Нехай x — точка топологічного простору S. Множина N називається ***околом*** точки x, якщо існує відкрита множина U така, що $x \in U \subset N$.

Сім'ю $\mathcal{N}$ підмножин топологічного простору S називають ***базою околів*** точки x, якщо кожна з $N \in \mathcal{N}$ є околом точки x і для довільного околу M точки x існує така множина $N \in \mathcal{N}$, що $N \subset M$. Поширеною є також назва ***фундаментальна система околів***.

Означення 8. Нехай $(S, \mathcal{T})$ та $(T, \mathcal{U})$ — два топологічні простори. Функція $f : S \to T$ називається ***неперервною***, якщо $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ для кожної $A \in \mathcal{U}$, тобто прообраз довільної відкритої множини є відкритою множиною.

Функція f називається ***відкритою***, якщо $f(B)$ відкрита для кожної $B \in \mathcal{T}$. Якщо f відкрита й неперервна, то вона називається ***взаємно неперервною***. Взаємно неперервна бієкція називається ***гомеоморфізмом***.

Гомеоморфізми — це ізоморфізми топологічних просторів.

Означення 9. Нехай $(S, \mathcal{T})$ — топологічний простір і $A \subset S$. Індукована (відносна) топологія на A визначається сім'єю множин $\mathcal{T}_A = \{O \bigcap A | O \in \mathcal{T}\}$. Підмножина $B \subset A$ називається ***відкритою в індукованій топології***, якщо $B \in \mathcal{T}_A$.

Топологічний простір називається ***віддільним***, або ***хаусдорфовим***, якщо довільні дві його різні точки мають околи, що не перетинаються. Важливий клас топологічних просторів утворюють метричні простори. За базу топології в ньому можна обрати сім'ю його куль.

Нехай E — векторний простір над полем Φ дійсних або комплексних чисел. Кажуть, що топологія $\mathcal{T}$ в E узгоджується з алгебраїчною структурою, якщо алгебраїчні операції в E неперервні, тобто $x + y$ є неперервною функцією пари змінних x, y та λx — неперервна функція пари змінних λ, x. ***Топологічний векторний простір*** над Φ — це векторний простір над Φ, наділений топологією, що узгоджується з його алгебраїчною структурою.

У кожному топологічному векторному просторі існує базис урівноважених околів. У найбільш важливих топологічних векторних просторах існує також базис опуклих околів. Такі простори називають ***локально опуклими***.

Означення 10. Невід'ємна (скінченна) дійснозначна функція p, визначена на E, називається напівнормою, якщо вона задовольняє властивості:

1) $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ (напівадитивність);

2) $p(\lambda x) = |\lambda| x$

для всіх $x, y \in E$ та $\lambda \in \Phi$.

Кожній абсолютно опуклій та поглинаючій множині M векторного простору E можна зіставити функціонал

$$p_M(x) = \inf_{\alpha > 0, \alpha^{-1} x \in M} \alpha,$$

який називається ***функціоналом Мінковського,*** причому він буде утворювати деяку напівнорму в E [11]. І навпаки, для довільної напівнорми p на E множини $\{x : p(x) < \alpha\}$ та $\{x : p(x) \leq \alpha\}$ для довільного $\alpha > 0$ абсолютно опуклі та поглинаючі. Виявляється, що ця двоїстість між напівнормами та абсолютно опуклими поглинаючими множинами дає можливість по-іншому визначити поняття локально опуклого простору [28, с. 30].

Теорема 1. *Нехай на векторному просторі E задана довільна сім'я напівнорм Q. Тоді в E існує найслабша, узгоджена з алгебраїчною структурою, топологія, у якій кожна напівнорма з Q неперервна. У цій топології E є локально опуклим простором із базисом замкнених околів, утвореним можливими множинами вигляду*

$$\{x : \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(x) \leq \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0, p_i \in Q).$$

Локально опуклий простір E буде віддільним тоді й тільки тоді, коли система напівнорм Q, що задає його топологію, задовольнятиме таку ***аксіому віддільності***: для кожного $x \neq 0$ існує напівнорма $p \in Q$ така, що $p(x) \neq 0$ [11, 28].

У літературі часто локально опуклим простором називають віддільний локально опуклий простір.

Якщо p — норма на E, то простір E, топологія якого визначається цією нормою, буде нормованим, а тому й метричним. Наступна теорема характеризує метричні локально опуклі простори [27, с. 150].

Теорема 2. *Нехай E — віддільний локально опуклий топологічний простір. Такі умови рівносильні:*

a) E метризований;

b) нуль має зліченний базис околів;

c) топологія на E породжується деякою зліченною множиною напівнорм.

Повний метризований локально опуклий простір називається ***простором Фреше***. Повний нормований простір називається ***простором Банаха (банаховим)***.

Нехай E — векторний простір над полем Φ та M — його векторний підпростір. Тоді відношення $x-y \in M$ є відношенням еквівалентності в E та множина E/M усіх класів еквівалентності $X, Y, ...$ може бути розглянута як векторний простір над Φ, який називається ***факторпростором*** E за відношенням M (якщо $X, Y \in E/M$, то $X + Y \in E/M$ та $\lambda X \in E/M$ при $\lambda \neq 0$; залишається покласти $0 \cdot X = M$) [28, с. 115]. Класом еквівалентності $k(x)$, якому належить елемент $x \in E$, є $x + M$ та k — лінійне відображення; воно називається ***канонічним відображенням*** E на E/M.

Якщо E — локально опуклий простір та $\mathcal{U}$ — базис абсолютно опуклих околів, то множина $k(U)(U \in \mathcal{U})$ утворює базис околів топології в E/M, яка називається ***фактортопологією***; E/M, наділений цією топологією, є локально опуклим простором. Оскільки $U \subset k^{-1}(k(U))$ для кожного $U \in \mathcal{U}$, то k неперервне; при цьому фактортопологія — найсильніша з топологій в E/M, за якої k неперервне.

Наведемо властивості факторизованого локально опуклого простору у вигляді теорем із [28].

Теорема 3. *Факторпростір E/M, наділений фактортопологією, віддільний тоді й тільки тоді, коли M — замкнений векторний підпростір простору E.*

Теорема 4. *Довільне лінійне відображення t локально опуклого простору E у локально опуклий простір F розкладається в композицію $t = u \circ k$, де u — взаємно однозначне лінійне відображення $E/t^{-1}(0)$ у F, k — канонічне відображення E на $E/t^{-1}(0)$; t неперервне тоді й тільки тоді, коли неперервне u.*

У загальному випадку факторпростір повного простору за його замкненим векторним підпростором не обов'язково буде повним. Простір Фреше має в цьому сенсі перевагу, а саме: виконується таке твердження [28, с. 175].

Теорема 5. *Факторпростір простору Фреше за замкненим векторним підпростором є простором Фреше.*

Нехай E — локально опуклий простір, M та N — векторні підпростори простору E, які перетинаються лише в нулі. ***Прямою (алгебраїчною) сумою*** просторів M та N називається множина всіх векторів $x_1 + x_2, \quad x_1 \in M, x_2 \in N$, якщо вони породжують весь простір E (це означає виконання умов $M + N = E, M \cap N = \emptyset$). Позначається: $E = M \dot{+} N$. Якщо, крім того, M та N є замкненими підпросторами (наділеними відповідною індукованою топологією), то кажуть про розклад у пряму (топологічну) суму замкнених підпросторів і пишуть $E = M \oplus N$. У цьому випадку підпростір M називають ***топологічним прямим доповненням*** підпростору N у E. Підпростір, для якого існує топологічне пряме доповнення, називається ***топологічно доповнювальним***. На жаль, пряма сума двох підпросторів може не бути підпростором (тобто може бути незамкненою). Далі ми наведемо твердження стосовно доповнювальності та розкладу в топологічні суми підпросторів вихідного простору [8, с. 45, 46].

Теорема 6. *Нехай B — банахів простір і B_1 та B_2 — два його підпростори, які перетинаються лише в нулі. Для того, щоб пряма сума $B_1 \oplus B_2$ була підпростором, необхідно та достатньо, щоб існувала константа $k \geq 0$ така, що*

$$||x_1 + x_2|| \geq k(||x_1|| + ||x_2||), \quad x_1 \in B_1, x_2 \in B_2.$$

Якщо $B = H$ — простір Гільберта, то довільний його підпростір має пряме доповнення, за яке можна обрати ортогональне доповнення до підпростору.

Теорема 7 ([1])**.** *Якщо B_1 — n-вимірний підпростір простору Банаха B, то для B_1 існує замкнене доповнення, яке може бути заданим за допомогою n лінійно незалежних функціоналів. Якщо B_2 — замкнений підпростір у просторі Банаха B, заданий скінченним набором із n лінійно незалежних функціоналів*

$$B_2 = \{x : f_i(x) = 0, i = 1, ..., n\},$$

то для B_2 існує доповнення розмірністю n.

Проблема доповнювальності банахових підпросторів пов'язана з відомою проблемою Банаха (див. оглядову статтю [25]).

Один з найперших прикладів недоповнювального підпростору був побудований Р. Філіпсом. Відомо [35, с. 183], що простори c_0 (збіжних до нуля послідовностей) та ℓ_∞ (обмежених послідовностей) є банаховими відносно норми $||\xi||_\infty :=$

$\sup\{|\xi_k||k \in \mathbb{N}\}$ ($\xi = (\xi_1, \xi_2, ...)$), причому c_0 — замкнений підпростір простору ℓ_∞ корозмірністю 1. Філіпсом було доведено, що підпростір c_0 в ℓ_∞ недоповнювальний. Насправді справедлива така теорема [35, 46].

Теорема 8 (Лінденштрауса – Цафрірі)**.** *Такі властивості банахового простору E еквівалентні:*

i) будь-який підпростір у E має топологічне пряме доповнення;

ii) простір E топологічно ізоморфний деякому гільбертовому простору.

Для локально опуклих просторів справедливі такі теореми відносно розкладу простору в топологічні прямі суми підпросторів [28].

Теорема 9. *Нехай локально опуклий простір E є алгебраїчною прямою сумою власних векторних підпросторів M та N, p та q — проекції E на M та N, а h та k — канонічні відображення E на E/M та E/N. Тоді такі твердження рівносильні:*

1) E є топологічною сумою підпросторів M та N;

2) p неперервне;

3) q неперервне;

4) h — ізоморфізм N на E/M;

5) k — ізоморфізм M на E/N.

Теорема 10. *Векторний підпростір M локально опуклого простору E є доповнювальним тоді й тільки тоді, коли існує неперервний лінійний проектор p простору E у себе такий, що $p(E) = M$ та $p^2 = p$.*

Наприкінці не можна не зазначити, що простір Фреше має також стосовно доповнювальності переваги над іншими локально опуклими просторами. Справедливе таке твердження.

Теорема 11 ([28]). *Якщо простір Фреше є алгебраїчною прямою сумою двох власних векторних підпросторів, то він є їх топологічною сумою.*

1.1.2. Узагальнено-обернені та псевдообернені оператори

Розглядатимемо тільки лінійні перетворення та оператори.

Нехай V та W — векторні простори над довільним полем, $\mathcal{L}(V, W)$ — множина всіх лінійних перетворень, що діють із простору V у простір W. Для лінійного перетворення $A \in \mathcal{L}(V, W)$ через $R(A)$ та $N(A)$ позначатимемо відповідно образ та ядро A.

Означення 11 ([43]). Нехай $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Лінійне перетворення $B \in \mathcal{L}(W, V)$ називається ***напівоберненим*** для A, якщо $ABA = A$.

Означення 12. Нехай $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Лінійне перетворення $B \in \mathcal{L}(W, V)$ називається ***рефлексивно напівоберненим*** для A, якщо $ABA = A$ й одночасно $BAB = B$.

Означення 13. Нехай $A \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{H}$ — підпростір V такий, що $V = \mathcal{H} \oplus N(A)$, і нехай $\mathcal{J}$ — підпростір W такий, що $W = R(A) \oplus \mathcal{J}$. Тоді пара $(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ називається A-***допустимою парою***.

Наявність таких пар для будь-якого лінійного перетворення над векторними просторами випливає з того факту, що будь-який підпростір векторного простору має алгебраїчне доповнення [43].

Означення 14. Нехай $A \in \mathcal{L}(V, W)$ та $(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ — A-допустима пара. Тоді відображення

$$A^{+}_{\mathcal{H},\mathcal{J}} : W \to V,$$

$$A^{+}_{\mathcal{H},\mathcal{J}} y = A^{-1}_{\mathcal{H}} y_1, \quad y = y_1 + y_2, \quad y_1 \in R(A), y_2 \in \mathcal{J}$$

називається $(\mathcal{H}, \mathcal{J})$***-псевдооберненим*** до A.

У цьому означенні відображення $A_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to R(A)$ діє за правилом $A_{\mathcal{H}} x = Ax, \quad x \in \mathcal{H}$. Згідно з теоремою 12 [43] це відображення має лінійне обернене $A^{-1}_{\mathcal{H}}$.

Будь-яке псевдообернене відображення є також рефлексивно напівоберненим. Для будь-якого лінійного відображення над векторними просторами існує псевдообернене.

Узагальнення цих результатів на випадок просторів з додатковою геометричною структурою не завжди можливо й потребує додаткових вимог.

Наприклад, у гільбертовому просторі для того, щоб множина значень лінійного оператора була підпростором, вона повинна бути замкненою. У такому випадку існує ортогональне доповнення до цього підпростору [27]. У банаховому просторі навіть умова замкненості підпростору виявляється не достатньою для існування топологічного доповнення до всього простору (про це йшлося раніше).

Оскільки замкненість множини значень є суттєвою умовою, то серед класу операторів, що діють з одного банахового простору в інший, виділяють нормально розв'язні. Існує кілька еквівалентних означень цього класу операторів [13, 15, 33, 39].

Означення 15. Щільно визначений оператор L, що діє з одного банахового простору B_1 в інший B_2, називається ***нормально розв'язним***, якщо його множина значень замкнена $R(L) = \overline{R(L)}$.

Надалі $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ позначатимемо простір лінійних неперервних операторів, що діють із простору Банаха B_1 у простір

Банаха B_2.

Для множини M у банаховому просторі $\mathbf{B}$ та множини N у його спряженому просторі $\mathbf{B}^*$ виділяють такі поняття ортогональності [15]:

$$M^{\perp} = \{f \in \mathbf{B}^* :< x, f >= 0, \forall x \in M\};$$

$$^{\perp}N = \{x \in \mathbf{B} :< x, f >= 0, \forall f \in N\}.$$

Для рівнянь вигляду $Lx = y$ з нормально розв'язним оператором існують необхідні та достатні умови розв'язності.

Справедлива така теорема [8, 39]:

Теорема 12. *Для того, щоб замкнений щільно визначений оператор $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, у якого $R(L) \neq B_2$, був нормально розв'язним, необхідно й достатньо, щоб виконувалась одна з таких умов:*

a) $^{\perp}N(L^*) = R(L)$;

b) рівняння $Lx = y$ розв'язне лише для тих $y \in B_2$, що задовольняють умову

$$\phi(y) = 0,$$

де ϕ — будь-який розв'язок однорідного спряженого рівняння

$$L^*\phi = 0.$$

Однак ця теорема дає тільки умови розв'язності. Загальний розв'язок таких рівнянь можна визначити не завжди.

У випадку банахового простору оператор $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ називається ***узагальнено-оборотним***, якщо існує оператор $X \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ такий, що $LXL = L$ [8]. Зауважимо, що у випадку лінійних векторних просторів такий оператор мав назву напівоберненого. Оператор X називається ***узагальнено-оберненим*** до оператора L і позначається L^-. Зауважимо, що з множини узагальнено-обернених до L операторів можна виділити такий Y, що буде виконуватися додаткова умова $YLY = Y$. Якщо оператор L має узагальнено-обернений, то можна побудувати загальний розв'язок операторного рівняння $Lx = y$. За певних додаткових умов нормально розв'язний оператор є узагальнено-оборотним. Отже, справедливий такий критерій [8, 39].

Теорема 13. *Для того, щоб оператор $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ був узагальнено-оборотним, необхідно й достатньо, щоб:*

1) L був нормально розв'язним оператором;

2) підпростір $N(L)$ мав пряме доповнення у B_1;

3) підпростір $R(L)$ мав пряме доповнення у B_2.

У гільбертовому просторі нормальна розв'язність еквівалентна узагальненій оборотності. Будь-який скінченновимірний оператор є узагальнено-оборотним (умови 1 – 3 виконуються).

Якщо оператор $L \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ діє з простору Гільберта H_1 у простір Гільберта H_2, то з множини узагальнено-обернених операторів $L^- \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ можна обрати єдиний, що задовольняє властивості:

$$1)\ LL^-L = L; \qquad 2)\ L^-LL^- = L^-;$$

$$3)\ (LL^-)^* = LL^-; \quad 4)\ (L^-L)^* = L^-L.$$

Такий оператор називають псевдооберненим за Муром – Пенроузом [55] і позначають L^+. Цей оператор має додаткові екстремальні властивості на відміну від звичайного узагальнено-оберненого [8, 9, 10, 39, 57]. Зазначимо, що для існування L^+ достатньо виконання лише властивостей 1 та 3.

Серед нормально розв'язних виділяють кілька класів операторів, які становлять окремий інтерес [15].

Нехай $n = n(L) = dimN(L)$, $m = m(L) = dimN(L^*)$. Індекс оператора визначається як $indL = n(L) - m(L)$ [15, 39].

Згідно з класифікацією С. Г. Крейна [15] нормально розв'язний замкнений оператор, у якого $n(L)$ або $m(L)$ скінченне, називається ***n-нормальним*** або ***d-нормальним*** оператором, відповідно.

У випадку, коли обидва числа $n(L)$ та $m(L)$ є скінченними, оператор L називається ***нетеровим***. Якщо ж додатково оператор L є оператором з нульовим індексом, то він називається ***фредгольмовим***.

Слід зауважити, що в іноземній літературі останні два типи операторів часто не розрізняють і називають їх або фредгольмовими, або F-операторами.

Для фредгольмових операторів справедлива відома лема Шмідта [6] та її розвинення — теорема Нікольського [19] про загальне зображення обмеженого фредгольмового оператора у вигляді суми неперервно оборотного та скінченновимірного операторів [39]. Узагальнення цього критерію на необмежені оператори та просте доведення теореми Нікольського можна знайти в роботах Рамма [56].

Така характеризація Нікольського справедлива лише для фредгольмових операторів і не має місця для нетерових.

Для нетерових операторів має місце результат Аткінсона [2] про те, що довільний нетерів оператор може бути зображений у вигляді суми односторонньо оберненого та скінченновимірного операторів.

Наведені вище теореми про зображення дають можливість отримати конструкцію узагальнено-оберненого до нетерового оператора за допомогою спеціальних скінченновимірних операторів, що додаються до вихідного нетерового [39]. Це оператори проектування на ядро та образ нетерового оператора.

Теорія узагальнено-обернених операторів ефективно використовується при дослідженні рівнянь з оператором, що має вказані вище властивості.

1.2. Теорія обмежених операторів та операторних рівнянь у просторах Фреше, Банаха та Гільберта

Добре відомо [49, 55], що для будь-якої прямокутної матриці розміром $m \times n$ існує псевдообернена за Муром – Пенроузом. На жаль, такого результату для лінійних відображень у нескінченновимірних, навіть у просторах Гільберта, отримати не вдається через наявність складнішої геометрії. Як відомо, у просторах Гільберта довільний лінійний обмежений оператор L має псевдообернений за Муром – Пенроузом оператор L^+ тоді й тільки тоді, коли він є нормально розв'язним. Таким чином, умова замкнености множини значень L виділяє підклас нормально розв'язних операторів, що мають псевдообернений. Для просторів Банаха та більш загальних топологічних просторів і цієї умови виявляється недостатньо, навіть для того, щоб існував узагальнено-обернений оператор L^-. Існування такого оператора забезпечує умова доповнювальності підпросторів $\overline{R(L)} = R(L)$ та $N(L)$ нормально розв'язного оператора. Для операторів, що не мають замкненої множини значень, такої завершеної теорії не розроблено. Саме тому цей підрозділ присвячено питанням визначення та зображення узагальнено-обернених операторів для лінійних обмежених, що діють у просторах Фреше, Банаха та Гільберта з не обов'язково замкненою множиною значень. Для того, щоб розв'язати перше питання, пропонується розширити вихідний простір і оператор L на нього таким чином, щоб розширений оператор $\overline{L}$ був нормально розв'язним. Згідно із запропонованими означеннями для рівняння $Lx = y$ можливі три типи розв'язків, які існують за додаткових умов на праві частини. Зауважимо, що в загальному випадку такі задачі відносять до некоректних [32].

Нехай $L : H_1 \to H_2$ — довільний лінійний обмежений оператор, що діє з простору Гільберта H_1 у простір Гільберта

H_2. При цьому не припускається замкненість множини його значень.

Покажемо, яким чином можна розширити поняття псевдооберненого за Муром – Пенроузом оператора на довільні лінійні обмежені оператори.

Почнемо з побудови конструкції сильного псевдооберненого оператора у просторах Гільберта.

Розкладемо простори Гільберта H_1 та H_2 в ортогональні суми

$$H_1 = N(L) \oplus X, H_2 = \overline{R(L)} \oplus Y. \tag{1.1}$$

Тут $X = N(L)^{\perp}, Y = \overline{R(L)}^{\perp}$ — відповідно ортогональні доповнення до нуль-простору та замикання оператора L. Унаслідок зображення (1.1) існують оператори ортогонального проектування $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_X$ та $\mathcal{P}_{\overline{R(L)}}$, $\mathcal{P}_Y$ на відповідні підпростори. Позначимо через H факторпростір простору H_1 за ядром $N(L)$ ($H = H_1/N(L)$). Тоді, як відомо [26, 28], існує неперервна бієкція, тобто взаємно однозначне неперервне відображення $p : X \to H$ та проекція $j : H_1 \to H$. Трійка (H_1, H, j) є локально тривіальним розшаруванням з типовим шаром $\mathcal{P}_{N(L)}H$. Визначимо тепер оператор

$$\mathcal{L} = \mathcal{P}_{\overline{R(L)}} L j^{-1} p : X \to R(L) \subset \overline{R(L)}.$$

Цей оператор визначається за допомогою такого ланцюга просторів та операторів:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{p} & H & \xrightarrow{j^{-1}} & H_1 \\ H_1 & \xrightarrow{L} & H_2 & \xrightarrow{\mathcal{P}_{\overline{R(L)}}} & R(L) \subset \overline{R(L)}. \end{array}$$

Легко переконатися в тому, що так визначений оператор є лінійним, неперервним та ін'єктивним (тобто якщо $x_1 \neq x_2$, то $\mathcal{L}x_1 \neq \mathcal{L}x_2$). Тепер, скориставшися процесом поповнення [16] за нормою $||x||_{\overline{X}} = ||\mathcal{L}x||_F$, де $F = \overline{R(L)}$, отримаємо новий простір $\overline{X}$ і розширений оператор $\overline{\mathcal{L}}$, який буде здійснювати гомеоморфізм між $\overline{X}$ та $\overline{R(L)}$:

$$\overline{\mathcal{L}} : \overline{X} \to \overline{R(L)}, \quad X \subset \overline{X}.$$

Розглянемо розширений оператор $\overline{L} = \overline{\mathcal{L}}\mathcal{P}_{\overline{X}} : \overline{H}_1 \to H_2$,

$$\overline{H}_1 = N(L) \oplus \overline{X}, \quad H_2 = R(\overline{L}) \oplus Y.$$

Зрозуміло, що оператор $\overline{L}$ нормально розв'язний та $\overline{L}x = Lx$ для всіх $x \in H_1$. Отже, побудувавши оператор $\overline{L}$, який уже є нормально розв'язним, можемо ввести таке означення.

Означення 16. Оператор $\overline{L}^{+} : H_2 \to \overline{H}_1$ будемо називати сильним псевдооберненим до оператора L.

Зауваження 1. З означення 16 випливає, що узагальнений псевдообернений до оператора L оператор є псевдооберненим до оператора $\overline{L}$.

Розглянемо конструкцію сильного узагальнено-оберненого оператора у просторах Фреше та Банаха. Нагадаємо, що у випадку, коли вихідні простори H_1 та H_2 є векторними, поняття узагальнено-оберненого оператора було введено ще в роботі Е. Дойтча [43]. За рахунок процесу поповнення, про який ішлося вище, можна поширити це поняття на випадок лінійних операторів у просторах Фреше та Банаха з незамкненою множиною значень.

Перейдемо до відповідних конструкцій. Нехай задано лінійний обмежений оператор L, що діє з простору Банаха (Фреше) B_1 у простір Банаха (Фреше) B_2. Надалі будемо вважати, що простори $N(L)$ та $\overline{R(L)}$ доповнювальні, тобто мають місце розклади у прямі суми підпросторів

$$B_1 = N(L) \oplus X, B_2 = \overline{R(L)} \oplus Y, \qquad (1.2)$$

і розклади одиниці

$$I_{B_1} = P_{N(L)} + P_X, I_{B_2} = P_{\overline{R(L)}} + P_Y,$$

де $P_\star$ — проектори на відповідні підпростори.

За аналогією з означенням допустимої пари [43] уведемо означення узагальненої L допустимої пари.

Означення 17. Нехай $L : B_1 \to B_2$ — лінійний обмежений оператор, що діє з простору Банаха B_1 у простір Банаха B_2, а підпростори $X \subset B_1$ та $Y \subset B_2$ такі, що виконується умова (1.2). Тоді пару (X, Y) будемо називати ***узагальненою L-допустимою парою.***

Розглянемо звужений оператор $L_X : X \to \overline{R(L)}$, $L_X x = Lx, x \in X$ (він буде лінійним, неперервним та ін'єктивним). Поповнимо простір X за нормою $||x|| = ||L_X x||_{B_2}$ і розширимо оператор L_X на поповнений простір $\overline{X}$ за неперервністю. Розширений оператор будемо позначати $\overline{L}_X$. Тоді, як відомо, оператор $\overline{L}_X : \overline{X} \to \overline{R(L)}$ буде здійснювати гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ та $\overline{R(L)}$. Позначатимемо через $\overline{B}_1 = \overline{X} \oplus N(L)$ розширений вихідний простір.

Означення 18. Нехай $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ та (X, Y) — узагальнена L-допустима пара. Тоді відображення

$$L^-_{X,Y} : B_2 \to \overline{B}_1,$$

$$L^-_{X,Y} y = \overline{L}_X^{-1} y_1,\ y = y_1 + y_2,\ y_1 \in \overline{R(L)},\ y_2 \in Y,$$

називатимемо ***сильним*** (X, Y)***-узагальнено-оберненим до L.***

Безпосередньо з означення сильного (X, Y)-узагальнено-оберненого оператора випливають такі властивості:

$$LL^-_{X,Y}L = L, \quad L^-_{X,Y}LL^-_{X,Y} = L^-_{X,Y} \quad \text{на} \ \ X,$$

або із заміною L на L_X

$$\overline{L}_X L^-_{X,Y} \overline{L}_X = \overline{L}_X, \quad L^-_{X,Y} \overline{L}_X L^-_{X,Y} = L^-_{X,Y} \quad \text{на} \ \ \overline{X}.$$

Аналогів властивостей 3 та 4 із означення псевдооберненого оператора за Муром – Пенроузом (див. попередній підрозділ) у загальному випадку немає.

Зауваження 2. Якщо вихідні простори є просторами Фреше, то поповнювати їх слід за зліченною системою напівнорм [11, 16]. Запропонований підхід залишається справедливим у випадку деяких більш загальних, ніж Фреше, локально опуклих просторів, а відповідне поповнення будується за системою напівнорм, що визначають топологію простору.

Зауваження 3. Якщо вихідні простори є просторами Гільберта, то сильний псевдообернений оператор $\overline{L}^+$ до оператора L буде також сильним (X, Y)-узагальнено-оберненим до L. Таким чином, у просторах Гільберта довільний лінійний обмежений оператор має сильний $(N(L)^{\perp}, \overline{R(L)}^{\perp})$-узагальнено-обернений оператор, де $X = N(L)^{\perp}, Y = \overline{R(L)}^{\perp}$.

Зауваження 4. На загальні локально опуклі простори означення, запропоновані вище, перенести неможливо. Як зазначалося в попередньому підрозділі, факторпростір повного локально опуклого простору за його замкненим підпростором може бути неповним [28].

Проілюструємо запропоновані означення на прикладі конкретного оператора.

Нехай оператор $L : \ell_2 \to \ell_2$ діє за правилом

$$Lx = L(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = \left(0, x_2, \frac{x_3}{2}, ..., \frac{x_n}{n-1}, ...\right).$$

Тоді його ядро збігається з множиною послідовностей вигляду $\{\alpha(1, 0, 0, ...), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Після факторизації можна вважати, що маємо оператор $\mathcal{L} : \ell_2 \to \ell_2$, який діє за правилом

$$\mathcal{L}(y_1, y_2, ..., y_n, ...) = \left(y_1, \frac{y_2}{2}, ..., \frac{y_n}{n}, ...\right).$$

Щоб довести, що його множина значень не замкнена, достатньо помітити, що

$$\ell_2 \ni \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right) = \lim_{k\to\infty} \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, 0, 0, ...\right),$$

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, 0, 0, ...\right) = \mathcal{L}\left(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{k}, 0, 0, ...\right),$$

а вектор

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right) = \mathcal{L}(1, 1, ...).$$

Однак вектор, який складається з одиниць, не належить простору послідовностей ℓ_2. Тому вектор $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...)$ не належить множині значень оператора $\mathcal{L}$. Повповнивши простір ℓ_2 за нормою $||x||_{\overline{H}} = ||\mathcal{L}x||_{l_2}$, отримаємо простір $\overline{H} \supset \ell_2$, у якому цей оператор буде нормально розв'язним. Зазначимо, що простір $\overline{H}$ досить широкий, оскільки містить простір обмежених послідовностей ℓ_∞. Сильний псевдообернений оператор $\overline{L}^+ : \ell_2 \to \overline{H}$ у цьому випадку матиме вигляд

$$\overline{L}^+ x = \overline{L}^+(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (0, x_2, 2x_3, ..., (n-1)x_n, ...).$$

Отже, розглянутий приклад ілюструє, як з оператора L за допомогою запропонованої процедури отримати $\overline{L}$ та побудувати сильний псевдообернений оператор $\overline{L}^+$ у відповідних просторах. Наступний підрозділ присвячений застосуванню побудованої вище теорії до ров'язання операторних рівнянь.

1.3. Лінійні рівняння з обмеженим оператором. Поняття узагальнених розв'язків та їх зображення

Розглянемо у просторах Банаха B_1 та B_2 лінійне рівняння

$$Lx = y, \tag{1.3}$$

де y — фіксований елемент простору B_2, L — такий лінійний обмежений оператор, що пара (X, Y) є узагальненою L-допустимою. Відомо [39], що в загальному випадку розв'язок такого рівняння може існувати не для всіх правих частин і бути не єдиним. Коли розв'язку не існує у звичайному сенсі, часто відшукують такий елемент $x = \overline{x} \in B_1$, який мінімізує норму нев'язки $||L\overline{x} - y||_{B_2} = \inf_{x \in B_1} ||Lx - y||_{B_2}$. Його називають псевдо- або квазірозв'язком залежно від просторів, у яких розглядається рівняння [32, 39]. Для існування такого розв'язку умова замкненості множини значень оператора L є суттєвою й у загальному випадку така варіаційна задача може не мати розв'язку.

У цьому підрозділі запропоновано такі означення розв'язків для рівняння (1.3), щоб можна було гарантувати їх існування в тому чи іншому сенсі при довільних правих частинах.

Використавши побудовану вище конструкцію, розширимо вихідний простір B_1 і оператор L, заданий на ньому, таким чином, щоб варіаційна задача на розширеному просторі завжди мала розв'язки в певному сенсі. Відображення, яке буде встановлювати відповідність між розв'язками та правими частинами, у загальному випадку виявляється багатозначним.

Основні результати сформулюємо у просторах Банаха та Гільберта. У цьому разі для рівняння (1.3) будемо виділяти такі три типи розв'язків.

1) Класичні розв'язки.

Розглянемо випадок, коли оператор L нормально розв'язний. Як відомо з [39], $y \in R(L)$ тоді й тільки тоді, коли

$\mathcal{P}_{N(L^*)}y = 0$. У цьому випадку існує узагальнено-обернений оператор L^-, а у випадку просторів Гільберта — псевдообернений за Муром – Пенроузом оператор L^+. Множина розв'язків рівняння (1.3) у просторі Банаха має вигляд

$$x = L^- y + \mathcal{P}_{N(L)} c \quad \forall c \in B_1,$$

а у просторі Гільберта —

$$x = L^+ y + \mathcal{P}_{N(L)} c \quad \forall c \in H_1.$$

2) Сильні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли множина значень оператора L не є замкненою. Оскільки оператор L має (X, Y) узагальнену L-допустиму пару, то для просторів B_1 та B_2 справедливий розклад (1.2).

Тоді ми можемо вести мову про сильний узагальнений розв'язок рівняння (1.3). Оскільки оператор $\overline{L}_X$ здійснює гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ та $\overline{R(L)}$, то існує $\overline{L}_X^{-1}$ і коректним буде таке означення.

Означення 19. Елемент $\overline{L}_X^{-1} y$ будемо називати сильним узагальненим розв'язком рівняння (1.3), якщо $y \in \overline{R(L)}$.

Тоді множина всіх сильних узагальнених розв'язків рівняння (1.3) матиме вигляд

$$x = L^-_{X,Y} y + \mathcal{P}_{N(L)} c \quad \forall c \in B_1,$$

а оператор $L^-_{X,Y} y = \overline{L}_X^{-1} y_1$, де $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in \overline{R(L)}, y_2 \in Y$.

3) Узагальнені квазірозв'язки.

Розглянемо випадок, коли $y \notin \overline{R(L)}$. Для елемента y це рівносильно виконанню умови $\mathcal{P}_{N(L^*)} y \neq 0$. У цьому випадку сильних узагальнених розв'язків не існує, але існують такі елементи з $\overline{X}$, що є розв'язками варіаційної задачі $\inf_x ||\overline{L}x - y||_{B_2}$, де $\overline{L} = \overline{L}_{\overline{X}} \mathcal{P}_{\overline{X}}$ та інфімум береться за всіма елементами $x \in \overline{X}$. Ці елементи і будемо називати узагальненими квазірозв'язками.

Означення 20. Довільний елемент із множини $\{L^{-}_{X,Y}y + \mathcal{P}_{N(L)}c\}_{c \in B_1}$ будемо називати узагальненим квазірозв'язком рівняння (1.3).

Зауваження 5. Зазначимо, що якщо $R(L) = \overline{R(L)}$, то узагальнені квазірозв'язки збігаються зі звичайними квазірозв'язками.

Зауваження 6. З наведеного вище означення елемент $L^{-}_{X,Y}y$ може мати не найменшу норму, на відміну від $\overline{L}^{+}y$.

Теорема 14. *Нехай для оператора L існує (X, Y) узагальнена L-допустима пара.*

1. a) *Сильні узагальнені розв'язки рівняння (1.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in B_2$ задовольняє умову*

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^{*})}y = 0; \tag{1.4}$$

якщо $y \in R(L)$, то отримані розв'язки будуть класичними;

b) *якщо умова (1.4) виконується, то множина сильних узагальнених розв'язків рівняння (1.3) буде мати вигляд*

$$x = L^{-}_{X,Y}y + \mathcal{P}_{N(L)}c \quad \forall c \in B_1.$$

2. a) *Узагальнені квазірозв'язки рівняння (1.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in B_2$ задовольняє умову*

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^{*})}y \neq 0; \tag{1.5}$$

b) якщо умова (1.5) виконується, то множина узагальнених квазірозв'язків матиме вигляд

$$x = L^{-}_{X,Y} y + \mathcal{P}_{N(L)} c \quad \forall c \in B_1.$$

У випадку гільбертових просторів теорему 14 можна трохи уточнити.

Наслідок 1. *Рівняння (1.3) з лінійним обмеженим оператором L є завжди розв'язним.*

1\. *a) Сильні узагальнені розв'язки рівняння (1.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in H_2$ задовольняє умову*

$$\mathcal{P}_{N(L^*)} y = 0, \tag{1.6}$$

яка еквівалентна умові

$$(\varphi, y) = 0 \tag{1.7}$$

для всіх φ таких, що $\overline{L}^* \varphi = 0$; якщо $y \in R(L)$, то отримані розв'язки будуть класичними;

b) якщо умова (1.7) виконується, то множина сильних узагальнених розв'язків рівняння (1.3) матиме вигляд

$$x = \overline{L}^{+} y + \mathcal{P}_{N(L)} c, \forall c \in H_1.$$

2\. *a) Узагальнені псевдорозв'язки рівняння (1.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in H_2$ задовольняє умову*

$$\mathcal{P}_{N(L^*)} y \neq 0, \tag{1.8}$$

яка еквівалентна умові

$$(\varphi, y) \neq 0; \tag{1.9}$$

b) якщо умова (1.9) виконується, то множина узагальнених псевдорозв'язків буде мати вигляд

$$x = \overline{L}^{+} y + \mathcal{P}_{N(L)} c, \forall c \in B_1.$$

Зауваження 7. У просторах Гільберта зазначені вище проектори будуть ортопроекторами.

1.4. Лінійні нормально-розв'язні рівняння, проектори у просторах Банаха

Раніше для фредгольмових і нетерових операторів було наведено відомі теореми про зображення, що дозволяють будувати узагальнено-обернений оператор додаванням до вихідного скінченновимірних операторів. Це — проектори на ядро та образ нетерового оператора. У цьому підрозділі досліджуються аналогічні зображення з нескінченновимірними проекторами. Визначено вигляд проекторів та умови, за яких такі зображення можливі. Досліджено лінійні рівняння з нормально розв'язним оператором. Наведено аналогії між класом усіх узагальнено-обернених операторів [21].

Нехай L — лінійний обмежений оператор, що діє у просторах Банаха E_1 та F_1. Будемо припускати, що оператор L індукує такий розклад цих просторів:

$$E_1 = N(L) \oplus X_1, \; F_1 = Y_1 \oplus R(L), \tag{1.10}$$

де через $N(L)$ та $R(L)$ традиційно позначені ядро й образ оператора L, тобто оператор L нормально розв'язний. Поряд з (1.10) маємо розклади одиниць на суми проекторів:

$$I_{E_1} = P_{N(L)} + P_{X_1}, \tag{1.11}$$

$$I_{F_1} = P_{Y_1} + P_{R(L)}. \tag{1.12}$$

Задача полягає у відшуканні розв'язків лінійного рівняння

$$Lx = y, \tag{1.13}$$

а також зображенні проекторів, що фігурують у (1.11), (1.12). Далі буде розроблено підхід до вивчення лінійного рівняння (1.13) з використанням просторів функцій. Будемо позначати через $dim N(L) = \mathcal{U}$ й $dim N(L^*) = \mathcal{V}$ потужності нуль-просторів операторів L та його спряженого L^*, відповідно (при цьому їхня зліченність припускатися не буде). Проектори $P_{N(L)}$, P_{Y_1} у певних випадках можуть бути зображені як розклади в ряд за системою базисних елементів, якщо остання існує. Нагадаємо деякі факти щодо базисів, що будуть використовуватись далі.

Означення 21 ([12])**.** Послідовність $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ векторів простору Банаха утворює базис Шаудера або топологічний базис, якщо кожен його вектор x однозначно може бути розкладений у ряд $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$, збіжний за нормою.

Нехай тепер $\mathcal{U}$ — множина довільної потужності.

Означення 22. Система елементів $\{e_\alpha, \alpha \in \mathcal{U}\}$ є *мінімальною*, якщо жоден елемент цієї системи не належить замкненій оболонці інших елементів.

Умова мінімальності виконується далеко не завжди, навіть у гільбертовому просторі [12]. Надалі будемо припускати існування базисних систем елементів $N(L)$ та Y_1.

Як відомо [35], для довільного простору Банаха B існує ізометрія на деякий підпростір простору $\ell_\infty(X)$, де X — одинична куля у спряженому до B просторі $X = S_1(B^*)$. Унаслідок цих міркувань існують такі набори ізометрій:

1) ізометрія $J_1 : E_1 \to E_2 \subset \ell_\infty(S_1(E_1^*))$;

2) ізометрія $J_2 : F_1 \to F_2 \subset \ell_\infty(S_1(F_1^*))$, тут $E_2 = J_1(E_1)$, $F_2 = J_2(F_1)$ — замкнені підпростори банахових просто-

рів $\ell_\infty(S_1(E_1^*))$ та $\ell_\infty(S_1(F_1^*))$, відповідно; $S_1(E^*)$ — одинична сфера у просторі, спряженому до E.

Ізометрія J_1 переводить кожен елемент x простору E_1 у функціонал

$$h_x : S_1(E_1^*) \to \mathbb{R},$$

що діє за правилом $h_x(f) = f(x), f \in S_1(E_1^*)$. При цьому

$$||x||_{E_1} = ||J_1(x)||_{\ell_\infty(S_1(E_1^*))} = ||h_x||_{E_2} =$$

$$= \sup_{f\in S_1(E_1^*)} |h_x(f)| = \sup_{f\in S_1(E_1^*)} |f(x)|.$$

Ізометрія J_2 діє аналогічно з простору F_1 у підпростір $\ell_\infty(S_1(F_1^*))$.

Уведемо до розгляду такий оператор $\mathcal{L} := J_2 L J_1^{-1} : E_2 \to F_2$. Оператор $\mathcal{L}$ робить комутативною діаграму

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "L"] \arrow[d, "J_1"'] & F_1 \arrow[d, "J_2"] \\ \ell_\infty(S_1(E_1^*)) \supset E_2 \arrow[r] & F_2 \subset \ell_\infty(S_1(F_1^*)), \end{tikzcd}$$

а оператори L та $\mathcal{L}$ є слабко подібними (пара (J_1, J_2) здійснює слабку подібність) у категорії Ban (див. [35]). Нагадаємо, що об'єктами в цій категорії є довільні простори Банаха, а морфізмами — лінійні обмежені оператори.

Відомо [35], що пара ізометрій (J_1, J_2) здійснює слабку подібність між L та $\mathcal{L}$ тоді й тільки тоді, коли вона є ізоморфізмом у категорії $Mor(Ban)$. Об'єктом у зазначеній категорії є довільний лінійний обмежений оператор, що діє з одного простору Банаха в інший. Морфізми в категорії Ban визначаються такими парами лінійних обмежених операторів (ρ_1, ρ_2), що $\rho_1\mathcal{L} = L\rho_2$.

Неважко побачити, що

$$||\mathcal{L}||_{E_2\to F_2} = ||J_2 L J_1^{-1}||_{E_2\to F_2} \leq$$

$$\leq ||J_2||_{F_1\to F_2}||L||_{E_1\to F_1}||J_1^{-1}||_{E_2\to E_1} = ||L||_{E_2\to F_2}.$$

Для доведення нерівності в інший бік достатньо виконати аналогічну процедуру з оператором $L = J_2^{-1}\mathcal{L}J_1$. Звідси робимо висновок, що $||\mathcal{L}||_{E_2\to F_2} = ||L||_{E_1\to F_1}$. Таким чином, ми можемо перейти від рівняння (1.13) до еквівалентного (у сенсі збереження відстані) рівняння

$$\mathcal{L}h_x = p_y, \tag{1.14}$$

але вже визначеного у просторах функцій. Оператор $\mathcal{L}$, унаслідок слабкої подібності, також буде індукувати розклади просторів E_2 та F_2:

$$E_2 = N(\mathcal{L}) \oplus X_2, \quad F_2 = Y_2 \oplus R(\mathcal{L}), \tag{1.15}$$

де X_2, Y_2 — деякі підпростори просторів E_2 та F_2, відповідно. Позначимо мінімальну систему базисних функцій нуль-простору $N(\mathcal{L}) \subset E_2$ через $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{U}} \subset N(\mathcal{L})$, а мінімальну систему базисних елементів (функціоналів) нуль-простору $N(\mathcal{L}^*) \subset F_2$ — через $\{\varphi_\beta(\cdot)\}_{\beta\in\mathcal{V}} \subset N(\mathcal{L}^*)$ (за припущення, що останні існують). З мінімальності базисних функцій $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{U}}$ і базисних функціоналів $\{\varphi_\beta(\cdot)\}_{\beta\in\mathcal{V}}$ випливає, що існують біортогонально спряжена система $\{f_\alpha(\cdot)\}_{\alpha\in\mathcal{U}}$ лінійних функціоналів і система функцій $\{\psi_\beta\}_{\beta\in\mathcal{V}}$, тобто

$$f_\lambda(e_\mu) = \delta_{\lambda\mu}, \lambda, \mu \in \mathcal{U}, \varphi_\nu(\psi_\gamma) = \delta_{\nu\gamma}, \nu, \gamma \in \mathcal{V},$$

де $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Проектор на нуль-простір оператора $\mathcal{L}$ побудуємо таким чином:

$$P_{N(\mathcal{L})}h_x = \sum_{\alpha\in\mathcal{U}} f_\alpha(h_x)e_\alpha. \tag{1.16}$$

Аналогічно будується проектор на підпростір Y_2:

$$P_{Y_2} p_y = \sum_{\beta \in \mathcal{V}} \varphi_\beta(p_y)\psi_\beta. \tag{1.17}$$

Те, що так визначені оператори є дійсно проекторами, доводиться безпосередньою перевіркою означення.

Теорема 15. *Рівняння (1.14) буде розв'язним для тих і лише тих $p_y \in F_2$, які задовольняють рівність*

$$\sum_{\beta \in \mathcal{V}} \varphi_\beta(p_y)\psi_\beta = 0. \tag{1.18}$$

За виконання умови (1.18) розв'язки рівняння (1.14) матимуть вигляд

$$h_x = \sum_{\alpha \in \mathcal{U}} f_\alpha(r_z)e_\alpha + \mathcal{L}^- p_y \tag{1.19}$$

для довільної функції $r_z \in E_2$; $\mathcal{L}^-$ — узагальнено-обернений до оператора $\mathcal{L}$.

Наведемо нарис доведення. З розкладу (1.15) випливає, що оператор $\mathcal{L}$ нормально розв'язний і узагальнено-оборотний. Тоді, як відомо з [39], необхідною й достатньою умовою розв'язності рівняння (1.14) є рівність

$$P_{N(\mathcal{L}^*)} p_y = 0. \tag{1.20}$$

Оскільки $\mathcal{L}$ нормально розв'язний, то ${}^\perp N(\mathcal{L}^*) = R(\mathcal{L})$. Водночас справедливий розклад (1.15). Тоді умову (1.20) можна замінити на

$$P_{Y_2} p_y = 0.$$

Виходячи із (1.17), отримуємо (1.18). За виконання умов розв'язності розв'язки рівняння (1.14) матимуть вигляд

$$h_x = P_{N(\mathcal{L})} r_z + \mathcal{L}^- p_y \tag{1.21}$$

для довільної функції $r_z \in F_2$. Підставивши (1.16) у (1.21), отримаємо зображення (1.19).

Розглянемо детальніше випадок, коли простори E_1 та F_1 сепарабельні. У цьому випадку оператор $\mathcal{L}$ можна розглядати як такий, що діє не в просторах функцій, а в просторах послідовностей. Відомо, що у випадку сепарабельних просторів E_1 та F_1 їх можна ізометрично вкласти в деякі підпростори простору послідовностей ℓ_∞. У цьому випадку можна вести мову про комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \xrightarrow{j_1} & E_3 \subset C(B_1(E_1^*)) & \xrightarrow{j_2} & E_4 \subset \ell_\infty \\ L\Big\downarrow & & & & \Big\downarrow\mathcal{L} \\ F_1 & \xrightarrow{i_1} & F_3 \subset C(B_1(F_1^*)) & \xrightarrow{i_2} & F_4 \subset \ell_\infty, \end{array}$$

де $j_1 : E_1 \to E_3 \subset C(B_1(E_1^*))$ — ізометрія (перетворення Гельфанда), що зіставляє кожному вектору $x \in E_1$ функціонал означування $h_x : B_1(E_1^*) \to \mathbb{R}$ за правилом $h_x(f) = f(x)$ для будь-якого функціонала f з одиничної кулі $B_1(E_1^*)$ спряженого до E_1 простору. Виходячи із сепарабельності простору E_1, можна стверджувати, що $B_1(E_1^*)$ має зліченну щільну в *-слабкій топології підмножину, яку позначатимемо $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ізометрія j_2 зіставляє кожному функціоналу $h_x \in E_3$ вектор $(h_x(f_n))_{n\in\mathbb{N}} \in E_4$, де E_4 — підпростір простору ℓ_∞. Ізометрії $\{i_k, k = 1, 2\}$ визначаються так само. У цьому випадку пара ізометрій (J_1, J_2), що визначені через композиції $J_1 = j_2 \circ j_1, J_2 = i_2 \circ i_1$, буде ізоморфізмом у категорії $Mor(Ban)$ між L та $\mathcal{L}$. Припустимо, що в такій ситуації підпростори $N(\mathcal{L}), N(\mathcal{L}^*)$ мають базиси Шаудера, що є одночасно й мінімальними системами. Зафіксуємо такі системи векторів $\{e_i = (e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, ..., e_i^{(n)}, ...) \in \ell_\infty, i \in \mathbb{N}\}$ і функціоналів $\{\varphi_i(\cdot) \in \ell_\infty^*, i \in \mathbb{N}\}$, а відповідні до них біортогональні системи будемо позначати $\{f_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \ell_\infty^*$ та $\{\psi_i = (\psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}, ..., \psi_i^{(n)}, ...)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \ell_\infty$. Тоді рівності (1.16) і (1.17), що задають проектори на відповідні підпростори, можна переписати у вигляді

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}(x_1, x_2, ...) = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i((x_1, x_2, ...))(e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, ...). \tag{1.22}$$

Аналогічно

$$\mathcal{P}_{Y_2}(y_1, y_2, ...) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i((y_1, y_2, ...))(\psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}, ...). \tag{1.23}$$

Уведемо до розгляду нескінченні матриці

$$\mathcal{E} = (e_i)_{i\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} e_1^{(1)} & e_1^{(2)} & ... & e_1^{(n)} & ... \\ e_2^{(1)} & e_2^{(2)} & ... & e_2^{(n)} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ e_k^{(1)} & e_k^{(2)} & ... & e_k^{(n)} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix},$$

$$\Psi = (\psi_i)_{i\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} \psi_1^{(1)} & \psi_1^{(2)} & ... & \psi_1^{(n)} & ... \\ \psi_2^{(1)} & \psi_2^{(2)} & ... & \psi_2^{(n)} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \psi_k^{(1)} & \psi_k^{(2)} & ... & \psi_k^{(n)} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

і нескінченні вектори

$$\mathcal{F}(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot), ..., f_n(\cdot), ...), \ \ \Phi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), ..., \varphi_n(\cdot), ...).$$

Згідно з позначеннями дію проекторів $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ та $\mathcal{P}_{Y_2}$ на вектори з підпростору обмежених послідовностей можна подати у вигляді

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}x = \mathcal{F}(x)\mathcal{E}, \ \mathcal{P}_{Y_2}y = \Phi(y)\Psi.$$

З того, що набори $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ та $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ утворюють базиси Шаудера у відповідних підпросторах, випливають зображення

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}^{(n)}x, \tag{1.24}$$

$$\mathcal{P}_{Y_2}y = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}^{(n)}_{Y_2} y, \tag{1.25}$$

де
$$\mathcal{P}^{(n)}_{N(\mathcal{L})}x = \mathcal{F}^{(n)}(x)\mathcal{E}^{(n)}, \mathcal{P}^{(n)}_{Y_2}y = \Phi^{(n)}(y)\Psi^{(n)},$$

а матриці й вектори, що фігурують у зображеннях (1.24), (1.25) є $n \times n$- та $1 \times n$-вимірними зрізками визначених вище нескінченновимірних матриць і векторів. Відповідні границі існують внаслідок означення базису Шаудера (див. [12]).

Якщо простори $E_2 = \mathcal{H}_1$ та $F_2 = \mathcal{H}_2$ — простори Гільберта, то, унаслідок ізоморфізму відповідних об'єктів L та $\mathcal{L}$ категорії $Mor(Ban)$, простори E_1 та F_1 також будуть гільбертовими. У цьому випадку можна знаходити не тільки проектори $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}, \mathcal{P}_{Y_2}$, але й ортопроектори, тобто проектори з додатковими властивостями $\mathcal{P}^*_{N(\mathcal{L})} = \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ та $\mathcal{P}^*_{Y_2} = \mathcal{P}_{Y_2}$. У випадку сепарабельних просторів Гільберта кожна тотальна ортонормована система векторів є базисом Шаудера. Нехай $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ та $\{\varphi_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ — мінімальні системи ортогональних векторів, які утворюють базиси нуль-просторів $N(\mathcal{L}) \subset \mathcal{H}_1$ та $N(\mathcal{L}^*) \subset \mathcal{H}_2$, відповідно. Відомо [3], що умова мінімальності системи векторів $\{f_i, i \in \mathbb{N}\}$ у просторі Гільберта еквівалентна такій: для довільного j числа

$$\delta_j^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(f_j, f_{j+1}, ..., f_n)}{\Gamma(f_{j+1}, f_{j+2}, ..., f_n)} > 0, \quad j = \overline{1, \infty},$$

де $\Gamma(g_1, g_2, ..., g_n)$ — визначник Грама системи векторів $\{g_i\}_{i=1}^n$.

У цьому випадку ортопроектор $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ на нуль-простір $N(\mathcal{L})$ можна знайти таким чином:

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}^{(n)}_{N(\mathcal{L})} x,$$

а ортопроектор
$$\mathcal{P}_{Y_2}y = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}^{(n)}_{Y_2} y,$$

де
$$\mathcal{P}^{(n)}_{N(\mathcal{L})}x = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{(-1)}_{ij}(f_j, x)f_i,$$

$$\mathcal{P}^{(n)}_{Y_2}y = \sum_{s,k=1}^{n} \beta^{(-1)}_{sk}(\varphi_k, y)\varphi_s,$$

$\alpha^{(-1)}_{ij}$ та $\beta^{(-1)}_{sk}$ — елементи матриць, обернених до матриць Грама
$$\Gamma(f_1, f_2, ..., f_n).$$

Існування границі й той факт, що так визначені оператори будуть ортопроекторами, випливає з теореми 7 [12, с. 230] унаслідок монотонності набору ортопроекторів $\mathcal{P}^{(n)}_{N(\mathcal{L})}$ та $\mathcal{P}^{(n)}_{Y_2}$. Якщо ортонормовані системи базисних векторів $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ та $(\varphi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ зафіксовано, то ортопроектори на нуль-простір оператора $\mathcal{L}$ і підпростір Y_2 будуються таким чином:

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i,$$

$$\mathcal{P}_{Y_2}y = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} (y, \varphi_s)\varphi_s.$$

Використовуючи ізоморфність об'єктів L і $\mathcal{L}$, автоматично отримуємо основний результат стосовно розв'язності операторного рівняння $Lx = y$.

Теорема 16. *Рівняння (1.13) є розв'язним для тих і лише тих $y \in F_1$, які задовольняють умову*

$$\sum_{\beta\in\mathcal{V}} \varphi_\beta(J_2 y)\psi_\beta = 0, \tag{1.26}$$

при виконанні якої розв'язки рівняння (1.13) набуватимуть

вигляду
$$x = \sum_{\alpha \in \mathcal{U}} f_\alpha(J_2 z) J_1^{-1} z + L^- y \tag{1.27}$$
для довільного елемента $z \in E_1$; $L^- = J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2$ – узагальнено-обернений до оператора L.

Доведення. Умова (1.26) безпосередньо випливає з умови (1.18) (нагадаємо, що $p_y = J_2 y$). Для того, щоб переконатися в істинності зображення (1.27), достатньо показати, що якщо оператор $\mathcal{L}^-$ є узагальнено-оберненим до оператора $\mathcal{L}$, то й оператор $L^- = J_1^{-1}\mathcal{L}J_2$ буде узагальнено-оберненим до оператора L. Те, що оператор L^- обмежений, очевидно. З рівностей
$$L^- L L^- = J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2 L J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2 = J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2 J_2^{-1}\mathcal{L} J_1 J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2 =$$
$$= J_1^{-1}\mathcal{L}^-\mathcal{L}\mathcal{L}^- J_2 = J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2 = L^-$$
та
$$L L^- L = J_2^{-1}\mathcal{L} J_1 J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2 J_2^{-1}\mathcal{L} J_1 =$$
$$= J_2^{-1}\mathcal{L}\mathcal{L}^-\mathcal{L} J_1 = J_2^{-1}\mathcal{L} J_1 = L$$
й означення оператора, узагальнено-оберненого до вихідного, випливає, що оператор L^- дійсно є таким оператором. □

Зазначимо, що паралельно ми встановили такий факт.

Наслідок 2. *Об'єкти L^- та $\mathcal{L}^-$ є ізоморфними в категорії $Mor(Ban)$. Пара ізометрій (J_2, J_1) перетворює діаграму*
$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{L^-} & E_1 \\ J_2 \downarrow & & \downarrow J_1 \\ F_2 & \xrightarrow{\mathcal{L}^-} & E_2 \end{array}$$
на комутативну.

При цьому простори E_1 і F_1, а також простори E_2 та F_2 розкладаються у прямі суми підпросторів
$$F_1 = N(L^-) \oplus \overline{X}_1,\ E_1 = \overline{Y}_1 \oplus R(L^-),$$

$$F_2 = N(\mathcal{L}^-) \oplus \overline{X}_2,\ E_2 = \overline{Y}_2 \oplus R(\mathcal{L}^-).$$

Сформулюємо наслідок з попередньої теореми для випадку сепарабельних просторів.

Наслідок 3. *Рівняння (1.13) є розв'язним для тих і лише тих $y \in F_1$, що задовольняють рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{Y_2}^{(n)} J_2 y = \overrightarrow{0}. \tag{1.28}$$

За виконання умови (1.28) розв'язки рівняння (1.13) набудуть вигляду

$$x = \lim_{n\to\infty} J_1^{-1} \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}^{(n)} J_2 z + L^- y$$

для довільного елемента $z \in E_1$; $L^- = J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2$ — узагальнено-обернений до оператора L.

Зауваження 8. Зображення, аналогічні (1.24) та (1.25), можна отримати й у випадку несепарабельних підпросторів. Для цього треба замінити збіжність послідовностей на збіжність відповідних напрямленостей:

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} h_x = \lim_{\alpha\in\mathcal{U}} \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}^{(\alpha)} h_x,\ \mathcal{P}_{Y_2} p_y = \lim_{\beta\in\mathcal{V}} \mathcal{P}_{Y_2}^{(\beta)} p_y.$$

1.5. Розвинення методу рядів Неймана узагальненого обертання на спектрі у просторах Банаха та Фреше

Побудовану вище теорію можна уточнити на класі операторних рівнянь з оператором L, що має вигляд $I - A$ з не обов'язково стискаючим оператором A.

Розглядається рівняння

$$(I - A)x = y, \tag{1.29}$$

де $A : B \to B$ — лінійний обмежений оператор, B — простір Банаха з нормою $||\cdot||$ (або Фреше зі зліченним набором напівнорм $||\cdot||_n, n \in \mathbb{N}$). Для оператора A будемо припускати, що існує стала $c > 0 : ||A^n|| \le c, n \in \mathbb{N}$ (для будь-якої напівнорми $||\cdot||_m$ існує напівнорма $||\cdot||_k$ така, що $||A^n x||_m \le c||x||_k$), $\overline{0} \in B$. Задача полягає у відшуканні розв'язків рівняння (1.29) у вигляді рядів. Для простоти викладення будемо розглядати випадок, коли B — рефлексивний банахів простір. Про можливе узагальнення на випадок більш загальних топологічних векторних просторів та послаблення умови рівномірної обмеженості степеней оператора A буде викладено після встановлення основних результатів.

Перейдемо до вивчення рівняння (1.29) у рефлексивному просторі Банаха. Найцікавішим випадком для рівняння (1.29) є критичний випадок, коли $\mu = 1$ — точка спектра оператора A (оператор $\mu I - A$ не має оберненого). Виявляється, що в цьому випадку вихідне рівняння буде розв'язним не за довільних правих частин, а його розв'язок може бути не єдиним (можлива нескінченна кількість розв'язків такого рівняння).

З умови рівномірної обмеженості степенів оператора A випливає [11, с. 297], що виконується такий розклад простору B у пряму суму:

$$B = N(I - A) \oplus \overline{R(I - A)}. \tag{1.30}$$

У праці [38] уведено поняття відносного спектра оператора ρ_{NS}. Ця множина визначається рівнянням

$$\rho_{NS} = \{\lambda :\ \lambda \in \mathbb{C},\ R(I - \lambda A) = \overline{R(I - \lambda A)}\}.$$

Доведемо низку тверджень стосовно узагальненого обертання оператора $I - A$, які було отримано в роботі [38]. Переформулюємо деякі з результатів у вигляді теореми, яку потім буде зручно використовувати для дослідження розв'язності рівняння (1.29). Для цього введемо позначення для усередненого оператора й нагадаємо його властивості:

$$A_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} A^k}{n}, \quad A_0 A = A A_0 =$$

$$= A_0^2 = A_0, \quad N(A_0) = \overline{R(I-A)}.$$

Теорема 17. *Нехай $R(I-A) = \overline{R(I-A)}$ і степені оператора A є рівномірно обмеженими. Тоді:*

a) $\mu = 1 \in \rho_{NS}(A)$ *(відносно регулярна точка);*

b) оператор $I - A + A_0$ є оборотним, а оператор $I - A$ — узагальнено-оборотним та

$$(I-A)^- = (I - A + A_0)^{-1} - A_0;$$

c) рівняння (1.29) розв'язне для тих і тільки тих y, які задовольняють умову

$$A_0 y = \overline{0}; \tag{1.31}$$

d) якщо умова (1.31) виконана, то множина розв'язків рівняння (1.29) буде мати вигляд

$$x = A_0 c + G[y] \quad \forall c \in B, \tag{1.32}$$

де

$$G[y] = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu-1)^k \{\sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1}(A - A_0)^l\}^{k+1} y - A_0 y \tag{1.33}$$

— узагальнений оператор Гріна рівняння (1.29) для будь-якого $0 < \mu - 1 < \frac{1}{||R_\mu(A)||}$.

Дослідимо тепер операторне рівняння (1.29) у загальному випадку (без умови замкненості) за схемою, розробленою в попередньому підрозділі. Покажемо, що його завжди можна зробити розв'язним у певному сенсі.

1) Класичні розв'язки.

Припустимо, що множина значень оператора $I - A$ замкнена, тобто виконується умова $R(I - A) = \overline{R(I - A)}$. Тоді справджується сформульована вище теорема й умова $y \in R(I - A)$ рівносильна (1.31) $A_0 y = \overline{0}$. За виконання цієї умови множина розв'язків рівняння (1.29) буде мати вигляд (1.32).

2) Сильні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли $R(I - A) \neq \overline{R(I - A)}$, і використаємо сформульовану теорему. Нехай $y \in \overline{R(I - A)}$. Тоді знову $A_0 y = \overline{0}$. Оскільки ядро $N(I - A)$ оператора $I - A$ є доповнювальним підпростором у просторі B (це випливає з розкладу в пряму суму (1.30)), то можна розглянути факторпростір за ядром оператора $I - A$. Профакторизуємо простір B за ядром $N(I - A)$ і позначимо відповідний факторпростір через $E = B/N(I - A)$. Нехай $\mathcal{P}_{\overline{R(I-A)}}$ та $\mathcal{P}_{N(I-A)}$ — проектори на підпростори $\overline{R(I - A)} \subset B$ та $N(I - A)$, відповідно. Тоді профакторизований оператор

$$\mathcal{I} - \mathcal{A} = \mathcal{P}_{\overline{R(I-A)}}(I - A)j^{-1} : E \to R(I - A) \subset \overline{R(I - A)}$$

буде лінійним, неперервним та ін'єктивним. Тут $j : B \to E$ — канонічна проекція [34]. Трійка (B, E, j) є локально тривіальним розшаруванням з типовим шаром $B_1 = \mathcal{P}_{N(I-A)} B$. Це дає можливість увести поняття сильного узагальненого розв'язку [16] для рівняння

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A})\overline{x} = y, \overline{x} \in E, \tag{1.34}$$

таким саме чином, як це робилося раніше. Використаємо процес поповнення за нормою $||\overline{x}||_{\overline{E}} = ||(\mathcal{I} - \mathcal{A})\overline{x}||_F$, де простір $F = \overline{R(I - A)}$ [16]. Тоді розширений оператор $\overline{(\mathcal{I} - \mathcal{A})} : \overline{E} \to \overline{R(I - A)}$ буде здійснювати гомеоморфізм між просторами $\overline{E}$ та $\overline{R(I - A)}$. Унаслідок конструкції сильного узагальненого розв'язку [16] рівняння

$$\overline{(\mathcal{I}-\mathcal{A})}\overline{x} = y$$

буде мати єдиний узагальнений розв'язок $\overline{(\mathcal{I}-\mathcal{A})}^{-1}y$, який позначатимемо через $\widetilde{c} \in \overline{E}$, і простір E буде щільно вкладеним в $\overline{E}$. Унаслідок щільності вкладення існує послідовність $\widetilde{c}_n \in E$ класів еквівалентності, яка буде збігатися до $\widetilde{c}$ за нормою $\overline{E}$. Обираючи по представнику з кожного класу $c_n \in \widetilde{c}_n$, отримаємо, що вона збігається до узагальненого розв'язку $\widetilde{c}$. Така послідовність називається сильним майже розв'язком [16]. Усі сильні майже розв'язки операторного рівняння (1.29) можна записати у вигляді $\{c_n + \mathcal{P}_{N(I-A)}c\}_{n\in\mathbb{N}}$ для будь-якого $c \in B$ або, що те саме, $\{c_n + A_0 c\}_{n\in\mathbb{N}}$. Зауважимо, що означення сильних узагальнених розв'язків та майже розв'язків еквівалентні. Поняття майже розв'язків зручно використовувати, щоб побачити, яким чином можна знаходити розширення оператора Гріна в термінах послідовностей. Якщо $y \in \overline{R(I-A)}$, то існує послідовність $y_n \in R(I-A)$, що до неї збігається. Тоді $G[y_n]$ буде збігатися до $G[y]$ і за c_n можна обрати $G[y_n]$. Отже, і узагальнений оператор Гріна $G[y]$ можна розширити до $\overline{G}[y]$. Зазначимо, що якщо $y \in R(I-A)$, то сильні узагальнені розв'язки будуть класичними.

3) Сильні псевдорозв'язки.

Розглянемо елемент $y \notin \overline{R(I-A)}$. Тоді $A_0 y \neq \overline{0}$. У цьому випадку рівняння (1.29) не має ані класичних, ані сильних узагальнених розв'язків, але існують елементи з $\overline{B} = N(I-A) \oplus \overline{X}$, що мінімізують норму відповідної нев'язки $||\overline{(I-A)}c - y||_B$ (простір $\overline{X}$ ізометрично ізоморфний простору $\overline{E}$, а оператор $\overline{I-A}$ є відповідним розширенням оператора $I-A$), а саме [11]:

$$c = (\overline{\mathcal{I}-\mathcal{A}})^{-1}y + A_0\overline{c}, \forall \overline{c} \in B.$$

Ці елементи й будемо називати сильними псевдорозв'язками за аналогією з тим, як це робилося в попередньому підрозділі.

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема 18. *Нехай у рівнянні (1.29) лінійний обмежений оператор A, що діє в рефлексивному просторі Банаха або Фреше такий, що його степені рівномірно обмежені. Тоді:*

а) рівняння (1.29) має класичні або сильні узагальнені розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$A_0 y = \overline{0}; \tag{1.35}$$

якщо $y \in R(I - A)$, то розв'язки рівняння (1.29) будуть класичними;

б) якщо умова (1.35) виконується, то множина розв'язків рівняння (1.29) може бути подана у вигляді операторного ряду

$$x = A_0 \overline{c} + \overline{G}[y], \forall \overline{c} \in B,$$

де $\overline{G}[y]$ — відповідне розширення (1.33);

в) якщо умова (1.35) не виконується, то рівняння (1.29) має множину псевдорозв'язків, яку можна подати у вигляді

$$x = A_0 \overline{c} + \overline{G}[y], \forall \overline{c} \in B,$$

де $\overline{G}[y] = (\overline{\mathcal{I} - \mathcal{A}})^{-1} y$.

Зауваження 9. Якщо $||A|| < 1$, то оператор $A_0 = \overline{0}$, а у формулі (1.33) можна зробити граничний перехід, коли $\mu \to 1$, і отримати ряд Неймана. У цьому випадку буде існувати єдиний класичний розв'язок. Отже, отримані результати узгоджуються з існуючими.

Наведемо кілька зауваженнь щодо посилення результатів.

Перш за все згадаємо відому теорему з монографії Едвардса [34, с. 964], з якої буде видно, яким чином можна узагальнити отримані результати.

Теорема 19. *Нехай E — віддільний локально опуклий простір, u — його неперервний ендоморфізм і*

$$A_n = \frac{1 + u + u^2 + ... + u^n}{n}.$$

Припустимо, що:

(a) *множина $\{A_n(x) : n = 1, 2, ...\}$ відносно слабко компактна у просторі E для кожного $x \in E$;*

(a') *множина $\{A_n\}$ рівностепенево неперервна;*

(b) $\lim_n \frac{u^n(x)}{n} = 0$ *у слабкій топології для кожного $x \in E$.*

Тоді:

(1) *E — топологічна пряма сума підпросторів $N(1-u)$ та $\overline{R(1-u)}$;*

(2) *якщо π — проектування E на $N(1-u)$ паралельно $\overline{R(1-u)}$, то $\lim_n A_n(x) = \pi(x)$ у слабкій топології для кожного $x \in E$.*

Нарешті, якщо умова (b) виконана при заміні слабкої топології вихідною, то те саме залишається справедливим і для твердження (2).

За цих умов, після факторизації за схемою, побудованою в цьому підрозділі, і поповнення за топологією, індукованою системою напівнорм [16], можна довести, що оператор $1-u$ має замкнену множину значень, тобто є нормально розв'язним. Тоді з (1) теореми 19 випливатиме, що оператор $1-u$ узагальнено-оборотний із узагальнено-оберненим оператором $(1-u)^-$. У цьому випадку множина узагальнених розв'язків рівняння $(1-u)x = y$ буде мати вигляд $x = \pi(c) + (1-u)^- y$ для довільного елемента $c \in E$. У випадку загальних локально опуклих просторів зображення у вигляді збіжного операторного ряду може не бути. Для отримання такого зображення в роботі [38] і при доведенні твердження використовувалася теорема Банаха про обернений оператор для $(1 - u + \pi)$, яка виконується не завжди. В ультрабочкових, бочкових та просторах Фреше ця теорема виконується [34] і розклад, аналогічний (1.32), буде справедливим. Якщо простір B буде бочковим, то з умови (a) теореми випливає умова (a') [34, с. 965] й останню можна прибрати. Нагадаємо, що бочкою в топологічному векторному просторі E називають його довільну замкнену, опуклу, урівноважену та поглинаючу множину. Топологічний векторний простір E називається бочковим, якщо він локально опуклий і кожна бочка в E є околом нуля. Якщо простір E є нормованим або простором Фреше, u — слабко компактний ендоморфізм, степені якого рівностепенево неперервні, то зі слабкої компактності випливає умова (a), а умова (b) виконується у вихідній топології. Зауважимо, що такі простори виникають при дослідженні багатьох рівнянь математичної фізики. Якщо E — простір Банаха (або Фреше) й умова (b) замінена умовою $n^{-1}||u^n|| \to 0$ або більш слабкою умовою $||u^n|| \leq c$ (у просторі Фреше відповідна збіжність буде індукована зліченною системою напівнорм, що породжують топологію простору), то умова (a') автоматично виконується. Нарешті, у рефлексивних просторах умову (a) можна прибрати. Зазначимо також, що в роботі [47] метод рядів Неймана розповсюджується на випадок правильних операторів. Якщо оператор у правій частині (1.29) замінити на довільний обмежений оператор B, що діє з гільбертового простору H_1 у H_2, то можна повністю дослідити розв'язність рівняння (1.29). Для цього треба скористатися сильним псевдооберненим оператором (що розглядався на початку підрозділу).

1.6. Формули для знаходження матриць, псевдообернених за Муром – Пенроузом

У цьому підрозділі результати, що наведені вище, будуть проілюстровані на прикладі певних класів матриць.

Нагадаємо, [10, 36] що задача найменших квадратів полягає у знаходженні такого вектора, який мінімізує вираз

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} ||Dx - y||, \tag{1.36}$$

де D — $n \times n$-вимірна матриця, а вектор $y \in \mathbb{R}^n$ фіксований. Зазначимо, що розв'язок задачі (1.36) може бути не єдиним [10, 39]. Відомо також [36, 39], що з множини всіх векторів, для яких цей мінімум досягається, вектор $z = D^+y$ (D^+ — матриця, псвeдообернена за Муром – Пенроузом до матриці D) має найменшу норму.

На зразок операторів послідовність матриць $\{U^n, n \in \mathbb{N}\}$ називається рівномірно обмеженою, якщо існує стала $c > 0$ така, що $||U^n|| \le c$, $n \in \mathbb{N}$. Тут під $|| \cdot ||$ мається на увазі довільна фіксована норма в просторі $\mathbb{R}^n$. Надалі розглядатимуться лише такі матриці D, що мають вигляд

$$D = I - U, \tag{1.37}$$

за припущення, що степені U утворюють рівномірно обмежену послідовність. Для таких матриць будуть справедливими результати попереднього підрозділу щодо псевдообернення. Сформулюємо їх як наслідки для матриць. Визначимо матрицю

$$U_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U^k}{n}.$$

Матриця U_0 визначена коректно (цей факт є твердженням ергодичної теореми [9, 11]). Сформулюємо твердження доведені в попередньому підрозділі для матриць вигляду (1.37).

Наслідок 4. *Матриця* $I-U+U_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *має обернену, яка може бути зображена у вигляді ряду*

$$(I-U+U_0)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U-U_0)^l\}^{k+1} \quad (1.38)$$

для всіх $0 < \mu - 1 < \frac{1}{||R_\mu||}$, *де* R_μ *— резольвента матриці* $U - U_0$. *Матрицю* $I - U + U_0$ *будемо називати усередненою матрицею до матриці* $I - U$.

Наслідок 5. *Матриця* $D = I - U$ *має псевдообернену за Муром – Пенроузом, для якої справедливе зображення*

$$(I-U)^+ = (I-U+U_0)^{-1} - U_0 \quad (1.39)$$

або у вигляді збіжного за нормою матричного ряду

$$(I-U)^+ = \sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U-U_0)^l\}^{k+1} - U_0 \quad (1.40)$$

для всіх $0 < \mu - 1 < \frac{1}{||R_\mu||}$.

Наслідок 6. *Матриця* $I - U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *має псевдообернену за Муром – Пенроузом, яка може бути зображена у вигляді*

$$(I-U)^+ = \sum_{k=0}^{\infty}(U-U_0)^k - U_0, \quad (1.41)$$

якщо ряд у правій частині є збіжним.

Цю формулу можна отримати шляхом граничного переходу, коли $\mu \to 1$ в (1.40). При цьому переході у виразі (1.40) у першій сумі залишиться доданок тільки при $k = 0$, отже, отримаємо (1.41).

Матриця U_0 насправді є матричним ортопроектором на ядро матриці $I - U$. Тому її можна знаходити шляхом розв'язання системи рівнянь $(I - U)x = 0$.

Як уже зазначалося, псевдообернені матриці використовуються при розв'язанні багатьох крайових задач. Крім того, можна навести приклади класу матриць, які використовуються в теорії стохастичних диференціальних рівнянь і задовольняють вимоги рівномірної обмеженості степеней. Наведемо відповідні означення.

Означення 23. Матриця $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{n}$ називається ***стохастичною***, якщо всі її елементи невід'ємні й сума елементів довільного рядка дорівнює одиниці.

Покажемо, що якщо матриця D має вигляд $D = I - P$, де P — стохастична матриця, то вона має псевдообернену за Муром – Пенроузом, яка може бути знайдена за однією з формул (1.39 – 1.41), запропонованих вище. Будемо розглядати матричну ℓ_∞-норму $||A||_{\ell_\infty} = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Для стохастичної матриці P її ℓ_∞-норма дорівнює одиниці $||P||_{\ell_\infty} = 1$. З рівняння Колмогорова – Чепмена [36] випливає, що $P^{n+m} = P^n P^m$. З цих рівностей дістаємо, що $||P^n||_{\ell_\infty} \le ||P||_{\ell_\infty}^n = 1$. Таким чином, степені стохастичної матриці утворюють рівномірно обмежену сім'ю.

Зазначимо також, що отримані формули можна застосовувати для знаходження стаціонарних розподілів у ланцюгах Маркова [36].

Проілюструємо розроблену теорію псевдообернення матриць на прикладі системи масового обслуговування з чотирма ймовірнісними станами як функціями часу $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, що задовольняють систему диференціальних рівнянь Колмогорова – Чепмена вигляду

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t), \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{12})P_1(t) + \lambda_{21}P_2(t) + \lambda_{31}P_3(t), \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{12}P_1(t) - (\lambda_{21} + \lambda_{23})P_2(t), \\ \frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_{23}P_2(t) - \lambda_{31}P_3(t) \end{cases}$$

з умовою нормування $P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1$ та

$P_i(t) \geq 0, i = \overline{0,3}$. Позначимо $\vec{P}(t) = (P_0(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t))$ і перепишемо систему в матричному вигляді, увівши до розгляду матрицю

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{01} & \lambda_{10} & 0 & 0 \\ \lambda_{01} & -\lambda_{10} - \lambda_{12} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ 0 & \lambda_{12} & -\lambda_{21} - \lambda_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{23} & -\lambda_{31} \end{pmatrix}.$$

Тоді можна переписати систему рівнянь Колмогорова у вигляді крайової задачі

$$\begin{cases} \frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \Lambda \vec{P}(t), \\ l\vec{P}(\cdot) = \sum_{i=0}^{3} P_i(0) = 1. \end{cases} \tag{1.42}$$

Для розв'язання системи (1.42) можна застосувати перетворення Лапласа. Нагадаємо, що для функції $f(t)$ її перетворення Лапласа має вигляд

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

При цьому похідній $f^{'}(t)$ буде відповідати функція $pF(p) - f(0)$. Обернене інтегральне перетворення Лапласа функції $F(p)$ здійснюється таким чином:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} F(p) dp.$$

Нехай вектор-функція $\vec{\pi}(p)$ має вигляд $\vec{\pi}(p) = (\pi_0(p), \pi_1(p), \pi_2(p), \pi_3(p))$, де $\pi_i(p)$, $i = \overline{0,3}$, — відповідні образи функцій станів $P_i(t)$ при перетворенні Лапласа. Тоді диференціальна система (1.42) перетвориться на лінійну алгебраїчну систему

$$\vec{\pi} = Q\vec{\pi} + \vec{g}, \tag{1.43}$$

де матриця Q та вектор $\vec{g}$ відповідно мають вигляд $Q = \frac{1}{p}\Lambda$,

$\vec{g} = \frac{1}{p}(P_0(0), P_1(0), P_2(0), P_3(0))$, або, у розгорнутому вигляді,

$$\begin{cases} \pi_0(p) = -\frac{\lambda_{01}}{p}\pi_0(p) + \frac{\lambda_{10}}{p}\pi_1(p) + \frac{P_0(0)}{p}, \\ \pi_1(p) = \frac{\lambda_{01}}{p}\pi_0(p) - \frac{(\lambda_{10}+\lambda_{12})}{p}\pi_1(p) + \frac{\lambda_{21}}{p}\pi_2(p) + \frac{\lambda_{31}}{p} + \frac{P_1(0)}{p}, \\ \pi_2(p) = \frac{\lambda_{12}}{p}\pi_1(p) - \frac{(\lambda_{21}+\lambda_{23})}{p}\pi_2(p) + \frac{P_2(0)}{p}, \\ \pi_3(p) = \frac{\lambda_{23}}{p}\pi_2(p) - \frac{\lambda_{31}}{p}\pi_2(p) + \frac{P_3(0)}{p}, \end{cases}$$

з умовою $\sum_{i=0}^{3}\pi_i(p) = \frac{1}{p}$. Перетворимо систему (1.43) до вигляду

$$(I - Q)\vec{\pi} = \vec{g}. \tag{1.44}$$

Можливі два випадки:

1) $det(I-Q) \neq 0$. Тоді існує єдиний розв'язок системи (1.44) у вигляді $\vec{\pi} = (I - Q)^{-1}\vec{g}$. Нормованість перевіряється безпосередньою підстановкою отриманого розв'язку.

2) $det(I - Q) = 0$. У цьому випадку розв'язок матричної системи (1.44) існує для тих і тільки тих правих частин, що задовольняють умову $P_{N(I-Q)^T}\vec{g} = \vec{0}$. За виконання цієї умови множина розв'язків даної системи матиме вигляд

$$\vec{\pi} = (I - Q)^{+}\vec{g} + P_{N(I-Q)}\vec{c}$$

для довільного вектора $\vec{c} \in \mathbb{R}^4$, де матриця $(I - Q)^{+}$ псевдообернена за Муром – Пенроузом до матриці $(I - Q)$. Виконуючи обернене перетворення Лапласа та перевіряючи умову нормованості, знаходимо шуканий розподіл станів.

Нехай, наприклад, задано такі коефіцієнти інтенсивностей: $\lambda_{01} = 0.019$, $\lambda_{10} = 0.65$, $\lambda_{12} = 0.4$, $\lambda_{21} = 0.392$, $\lambda_{23} = 0.008$, $\lambda_{31} = 0.008$. Розв'язуючи рівняння Колмогорова – Чепмена й урахувавши умову нормування, отримуємо трипараметричну сім'ю ймовірностей станів системи у вигляді

$$P_0(t) = 0.52 + (0.002 + a_{11})0.264^t + \\ + (0.005 + a_{12})0.729^t + (-0.527 + a_{13})0.991^t,$$

$$P_1(t) = 0.16 + (-0.004 + a_{21})0.264^t +$$
$$+ (-0.001 + a_{22})0.729^t + (-0.155 + a_{23})0.991^t,$$
$$P_2(t) = 0.16 + (0.002 + a_{31})0.264^t +$$
$$+ (-0.004 + a_{32})0.729^t + (-0.158 + a_{33})0.991^t$$
$$P_3(t) = 0.16 + a_{41}0.264^t + a_{42}0.729^t + (0.84 + a_{43})0.991^t,$$

де

$$\begin{cases} a_{11} = 0.077c_1 - 0.449c_2 + 0.186c_3; \\ a_{12} = 0.29c_1 - 0.177c_2 - 0.8c_3; \\ a_{13} = 0.631c_1 + 0.626c_2 + 0.616c_3; \\ a_{21} = -0.134c_1 + 0.784c_2 - 0.324c_3; \\ a_{22} = -0.052c_1 + 0.032c_2 + 0.143c_3; \\ a_{23} = 0.186c_1 + 0.184c_2 + 0.181c_3; \\ a_{31} = 0.057c_1 - 0.336c_2 + 0.138c_3; \\ a_{32} = -0.246c_1 + 0.149c_2 + 0.677c_3; \\ a_{33} = 0.189c_1 + 0.187c_2 + 0.185c_3; \\ a_{41} = 0.001c_2; \\ a_{42} = 0.006c_1 - 0.004c_2 - 0.02c_3; \\ a_{43} = -1.006c_1 - 0.977c_2 - 0.982c_3 \end{cases}$$

для довільних сталих c_1, c_2, c_3 таких, що $P_i(t) \geq 0$. Результати дано із заокругленнями до тисячних. Наприклад, якщо покласти $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$ та момент часу $t = 3$, то отримаємо такі ймовірності станів: $P_0(3) = 0.001$, $P_1(3) = 0.001$, $P_2(3) = 0.001$, $P_3(3) = 0.97$. Також бачимо, що при прямуванні до нескінченності часу t імовірності, що визначають функції станів, прямують до чисел 0.52, 0.16, 0.16, 0.16, відповідно. Цей приклад ілюструє, яким чином можна звести систему диференціальних рівнянь до алгебраїчної й потім використати псевдообернені матриці.

Розділ 2

Теорія нелінійних операторних рівнянь

2.1. Теореми про нерухомі точки

Задачі про нерухомі точки відображень є зручною загальною формою запису й дослідження різних проблем прикладного нелінійного аналізу. Зокрема, у вигляді задачі пошуку нерухомої точки можуть бути сформульовані задачі розв'язання рівнянь, знаходження екстремуму функціоналів, точок рівноваги Неша в грі тощо. У цьому підрозділі розглянуто кілька фундаментальних теорем про нерухомі точки.

2.1.1. Аналітичне доведення теореми Брауера

Будемо використовувати позначення:

- $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leq 1\}$ — одинична куля;
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| = 1\}$ — одинична сфера.

Нехай $f : X \to X$ — деяке відображення. Точку $x \in X$ називають нерухомою точкою відображення f, якщо $f(x) = x$. Множину нерухомих точок (fixed points) відображення f позначимо $F(f)$.

Теорема 20 (Брауера)**.** *Довільне неперервне відображення $f : B^n \to B^n$ має нерухому точку.*

Наслідок 7. *Нехай $K \subseteq \mathbb{R}^n$ — компактна опукла множина та $f : K \to K$ — неперервне відображення. Тоді f має нерухому точку.*

Доведення. Достатньо застосувати теорему 20 до відображення $f \circ P_K : B \to K$, де P_K — метрична проекція на K, B — замкнена куля, що містить K. $\square$

Наслідок 8 (лема про гострий кут)**.** *Нехай неперервна функція $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ має властивість*

$$(f(x), x) \geq 0 \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

Тоді існує точка $x_0 \in B^n$ така, що $f(x_0) = 0$.

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що $f(x) \neq 0$ для всіх $x \in B^n$. Тоді визначене неперерервне відображення $x \mapsto -\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ кулі B^n у себе. За теоремою Брауера існує точка $x_1 \in B^n$ така, що

$$-\frac{f(x_1)}{\|f(x_1)\|} = x_1.$$

Звідси маємо

$$(f(x_1), x_1) = -\|f(x_1)\| < 0,$$

що, разом із включенням $x_1 \in S^{n-1}$, веде до протиріччя. $\square$

Теорему Брауера виведемо з теореми про відсутність ретракції кулі B^n на сферу S^{n-1}.

Означення 24. Нехай $A \subseteq X$. Неперервне відображення $r : X \to A$ називають ***ретракцією*** X на A, якщо $r(x) = x$ для всіх $x \in A$.

Теорема 21. *Не існує ретракції кулі B^n на сферу S^{n-1}.*

Доведемо теорему 21 для випадку гладкого відображення. Перейти до неперервних відображень можна за допомогою апроксимації неперервних відображень гладкими. Дійсно, припустимо, що існує неперервна ретракція $r : B^n \to S^{n-1}$. Покажемо, що тоді існує гладка ретракція $r_0 : B^n \to S^{n-1}$. Якщо $\|x\| = 1$, то $r(x) = x$. Тому для довільного $\varepsilon_1 > 0$ існує таке $\delta > 0$, що $\|r(x) - x\| \leq \varepsilon_1$ при $1 - \delta \leq \|x\| \leq 1$. За теоремою Стоуна—Вейєрштрасса існують таке гладке відображення $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, що $\|f(x) - (r(x) - x)\| \leq \varepsilon_1$ при $\|x\| \leq 1$, і така гладка функція ψ, що $0 \leq \psi(t) \leq 1$ при $0 \leq t \leq 1$, $\psi(1) = 0$ і $1 - \varepsilon_2 \leq \psi(t)$ при $t^2 \leq 1 - \delta$. Покладемо $g(x) = x + \phi(x)f(x)$, де $\phi(x) = \psi(\|x\|^2)$. Якщо $\|x\| \leq 1 - \delta$, то

$$\begin{aligned}
&\|g(x)\| = \|x + \phi(x)f(x)\| = \\
&= \|r(x) + \phi(x)(f(x) - r(x) + x) + (\phi(x) - 1)(r(x) - x)\| \geq \\
&\geq \|r(x)\| - \phi(x)\|f(x) - r(x) + x\| - (1 - \phi(x))\|r(x) - x\| \geq \\
&\qquad \geq 1 - 1 \cdot \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \cdot 2 = 1 - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2.
\end{aligned}$$

Якщо $1 - \delta \leq \|x\| \leq 1$, то

$$\begin{aligned}
&\|g(x)\| = \|x + \phi(x)f(x)\| = \\
&= \|x + \phi(x)(f(x) - r(x) + x) + \phi(x)(r(x) - x)\| \geq \\
&\geq \|x\| - \phi(x)\|f(x) - r(x) + x\| - \phi(x)\|r(x) - x\| \geq \\
&\qquad \geq 1 - \delta - 1 \cdot \varepsilon_1 - 1 \cdot \varepsilon_1 = 1 - \delta - 2\varepsilon_1.
\end{aligned}$$

При $\varepsilon_1 \to 0$ маємо $\delta \to 0$. Тому можна вважати, що ε_1, ε_2, $\delta \leq \frac{1}{4}$. У цьому випадку $\|g(x)\| \geq \frac{1}{4} > 0$ для всіх $x \in B^n$. Якщо $\|x\| = 1$, то $\phi(x) = 0$ і $g(x) = x$. Потрібна гладка ретракція $r_0 : B^n \to S^{n-1}$ задається формулою $r_0(x) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}$.

Доведення теореми 21. Припустимо, що існує неперервно диференційовна ретракція $r : B^n \to S^{n-1}$. Для $x \in B^n$ і $0 \leq t \leq 1$

покладемо

$$
\begin{aligned}
&g(x) = r(x) - x, \\
&r_t(x) = x + tg(x) = (1-t)x + tr(x).
\end{aligned}
$$

З неперервної диференційовності відображення g випливає існування такої сталої $L > 0$, що

$$\|g(x) - g(y)\| \le L\|x - y\| \quad \forall x, y \in B^n.$$

Відображення $r_t : B^n \to B^n$ ін'єктивне при $0 \le t < \frac{1}{L}$. Дійсно, якщо $x \ne y$, то

$$
\begin{aligned}
\|r_t(x) - r_t(y)\| \ge \|x - y\| - t\|g(x) - g(y)\| \ge \\
\ge (1 - tL)\|x - y\| > 0.
\end{aligned}
$$

Частинні похідні відображення g рівномірно обмежені, тому матриця Якобі

$$r_t'(x) = I_n + t \cdot g'(x) \tag{2.1}$$

за малих t оборотна. Отже, за теоремою про обернене відображення r_t при $t \in [0, t_0]$ відображає $\mathrm{int}B^n$ на деяку відкриту множину $G_t \subseteq \mathrm{int}B^n$. Нехай $e \in B^n \backslash G_t$. З'єднаємо відрізком точку e з довільною точкою множини G_t і розглянемо точку b, у якій цей відрізок перетинає межу множини G_t. Множина B^n компактна, тому $b = r_t(x)$ для деякої точки $x \in B^n$. Оскільки $b \notin G_t = r_t(\mathrm{int}B^n)$, то $x \notin \mathrm{int}B^n$, тобто $x \in S^{n-1}$. Тому $b = x$ і $e = b = x \in S^{n-1}$. Таким чином, r_t сюр'єктивно відображає $\mathrm{int}B^n$ на $\mathrm{int}B^n$. Крім того, r_t бієктивно відображає S^{n-1} на S^{n-1} (на сфері S^{n-1} маємо $r_t(x) = x$) і, як було показано раніше, r_t ін'єктивно відображає B^n у B^n. Тому при $t \in [0, t_0]$ відображення r_t — бієкція B^n на B^n.

Розглянемо інтеграл

$$V(t) = \int_{B^n} \det\big(r_t'(x)\big)\, dx = \int_{B^n} \det\big(I_n + t \cdot g'(x)\big)\, dx.$$

При $0 \le t \le t_0$ цей інтеграл дорівнює об'єму кулі B^n. Формула (2.1) показує, що $V(t)$ — багаточлен від t. Тому $V(t)$ — додатна стала при $0 \le t \le 1$, зокрема $V(1) = \int_{B^n} \det(r'(x))\, dx > 0$.

З іншого боку, $r(x) \in S^{n-1}$ для всіх $x \in B^n$. Оскільки $(r(x), r(x)) = \|r(x)\|^2 = 1$ для всіх $x \in B^n$, то

$$0 = \frac{d}{dt} \left(r(x+th), r(x+th)\right)\big|_{t=0} = 2(r(x), r'(x)h) \ \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Отже, $R(r'(x)) \subseteq \{r(x)\}^{\perp}$ і тому $\det(r'(x)) = 0$. Проте в цьому випадку $V(1) = 0$. Отримали суперечність. □

Доведення теореми Брауера. Припустимо, що існує неперервне відображення $f : B^n \to B^n$ без нерухомих точок. Побудуємо за допомогою f ретракцію r кулі B^n на сферу S^{n-1}.

Для кожної точки $x \in B^n$ розглянемо промінь із початком $f(x) \ne x$, що проходить через x. Нехай $r(x)$ — точка, у якій цей промінь перетинає сферу S^{n-1} (зробіть рисунок!). Ясно, що побудоване відображення r — ретракція B^n на S^{n-1}. □

Теорема 20 та теорема 21 еквівалентні. Дійсно, нехай існує ретракція $r : B^n \to S^{n-1}$. Тоді відображення $-r : B^n \to S^{n-1}$ не має нерухомих точок, що суперечить теоремі 20.

Доведемо один важливий результат, який за традицією називають лемою Кнастера – Куратовського – Мазуркевича.

Лема 1. *Нехай X — довільна множина в $\mathbb{R}^n$. Кожній точці $x \in X$ поставлено у відповідність компактну множину $F(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ так, що для довільної скінченної множини $\{x_1, x_2, ..., x_p\} \subseteq X$*

$$\operatorname{conv}\{x_1, x_2, ..., x_p\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} F(x_i).$$

Тоді

$$\bigcap_{x \in X} F(x) \ne \emptyset.$$

Доведення. Достатньо довести, що сім'я множин $\{F(x)\}_{x\in X}$ центрована. Міркуємо від супротивного. Припустимо, що існує така множина $\{x_1, x_2, ..., x_p\} \subseteq X$, що

$$\bigcap_{i=1}^{p} F(x_i) = \emptyset.$$

Тоді

$$\bigcup_{i=1}^{p} O_i = \mathbb{R}^n,$$

де $O_i = \mathbb{R}^n \backslash F(x_i)$. Нехай $\{\phi_i\}$ — неперервне розбиття одиниці в $\mathbb{R}^n$, узгоджене з відкритим покриттям $\{O_i\}$, тобто

$$\phi_i \in C(\mathbb{R}^n),\ \ 0 \le \phi_i \le 1,\ \ \sum_{i=1}^{p} \phi_i = 1,\ \ \mathrm{supp}\phi_i \subseteq O_i.$$

Розглянемо відображення

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(x) x_i.$$

Ясно, що $\phi(K) \subseteq K$, де $K = \mathrm{conv}\,\{x_1, x_2, ..., x_p\}$. За теоремою Брауера про нерухому точку існує така точка $y \in K$, що

$$y = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(y) x_i.$$

Можна вважати, що для деякого $k \le p$ маємо

$$\phi_i(y) \begin{cases} > 0, & \text{якщо } \ i \le k, \\ = 0, & \text{якщо } \ i > k, \end{cases}$$

тобто $y \in \mathrm{conv}\,\{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Тоді $y \in \bigcup_{i=1}^{k} F(x_i)$, а отже, для деякого $i \le k$ маємо $y \in F(x_i)$. Звідси випливає, що $y \notin O_i$, тобто $\phi_i(y) = 0$. Дійшли суперечності. $\square$

Зауваження 10. У лемі 1 умову компактності всіх множин $F(x)$ можна послабити до їх замкнености та існування принаймні однієї компактної множини $F(x_0)$, $x_0 \in X$.

2.1.2. Теорема Шаудера

У цьому пункті доведемо один з найважливіших результатів нескінченновимірного нелінійного аналізу — теорему Ю. Шаудера про нерухому точку. Ця теорема є потужним засобом доведення існування розв'язків інтегральних та диференціальних рівнянь.

Теорема 22 (Шаудера). *Нехай K — опуклий компакт у лінійному нормованому просторі E і $f : K \to K$ — неперервне відображення. Тоді існує $x \in K$ із $f(x) = x$.*

Доведення. Покажемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує точка $x_\varepsilon \in K$ така, що

$$\|f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

Це дасть нам існування нерухомої точки. Дійсно, з $(x_{1/n})$ виділимо підпослідовність (x_{1/n_k}), збіжну до деякої точки $x \in K$. Тоді $f(x_{1/n_k}) \to f(x)$, звідки випливає $f(x) = x$, оскільки маємо $\left\|f(x_{1/n_k}) - x_{1/n_k}\right\| \to 0$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та оберемо в K деяку $\varepsilon/2$–сітку $x_1, ..., x_N \in K$. Нехай S — опукла оболонка цих точок. За рахунок опуклості K маємо $S \subseteq K$. Для $i = 1, 2, ..., N$ розглянемо функції

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_i\|, & \text{якщо } \|x - x_i\| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{якщо } \|x - x_i\| > \varepsilon. \end{cases}$$

Легко перевірити, що функції β_i неперервні. Також маємо

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i(x) > 0 \quad \text{при } x \in K,$$

оскільки для кожного $x \in K$ існує такий номер i, що $\|x - x_i\| \leq \varepsilon/2$. Тому функції

$$\alpha_k(x) = \frac{\beta_k(x)}{\sum_{i=1}^{N} \beta_i(x)}$$

неперервні на K. Зазначимо також, що

$$0 \leq \alpha_k(x) \leq 1 \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x) = 1 \quad \text{при } x \in K.$$

Тепер задамо неперервне відображення g на K формулою

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x) x_k.$$

Відображення $h = g \circ f : K \to K$ також неперервне, причому $h(S) \subseteq S$ (опуклість S і умова $f(K) \subseteq K$). З теореми Брауера про нерухому точку випливає існування $z \in S$ із $h(z) = z$. Оцінимо величину $\|f(z) - z\|$. Справедливі співвідношення

$$\|f(z) - z\| = \|f(z) - g(f(z))\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(f(z)) f(z) - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(f(z)) x_k \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(f(z)) \, \|f(z) - x_k\| \leq \varepsilon,$$

оскільки при $\|f(z) - z\| > \varepsilon$ маємо $\alpha_k(f(z)) = 0$. □

Існує багато модифікацій цього результату. Однією з них є така теорема.

Теорема 23. *Нехай K — замкнена опукла множина в банаховому просторі E і $f : K \to K$ — неперервне відображен-*

ня, причому $f(K)$ лежить у компакті. Тоді f має нерухому точку.

Доведення. Нехай V — замикання опуклої оболонки $f(K)$. Множина V — опуклий компакт та $f(V) \subseteq V$. □

Важливість теореми 23 полягає в тому, що в банахових просторах рідко зустрічаються сильно компактні множини. У зв'язку з цим Ф. Браудер одержав іншу модифікацію теореми Шаудера, де не вимагається, щоб множина $\mathrm{cl} f(K)$ була компактною (але на f і простір E накладаються досить сильні обмеження). Цю модифікацію розглянемо пізніше.

2.1.3. Теорема Какутані

Теореми Брауера та Шаудера можна узагальнити на багатозначні відображення, тобто такі, що ставлять у відповідність точці не точку, а деяку множину.

Наведемо деякі факти про багатозначні відображення. Нехай X та Y — метричні простори; через 2^Y позначимо булеан Y. Відображення $f : X \to 2^Y$ будемо називати багатозначним. У цьому випадку кожній точці $x \in X$ поставлено у відповідність деяку множину $f(x) \subseteq Y$, яку далі вважаємо непорожньою.

Графіком багатозначного відображення $f : X \to 2^Y$ називатимемо множину

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y \in f(x)\} \subseteq X \times Y.$$

Означення 25. Багатозначне відображення $f : X \to 2^Y$ називається замкненим у точці $x \in X$, якщо з того, що $x_n \to x$, $y_n \to y$ та $y_n \in f(x_n)$, випливає $y \in f(x)$. Відображення f називається замкненим, якщо воно є замкненим у кожній точці $x \in X$.

Очевидно, що $f : X \to 2^Y$ замкнене тоді й тільки тоді, коли його графік Γ_f замкнений у $X \times Y$.

Означення 26. Багатозначне відображення $f : X \to 2^Y$ називається напівнеперервним зверху в точці $x \in X$, якщо для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ такої, що $f(x) \subseteq U$, існує окіл V точки x, що задовольняє умову $f(V) \subseteq U$. Відображення f називається напівнеперервним зверху, якщо воно є напівнеперервним зверху в кожній точці $x \in X$.

Якщо f — однозначне відображення, то для нього напівнеперервність рівносильна неперервності, тоді як замкнене відображення може й не бути неперервним.

Лема 2. *Напівнеперервне зверху відображення $f : X \to 2^Y$ із замкненими значеннями є замкненим.*

Доведення. Нехай $x_n \to x$, $y_n \to y$ та $y_n \in f(x_n)$. З напівнеперервності зверху f випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер N такий, що $d_Y(y_n, f(x)) < \varepsilon$ для всіх $n \geq N$. Отже, $d_Y(y, f(x)) = 0$. Оскільки множина $f(x)$ замкнена, то $y \in f(x)$. $\square$

Лема 3. *Якщо простір Y компактний, то замкнене відображення $f : X \to 2^Y$ напівнеперервне зверху.*

Доведення. Оберемо $x \in X$ і відкриту множину $U \supseteq f(x)$. Розглянемо

$$V = \{z \in X : f(z) \subseteq U\}.$$

Оскільки $x \in V$ і $f(V) \subseteq U$, то достатньо довести, що множина V відкрита або що множина $X \backslash V = \{z \in X : f(z) \cap (Y \backslash U) \neq \emptyset\}$ замкнена. Якщо $z_n \to z \in X$ і $z_n \in X \backslash V$, то знайдуться точки $y_n \in f(z_n) \cap (Y \backslash U)$. Унаслідок компактності Y існує підпослідовність (y_{n_k}) така, що $y_{n_k} \to y \in Y \backslash U$. Оскільки відображення f замкнене, то $y \in f(z)$. Отже, $y \in f(z) \cap (Y \backslash U)$, звідки $z \in X \backslash V$. $\square$

Лема 3 є корисним інструментом при доведенні напівнеперервності зверху багатозначних відображень. Зауважимо, що припущення про компактність Y суттєве. Дійсно, розглянемо відображення $f : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}^2}$, задане за правилом

$$f(x) = \left\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : y = xt\right\}.$$

Воно є замкненим, але вкладення

$$f(x) \subseteq f(0) + O_\varepsilon(0)$$

неможливе для жодних $\varepsilon > 0$ та $x \neq 0$.

Означення 27. Точка $\bar{x} \in X$ називається нерухомою точкою відображення $f : X \to 2^X$, якщо $\bar{x} \in f(\bar{x})$.

Тепер сформулюємо теорему Какутані.

Теорема 24 (Какутані)**.** *Нехай K — непорожній опуклий компакт у лінійному нормованому просторі E та $f : K \to 2^K$ — багатозначне відображення, що задовольняє умови:*

1) для всіх $x \in K$ множина $f(x)$ є непорожньою опуклою підмножиною множини K;

2) відображення f замкнене.

Тоді відображення f має нерухому точку, причому множина нерухомих точок відображення f компактна.

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та оберемо в K деяку скінченну ε–сітку $x_{\varepsilon 1}, ..., x_{\varepsilon N(\varepsilon)} \in K$. Для $i = 1, 2, ..., N(\varepsilon)$ розглянемо функції $\beta_{\varepsilon i} : K \to \mathbb{R}$:

$$\beta_{\varepsilon i}(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_{\varepsilon i}\|, & \text{якщо } \|x - x_{\varepsilon i}\| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{якщо } \|x - x_{\varepsilon i}\| > \varepsilon. \end{cases}$$

Легко перевірити, що функції $\beta_{\varepsilon i}$ неперервні. Також маємо

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \beta_{\varepsilon i}(x) > 0 \quad \text{при } x \in K,$$

оскільки для кожного $x \in K$ існує такий номер i, що $\|x - x_{\varepsilon i}\| < \varepsilon$. Тому функції

$$\alpha_{\varepsilon k}(x) = \frac{\beta_{\varepsilon k}(x)}{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \beta_{\varepsilon i}(x)}, \ \ k = 1, 2, ..., N(\varepsilon),$$

неперервні на K. Зазначимо також, що

$$0 \leq \alpha_{\varepsilon k}(x) \leq 1 \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \alpha_{\varepsilon k}(x) = 1 \quad \text{при } x \in K. \tag{2.2}$$

Зафіксуємо тепер довільну точку $y_{\varepsilon i} \in f(x_{\varepsilon i})$ $(i = 1, 2, ..., N(\varepsilon))$ та задамо однозначне неперервне відображення $\phi_\varepsilon : K \to K$ формулою

$$\phi_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \alpha_{\varepsilon k}(x) y_{\varepsilon k}.$$

З умов (2.2) і опуклості множини K випливає $\phi_\varepsilon(K) \subseteq K$.

Таким чином, для кожного $\varepsilon > 0$ маємо однозначне неперервне відображення $\phi_\varepsilon : K \to K$. За теоремою Шаудера у цього відображення є нерухома точка $x_\varepsilon \in K$: $\phi_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$.

Унаслідок компактності множини K існують послідовність (ε_n) додатних чисел і точка $\bar{x} \in K$ такі, що:

$$\varepsilon_n \to 0, \tag{2.3}$$

$$\|x_{\varepsilon_n} - \bar{x}\| \to 0, \tag{2.4}$$

$$\phi_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}) = x_{\varepsilon_n}. \tag{2.5}$$

Покажемо, що точка $\bar{x} \in K$ є шуканою нерухомою точкою відображення f. Покладемо

$$O_\delta = \bigcup_{y \in f(\bar{x})} O_\delta(y),$$

де $O_\delta(y) = \{z \in E : \|z - y\| < \delta\}$. Доведемо, що $\bar{x} \in O_\delta$ для довільного $\delta > 0$, звідки внаслідок замкненості $f(\bar{x})$ отримаємо потрібне $\bar{x} \in f(\bar{x})$ (замкненість множини $f(\bar{x})$ випливає із замкненості відображення f).

Очевидно, що O_δ — опукла відкрита множина та $f(\bar{x}) \subseteq O_\delta$. Унаслідок леми 3 існує відкрита куля $O_\varepsilon(\bar{x})$ така, що $f(O_\varepsilon(\bar{x}) \cap K) \subseteq O_\delta$. А внаслідок умов (2.3) і (2.4) існує число N таке, що для $n \geq N$ маємо $\varepsilon_n < \varepsilon/2$ та $x_{\varepsilon_n} \in O_{\varepsilon/2}(\bar{x})$. Якщо $\alpha_{\varepsilon_n i}(x_{\varepsilon_n}) > 0$, то

$$\|x_{\varepsilon_n i} - x_{\varepsilon_n}\| < \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\|x_{\varepsilon_n i} - \bar{x}\| \leq \|x_{\varepsilon_n i} - x_{\varepsilon_n}\| + \|x_{\varepsilon_n} - \bar{x}\| < \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, для $n > N$ маємо $x_{\varepsilon_n i} \in O_\varepsilon(\bar{x})$ для всіх таких i, що $\alpha_{\varepsilon_n i}(x_{\varepsilon_n}) > 0$. Для цих i отримуємо

$$y_{\varepsilon_n i} \in f(x_{\varepsilon_n i}) \subseteq f(O_\varepsilon(\bar{x}) \cap K) \subseteq O_\delta. \tag{2.6}$$

Умову (2.5) запишемо у вигляді

$$x_{\varepsilon_n} = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon_n)} \alpha_{\varepsilon_n i}(x_{\varepsilon_n}) y_{\varepsilon_n i}. \tag{2.7}$$

З (2.6) і (2.7) одержуємо, що для $n \geq N$ точка x_{ε_n} — опукла комбінація тільки тих точок $y_{\varepsilon_n i}$, які лежать у O_δ, звідки внаслідок опуклості O_δ маємо $x_{\varepsilon_n} \in O_\delta$. Перейшовши до границі при $n \to \infty$, одержуємо, що $\bar{x} \in \mathrm{cl}O_\delta \subseteq O_{2\delta}$. Як уже було вказано, звідси випливає, що $\bar{x} \in f(\bar{x})$.

Компактність множини нерухомих точок випливає із замкненості відображення f та компактності множини K. $\square$

Зауваження 11. Умову 1 теореми Какутані про опуклозначність відображення f не можна відкинути. Дійсно, відображення $f : [0,1] \to 2^{[0,1]}$, задане за правилом

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{якщо } x < \frac{1}{2}, \\ \{0,1\}, & \text{якщо } x = \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{2}, & \text{якщо } x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

замкнене (напівнеперервне зверху), але без нерухомих точок.

Теорема Какутані має багато застосувань, переважно в математичній економіці та теорії ігор.

Як приклад розв'яжемо задачу існування точок рівноваги Неша для досить загальної ситуації.

Задамо лінійні нормовані простори E_1, E_2, ..., E_p та

$$C_i \subseteq E_i$$

— непорожня множина;

$$f_i : C = C_1 \times ... \times C_p \to \mathbb{R}$$

— функція, $F = (f_1, ..., f_p)$.

Задача рівноваги Неша полягає у відшуканні такої точки $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p) \in C$, що

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p) = \inf_{x_1 \in C_1} f_1(x_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p), \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p) = \inf_{x_2 \in C_2} f_2(\bar{x}_1, x_2, ..., \bar{x}_p), \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_p(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p) = \inf_{x_p \in C_p} f_p(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., x_p). \end{cases} \tag{2.8}$$

Позначимо $NE(F)$ множину розв'язків задачі (2.8). Її елементи називатимемо точками рівноваги за Нешем системи функцій $F = (f_1, ..., f_p)$.

Теорема 25. *Нехай E_1, E_2, ..., E_p — лінійні нормовані простори. Припустимо, що:*

1) C_i — непорожня опукла компактна підмножина E_i;

2) f_i *— неперервна на* $C_1 \times ... \times C_p$ *функція, причому для всіх* $(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_p) \in C_1 \times ... \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times ... \times C_p$ *функція* $C_i \ni \eta \to f_i(x_1, ..., x_{i-1}, \eta, x_{i+1}, ..., x_p)$ *опукла.*

Тоді множина $NE(F)$ *точок рівноваги за Нешем системи функцій* $(f_1, ..., f_p)$ *непорожня та компактна.*

Доведення. Ясно, що $C = \prod_{i=1}^{p} C_i$ — опукла компактна підмножина лінійного нормованого простору $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$. Розглянемо багатозначні відображення

$$\prod_{i=2}^{p} C_i \ni (x_2, ..., x_p) \mapsto Q_1(x_2, ..., x_p) =$$

$$= \left\{ \bar{x}_1 \in C_1 : \, f_1(\bar{x}_1, x_2, ..., x_p) = \inf_{x_1 \in C_1} f_1(x_1, x_2, ..., x_p) \right\},$$

....

$$\prod_{i=1,\, i \neq k}^{p} C_i \ni (x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_p) \mapsto$$

$$\mapsto Q_k(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_p) =$$
$$= \left\{ \bar{x}_k \in C_k : \, f_k(x_1, ..., \bar{x}_k, ..., x_p) = \inf_{x_k \in C_k} f_k(x_1, x_2, ..., x_p) \right\},$$

....

$$\prod_{i=1}^{p-1} C_i \ni (x_1, ..., x_{p-1}) \mapsto Q_p(x_1, ..., x_{p-1}) =$$
$$= \left\{ \bar{x}_p \in C_p : \, f_p(x_1, ..., x_{p-1}, \bar{x}_p) = \inf_{x_p \in C_p} f_p(x_1, x_2, ..., x_p) \right\}.$$

Покладемо

$$Q(x_1, ..., x_p) = Q_1(x_2, ..., x_p) \times ...$$
$$... \times Q_k(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_p) \times ... \times Q_p(x_1, ..., x_{p-1}).$$

Точка $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p) \in C$ є розв'язком задачі (2.8) тоді й тільки тоді, коли вона є нерухомою точкою відображення $Q : C \to 2^C$, тобто

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p) \in Q(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p).$$

Покажемо, що відображення $Q : C \to 2^C$ має непорожню компактну множину нерухомих точок.

Множини $Q(x_1, x_2, ..., x_p)$ — непорожні опуклі компакти. Замкненість багатозначного відображення Q випливає з наведених нижче двох лем.

Лема 4. *Нехай функція $\phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ неперервна, Y — компакт. Тоді відображення $f : X \to 2^Y$, задане співвідношенням*

$$f(x) = \left\{ \bar{y} \in Y : \phi(x, \bar{y}) = \inf_{y \in Y} \phi(x, y) \right\},$$

замкнене[1].

Доведення. Зрозуміло, що всі множини $f(x) \subseteq Y$ — непорожні компакти. Покажемо, що функція $\psi : X \to \mathbb{R}$, задана співвідношенням

$$\psi(x) = \min_{y \in Y} \phi(x, y),$$

неперервна. Для $y \in f(x)$ та $y_0 \in f(x_0)$ маємо

$$\phi(x, y) = \psi(x) \le \phi(x, y_0),$$

$$\phi(x_0, y) \ge \psi(x_0) = \phi(x_0, y_0).$$

Віднявши ці нерівності, одержуємо

$$\phi(x, y_0) - \phi(x_0, y_0) \ge \psi(x) - \psi(x_0) \ge \phi(x, y) - \phi(x_0, y). \quad (2.9)$$

При $x \to x_0$ ліва частина нерівності (2.9) прямує до нуля. Унаслідок компактності Y та неперервності ϕ права частина

[1] X, Y — метричні простори.

також прямує до нуля.

Дійсно, припустимо, що різниця

$$\phi(x, y) - \phi(x_0, y)\,, \;\; y \in f(x)$$

не прямує до нуля, коли $x \to x_0$. Отже, знайдуться такі послідовності $x_n \to x_0$, $y_n \in f(x_n)$, що

$$|\phi(x_n, y_n) - \phi(x_0, y_n)| \geq \varepsilon > 0.$$

Оскільки Y — компакт, то можна вважати, що $y_n \to y' \in Y$. Після граничного переходу в останній нерівності одержуємо внаслідок неперервності ϕ

$$0 \geq \varepsilon > 0.$$

Отримана суперечність показує, що права частина (2.9) прямує до нуля, що завершує доведення неперервності ψ.

Нехай тепер $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ та $y_n \in f(x_n)$ ($\phi(x_n, y_n) = \psi(x_n) = \min_{y \in Y} \phi(x_n, y)$). Унаслідок неперервності ψ маємо

$$\phi(x_0, y_0) = \lim_{n \to \infty} \phi(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \psi(x_n) = \\ = \psi(x_0) = \min_{y \in Y} \phi(x_0, y),$$

тобто $y_0 \in f(x_0)$. Замкненість f доведено[2]. $\square$

Лема 5. *Якщо відображення $p : X \to 2^Y$ і $q : Y \to 2^X$ замкнені, то відображення*

$$X \times Y \ni (x, y) \mapsto q(y) \times p(x) \in 2^{X \times Y}$$

теж замкнене.

[2]Більш того, з леми 3 випливає, що відображення f напівнеперервне зверху.

Доведення. Нехай

$$(x_n, y_n) \to (x, y)\,, \;\; (\bar{x}_n, \bar{y}_n) \to (\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{і} \quad (\bar{x}_n, \bar{y}_n) \in q(y_n) \times p(x_n).$$

За умовою маємо $\bar{x} \in q(y)$, $\bar{y} \in p(x)$. Таким чином, $(\bar{x}, \bar{y}) \in q(y) \times p(x)$. □

Ми показали, що відображення $Q : C \to 2^C$ задовольняє умови теореми Какутані. Звідси випливає, що множина $NE(F)$ непорожня та компактна. □

2.1.4. Теорема Браудера

Нехай E — лінійний нормований простір із нормою $\|\cdot\|$, $C \subseteq E$.

Означення 28. Оператор $T : C \to E$ називатимемо нерозтягуючим, якщо

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|\,, \quad \forall x, y \in E.$$

Позначимо через $F(T)$ множину нерухомих точок оператора T, тобто

$$F(T) = \{x \in C : Tx = x\}\,.$$

Зауваження 12. Множина нерухомих точок $F(T)$ нерозтягуючого оператора T, що діє в просторі E, може бути порожньою. Дійсно, якщо $Tx = x + y$ ($y \in E \backslash \{0\}$), то $F(T) = \emptyset$.

Через P_C будемо позначати оператор метричного проектування гільбертового простору H на замкнену опуклу множину $C \subseteq H$. Нагадаємо, що для $x \in H$ точка $P_C x$ — єдиний елемент множини C із властивістю

$$\|P_C x - x\| = \inf_{y \in C} \|y - x\|\,.$$

Доведемо існування та єдиність $z = P_C x$. Нехай $z_k \in C$ – мінімізуюча послідовність, тобто

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k - x\| = d = \inf_{y\in C} \|y - x\|\,. \tag{2.10}$$

За правилом паралелограма (елементарний наслідок властивостей скалярного добутку)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\ , \ \ x, y \in H,$$

можемо записати

$$\|z_k - z_l\|^2 = 2\|x - z_k\|^2 + 2\|x - z_l\|^2 - \\ - 4\left\|x - \frac{z_k + z_l}{2}\right\|^2. \tag{2.11}$$

З опуклості C випливає $\frac{1}{2}z_k + \frac{1}{2}z_l \in C$, тому

$$d^2 \le \left\|x - \frac{z_k + z_l}{2}\right\|^2.$$

Отже,

$$\|z_k - z_l\|^2 \le 2\|x - z_k\|^2 + 2\|x - z_l\|^2 - 4d^2.$$

З (2.10) випливає, що $\lim_{k,l\to\infty} \|z_k - z_l\| = 0$.

Оскільки простір H повний, множина C замкнена, то існує елемент $z \in C$ такий, що $z_k \to z$. Крім того,

$$\|z - x\| = \lim_{k\to\infty} \|z_k - x\| = d.$$

Для доведення єдиності найближчого елемента слід тільки зазначити, що після підстановки у (2.11) замість z_k і z_l довільних двох елементів $z, z' \in C$, які задовольняють $\|z - x\| =$

$\|z' - x\| = d$, одержимо

$$\|z - z'\|^2 = 2\|x - z\|^2 + 2\|x - z'\|^2 - \\ - 4\left\|x - \frac{z + z'}{2}\right\|^2 \le 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

звідки випливає, що $z = z'$.

Оператор P_C можна охарактеризувати таким чином.

Теорема 26. *Нехай $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $x \in H$, $z \in C$. Такі умови рівносильні:*

(i) $z = P_C x$.

(ii) $(z - x, y - z) \ge 0 \quad \forall y \in C$.

(iii) $\|z - y\|^2 \le \|x - y\|^2 - \|z - x\|^2 \quad \forall y \in C$.

Доведення. Пропонуємо довести самостійно. □

З теореми 26 випливає, що оператор метричного проектування P_C нерозтягуючий, тобто

$$\|P_C x - P_C y\| \le \|x - y\| \quad \forall x, y \in H.$$

Для деяких опуклих замкнених множин C відомі явні формули обчислення проекції P_C. Наприклад, для кулі $B_R(x_0) = \{y \in H : \|y - x_0\| \le R\}$ та $x \notin B_R(x_0)$ маємо

$$P_{B_R(x_0)} x = x_0 + R\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|},$$

а для гіперплощини $L = \{y \in H : (x_0, y) = c\}$ ($x_0 \ne 0$, $c \in \mathbb{R}$) проекція $P_L x$ обчислюється за формулою

$$P_L x = x + (c - (x_0, x))\frac{x_0}{\|x_0\|^2}.$$

Для нерозтягуючих операторів, що діють у гільбертових просторах, множина $F(T)$ має відносно просту будову.

Лема 6. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $T : C \to H$ — нерозтягуючий оператор. Тоді множина $F(T)$ опукла та замкнена.*

Доведення. З неперервності T випливає замкненість $F(T)$. Покажемо опуклість множини $F(T)$. Нехай $x, y \in F(T)$, $\alpha \in [0, 1]$. Тоді для $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ маємо

$$\|z - Tz\|^2 = \|z\|^2 - 2\alpha(x, Tz) - 2(1 - \alpha)(y, Tz) + \|Tz\|^2 =$$

$$= \|z\|^2 + \alpha \|x - Tz\|^2 - \alpha \|x\|^2 - \alpha \|Tz\|^2 +$$

$$+ (1 - \alpha) \|y - Tz\|^2 - (1 - \alpha) \|y\|^2 - (1 - \alpha) \|Tz\|^2 + \|Tz\|^2 \leq$$

$$\leq \|z\|^2 + \alpha \|x - z\|^2 - \alpha \|x\|^2 + (1 - \alpha) \|y - z\|^2 - (1 - \alpha) \|y\|^2 =$$

$$= \|z\|^2 - 2\alpha(x, z) - 2(1 - \alpha)(y, z) + \|z\|^2 = 0.$$

Отже, $z = Tz$. □

У випадку довільного банахового простору множина нерухомих точок нерозтягуючого оператора може бути неопуклою. Розглянемо простір $\mathbb{R}^2$ з нормою $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ та оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданий формулою $Tx = (|x_2|, x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Ясно, що оператор T нерозтягуючий, $(1, 1)$, $(1, -1)$ — нерухомі точки T. Однак відрізок, що з'єднує $(1, 1)$ та $(1, -1)$, не містить інших нерухомих точок оператора T $\left(F(T) = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = |x_2|\right\}\right)$.

Зауваження 13. Лема 6 справедлива для строго опуклих лінійних нормованих просторів (доведіть це).

Слабку збіжність позначатимемо через $\rightharpoonup$.

Означення 29. Нехай C — непорожня підмножина банахового простору E, $F : C \to E$. Оператор F називатимемо демізамкненим, якщо для довільної послідовності точок $x_n \in C$ із $x_n \rightharpoonup x \in C$ та $Fx_n \to y$ випливає, що $Fx = y$.

Лема Оп'яла відіграє важливу роль у дослідженні демізамкненості нелінійних відображень.

Лема 7 (Оп'яла [53]). *Якщо послідовність* (x_n) *точок гільбертового простору* H *слабко збігається до точки* $x \in H$*, то для довільної точки* $y \in H\backslash\{x\}$ *має місце нерівність*

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\| . \tag{2.12}$$

Доведення. Для доведення нерівності (2.12) достатньо зазначити, що в рівності

$$\|x_n - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2(x_n - x, x - y)$$

останній доданок прямує до нуля при $n \to \infty$. □

Лема 8. *Нехай* H *— гільбертовий простір,* $C \subseteq H$ *— непорожня опукла замкнена множина,* $T : C \to H$ *— нерозтягуючий оператор. Тоді оператор* $I - T$ *є демізамкненим.*

Доведення. Нехай (x_n) — така послідовність точок із C, що $x_n \rightharpoonup x \in C$ та $x_n - Tx_n \to y \in H$. Покажемо, що $(I - T)x = y$.

Має місце нерівність

$$\begin{aligned}\|x_n - Tx - y\| \le \|x_n - Tx_n - y\| &+ \\ + \|Tx_n - Tx\| \le \|x_n - Tx_n - y\| &+ \|x_n - x\| .\end{aligned}$$

Звідси випливає

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - Tx - y\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| .$$

Припустимо, що $x \neq Tx + y$. Тоді з леми 7 випливає, що

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - Tx - y\| .$$

Отримали абсурдну нерівність

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - Tx - y\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - Tx - y\| .$$

Отже, $x - Tx = y$. $\square$

Зауваження 14. Цей результат, відомий під назвою ***принцип демізамкненості Браудера***, є одним з фундаментальних результатів теорії нерозтягуючих операторів.

Зауваження 15. Нехай C — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H, $T : C \to H$ — нерозтягуючий оператор із $F(T) \neq \emptyset$. Припустимо, що послідовність точок $x_n \in C$ має властивості:

1) $\forall\, p \in F(T) \;\; \exists \lim_{n\to\infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R}$;

2) $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$.

Тоді ця послідовність слабко збігається до точки з $F(T)$.

Теорема 27 (Ф. Браудера [41])**.** *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена обмежена множина, $T : C \to C$ — нерозтягуючий оператор. Тоді*

$$F(T) \neq \emptyset.$$

Доведення. Можемо вважати, що $0 \in C$. Розглянемо оператор $\lambda T : C \to C$, де $\lambda \in (0, 1)$. За теоремою Банаха рівняння

$$x = \lambda T x$$

має єдиний розв'язок $x_\lambda \in C$.

З обмеженості множини C випливає, що

$$\|x_\lambda - Tx_\lambda\| = (1 - \lambda)\,\|Tx_\lambda\| \leq (1 - \lambda)\mathrm{diam}(C) \to 0 \text{ при } \lambda \to 1.$$

Оберемо збіжну до 1 послідовність $\lambda_n \in (0, 1)$ таку, що

$$x_{\lambda_n} \rightharpoonup \bar{x} \in C.$$

З леми 8 випливає, що $\bar{x} \in F(T)$. $\square$

Зауваження 16. Доведена теорема не випливає з відомої теореми Шаудера – Тіхонова[3], оскільки нерозтягуючий оператор може не бути неперервним у слабкій топології.

Зазначимо, що теорема 27 не правильна для випадку довільного банахового простору. Дійсно, розглянемо в просторі c_0 нескінченно малих послідовностей з нормою $\|x\| = \max_n |x_n|$ оператор $Tx = (1, x_1, x_2, \ldots)$, де $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Оператор T нерозтягуючий та відображає одиничну замкнену кулю $B \subseteq c_0$ у себе. Нехай $x = (x_1, x_2, \ldots)$ — нерухома точка T у B. Тоді $(x_1, x_2, \ldots) = (1, x_1, x_2, \ldots)$. Звідси випливає, що $x = (1, 1, \ldots) \notin c_0$.

Зауваження 17. Теорема 27 справедлива для рівномірно опуклого банахового простору. Питання про її справедливість для довільного рефлексивного простору досі відкрите.

У 1980 р. Рей опублікував цікавий результат [58].

Теорема 28. *Нехай $C \subseteq H$ — непорожня замкнена опукла необмежена підмножина гільбертового простору H. Тоді існує нерозтягуючий оператор $T : C \to C$ такий, що $F(T) = \emptyset$.*

Доведення. Оскільки множина C необмежена, то існує елемент $y \in H$ такий, що

$$C_n = \{x \in C : (x, y) \geq n\} \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Зауважимо, що множини C_n опуклі та замкнені.

Нехай P_{C_n} — оператор метричного проектування простору H на множину C_n. Оператор P_{C_n} нерозтягуючий. Зафіксуємо елемент $x \in C$. Побудуємо послідовність (λ_n) додатних чисел таку, що $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|P_{C_n} x\| < +\infty$. Тоді

[3] Нехай C — непорожня компактна опукла підмножина локально опуклого простору E, $T : C \to C$ — неперервний оператор. Тоді $F(T) \neq \emptyset$.

ряд $\sum \lambda_n P_{C_n} z$ абсолютно збіжний при кожному $z \in C$. Отже, оператор $T : C \to C$, заданий формулою

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{C_n},$$

коректно визначений та нерозтягуючий.

Покажемо, що $F(T) = \emptyset$, від супротивного. Нехай $z \in C$ — нерухома точка T:

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{C_n} z.$$

Якщо $z \in C_n \backslash C_{n+1}$, то $P_{C_k} z = z$ для $k \leq n$ і $(P_{C_k} z, y) > (z, y)$ для $k > n$. Тоді

$$(z, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (P_{C_k} z, y) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (z, y) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (P_{C_k} z, y) > \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (z, y) = (z, y).$$

Звідси очевидно, що T не має нерухомої точки в C. □

2.1.5. Теореми для сум операторів

Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена обмежена множина, $T : C \to C$ — оператор, що допускає зображення

$$T = A + B.$$

Теорема 29 (Забрейко – Качуровського – Красносельського). *Нехай A — стискаючий оператор, B — цілком неперервний оператор (неперервний та компактний). Тоді $F(T) \neq \emptyset$.*

Доведення. Розглянемо оператор $T_1 = A \circ P_C + B \circ P_C : H \to C$. Оператор $A \circ P_C$ стискаючий. Тому рівняння $z = A \circ P_C z + f$

має за всіх $f \in H$ єдиний розв'язок $z = Sf \in H$. Оператор $S : H \to H$ задовольняє умову Ліпшица.

Рівняння $x = T_1 x$ та $x = S \circ B \circ P_C x$ еквівалентні. Оператор $B \circ P_C$ цілком неперервний та $B \circ P_C(H) = B(C)$. Тому оператор $S \circ B \circ P_C$ також цілком неперервний та $S \circ B \circ P_C(H) = S \circ B(C)$.

З теореми Шаудера випливає, що оператор $S \circ B \circ P_C$ має нерухому точку $y \in H$. Ця нерухома точка є розв'язком рівняння $x = T_1 x$. Однак $T_1(H) \subseteq C$; тому $y \in C$ і $T_1 y = Ty$. Таким чином, $y \in F(T)$. $\square$

Теорема 30 (Забрейко – Качуровського – Красносельського). *Нехай A — нерозтягуючий оператор, B — підсилено неперервний оператор (відображає слабко збіжні послідовності у сильно збіжні). Тоді $F(T) \neq \emptyset$.*

Доведення. За теоремою 29 кожен оператор $T_\lambda x = \lambda Tx + (1 - \lambda)Tx_0$ $(0 \le \lambda < 1,\ x_0 \in C)$ має в множині C нерухому точку x_λ. Оскільки

$$\|x_\lambda - Tx_\lambda\| = (1 - \lambda)\,\|Tx_\lambda - Tx_0\|\,,$$

то

$$\inf_{x \in C} \|x - Tx\| = 0.$$

Тому існує така послідовність точок $x_n \in C$, що

$$\|x_n - Tx_n\| \to 0.$$

Можна вважати, що $x_n \rightharpoonup \bar{x} \in C$. Звідси

$$\|Bx_n - B\bar{x}\| \to 0.$$

Отже,

$$\|x_n - Ax_n - B\bar{x}\| \to 0.$$

З принципу демізамкненості Браудера випливає, що $\bar{x} - A\bar{x} = B\bar{x}$, тобто $\bar{x} \in F(T)$. $\square$

2.2. Алгоритми пошуку нерухомих точок нерозтягуючих операторів

Нехай $T : H \to H$ — нерозтягуючий оператор, що діє в гільбертовому просторі H. У цьому підрозділі розглянемо основні ітераційні алгоритми пошуку нерухомих точок оператора T.

Якщо оператор $T : H \to H$ стискаючий, то його єдину нерухому точку можна знайти за допомогою методу послідовних наближень (простої ітерації)

$$x_{n+1} = Tx_n. \tag{2.13}$$

У випадку нерозтягуючого оператора T (навіть з єдиною нерухомою точкою) процес (2.13) може виявитись розбіжним для всіх початкових наближень, відмінних від $x_0 \in F(T)$. Приклад: обертання круга $B \subseteq \mathbb{R}^2$ проти годинникової стрілки на кут $\pi/2$ радіан.

Однак, розглядаючи замість (2.13) процеси вигляду

$$x_{n+1} = \frac{x_n + Tx_n}{2}, \;\; x_{n+1} = \frac{Tx_0 + Tx_1 + ... + Tx_n}{n+1},$$

можна побудувати збіжні алгоритми обчислення нерухомих точок.

Тепер дістанемо пов'язаний з методом (2.13) критерій існування нерухомої точки нерозтягуючого оператора T, що діє в гільбертовому просторі H.

Теорема 31. *Нехай H — гільбертовий простір, $T : H \to H$ — нерозтягуючий оператор. Операторне рівняння*

$$x - Tx = 0 \tag{2.14}$$

має розв'язок тоді й тільки тоді, коли для деякого $x_0 \in H$ послідовність (x_n), що визначена формулою $x_{n+1} = Tx_n$, $n \geq 0$, обмежена.

Доведення. Нехай $x \in H$ — розв'язок рівняння (2.14). Тоді

$$\|x_{n+1} - x\| = \|Tx_n - Tx\| \leq \|x_n - x\|.$$

Звідси випливає обмеженість (x_n).

Навпаки, нехай послідовність (x_n) обмежена. Побудуємо множини

$$C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} B_d(x_k),$$

де $d = \operatorname{diam}\{x_n\}$. Множини C_n непорожні, опуклі та мають властивість

$$T(C_n) \subseteq C_{n+1}.$$

Нехай

$$C = \operatorname{cl} \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Множина C є замкненою, опуклою та обмеженою. Оскільки $T(C) \subseteq C$, то за теоремою 27 оператор T має нерухому точку в C. $\square$

2.2.1. Ергодична теорема Байона

Твердження про граничну поведінку послідовності середніх вигляду

$$\frac{x + Tx + T^2x + ... + T^{n-1}x}{n}$$

називають операторними ергодичними теоремами[4]. Перша операторна ергодична теорема (для лінійних ізометричних операторів гільбертового простору) була сформульована та доведена Дж. фон Нейманом ще в 1932 р. Ергодичні теореми для нелінійних відображень — багата на глибокі результати та цікаві проблеми галузь функціонального аналізу, що активно розвивається більше 30 років. Ми доведемо лише класичну ер-

[4]Розглядають також інші процедури усереднення.

годичну теорему Байона для нелінійних нерозтягуючих операторів, що діють у гільбертовому просторі. Ця теорема стала джерелом численних узагальнень і уточнень.

Теорема 32 (Байона)**.** *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $T : C \to C$ — нерозтягуючий оператор. Якщо $F(T) \neq \emptyset$, то для довільного $x \in C$ послідовність середніх за Чезаро*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

слабко збігається до деякого елемента $y \in F(T)$.

Доведення. Нехай $F(T) \neq \emptyset$. Позначимо $x_k = T^k x$ ($x_0 = x$), $y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k$. Для довільного $p \in F(T)$ маємо

$$\|x_n - p\| = \|Tx_{n-1} - Tp\| \leq \|x_{n-1} - p\| .$$

Таким чином, існує $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R}$, а послідовності (x_n), (y_n) і (Ty_n) обмежені.

Покажемо, що всі часткові слабкі границі (які існують) послідовності (y_n) є нерухомими точками оператора T. Для цього, беручи до уваги демізамкненість оператора $I - T$ (лема 8), достатньо довести, що

$$\|y_n - Ty_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty . \tag{2.15}$$

Для $u \in H$ маємо

$$\|y_n - u\|^2 = \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (x_k - u) \right\|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (x_k - u, x_i - u).$$

Оскільки

$$2(x_k - u, x_i - u) = \|x_k - u\|^2 + \|x_i - u\|^2 - \|x_k - x_i\|^2 ,$$

то

$$2\|y_n-u\|^2=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|x_k-u\|^2-\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\|x_k-x_i\|^2. \quad (2.16)$$

Обравши у (2.16) $u=y_n$, отримаємо

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\|x_k-x_i\|^2=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|x_k-y_n\|^2.$$

Поклавши у (2.16) $u=Ty_n$, дістанемо

$$\|y_n-Ty_n\|^2=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|x_k-Ty_n\|^2-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|x_k-y_n\|^2=$$

$$=\frac{1}{n}\|x-Ty_n\|^2+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\|Tx_{k-1}-Ty_n\|^2-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|x_k-y_n\|^2\le$$

$$\le\frac{1}{n}\|x-Ty_n\|^2+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\|x_{k-1}-y_n\|^2-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|x_k-y_n\|^2=$$

$$=\frac{1}{n}\|x-Ty_n\|^2-\frac{1}{n}\|x_{n-1}-y_n\|^2\le$$

$$\le\frac{1}{n}\|x-Ty_n\|^2.$$

Остаточно маємо оцінку

$$\|y_n-Ty_n\|=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ при } n\to\infty.$$

Ми довели, що для довільного $p\in F(T)$ існує $\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|\in\mathbb{R}$ та всі часткові слабкі границі послідовності (y_n) належать множині $F(T)$. Покажемо, що звідси випливає слабка збіжність послідовності (y_n) до деякого елемента $y\in F(T)$. Для цього спочатку розглянемо дві точки

$p_1, p_2 \in F(T)$. Маємо $\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \in F(T)$ та

$$\left\| \frac{p_1 + p_2}{2} - x_n \right\|^2 = \|x_n - p_1\|^2 + \left\| \frac{p_1 - p_2}{2} \right\|^2 + (x_n - p_1, p_1 - p_2).$$

Отже, існує границя $\lim_{n\to\infty}(x_n - p_1, p_1 - p_2) = l \in \mathbb{R}$. За теоремою Штольца $\lim_{n\to\infty}(y_n - p_1, p_1 - p_2) = l$.

Нехай $a \in F(T)$, $b \in F(T)$ – дві слабкі часткові границі послідовності (y_n). Тоді

$$(a - b, p_2 - p_1) = 0, \ \forall p_1, p_2 \in F(T). \tag{2.17}$$

Поклавши у (2.17) $p_2 = a$, $p_1 = b$, отримаємо $\|a - b\|^2 = 0$. Отже, послідовність (y_n) слабко збігається до деякого елемента множини $F(T)$. □

Зауваження 18. Якщо $F(T) = \emptyset$, то для довільного $x \in C$ маємо

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x \right\| \to +\infty.$$

Дійсно, інакше послідовність середніх $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$ має слабко збіжні підпослідовності, які внаслідок демізамкненості оператора $I - T$ та (2.15) є нерухомими точками оператора T.

Також Байон одержав уточнення теореми 32.

Теорема 33. *Нехай виконано умови теореми 32. Припустимо, що*

$$C = -C \ \text{ та } \ T(-x) = -Tx \ \forall x \in C.$$

Тоді для довільного $x \in C$ послідовність середніх за Чезаро

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

сильно збігається до деякого елемента $y \in F(T)$.

Вправа 3. Нехай F — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору H, (x_n) — послідовність точок H та $y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}$, (λ_n) — послідовність додатних чисел така, що $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$. Припустимо, що:

1) $\forall\, p \in F \ \ \exists \lim_{n\to\infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R}$;

2) границя довільної слабко збіжної підпослідовності (y_{n_k}) лежить у F.

Доведіть, що послідовність (y_n) слабко збігається до деякої точки $y \in F$.

Вправа 4. Отримайте ергодичну теорему для послідовності середніх

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k T^k x}{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k},$$

де (λ_n) — послідовність додатних чисел, T — нерозтягуючий оператор, що відображає опуклу замкнену множину C гільбертового простору H у себе, $x \in C$.

2.2.2. Метод Красносельського – Манна

Розглянемо один з найпопулярніших ітераційних методів пошуку нерухомих точок — метод Красносельського – Манна. Він є джерелом багатьох ефективних алгоритмів оптимізації, обробки сигналів та комп'ютерної томографії.

Перші варіанти методу розглядались ще в середині XX ст. У 1953 р. для задачі пошуку нерухомої точки неперервної функції $f : [0,1] \to [0,1]$ Манн [48] запропонував ітераційний процес (mean value method): $x_0 \in [0,1]$,

$$x_{n+1} = \frac{n}{n+1} x_n + \frac{1}{n+1} f(x_n). \tag{2.18}$$

Ці ітерації можна записати у вигляді

$$x_{n+1} = \frac{f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_n)}{n+1}.$$

Вправа 5. Доведіть, що задана (2.18) послідовність збігається до нерухомої точки неперервної функції $f : [0,1] \to [0,1]$.

Через два роки М. А. Красносельський запрононував для пошуку нерухомих точок нерозтягуючого оператора $T : C \to C$ (C — опукла замкнена обмежена підмножина банахова простору E) процес: $x_0 \in C$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + Tx_n}{2}.$$

Він довів його сильну збіжність для компактних нерозтягуючих операторів T, що діють у рівномірно опуклих банахових просторах.

Нехай $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H, $T : C \to C$ — нерозтягуючий оператор. Припустимо, що $F(T) \neq \emptyset$.

Ітераційний метод Красносельського – Манна має такий вигляд.

Алгоритм 1. *Для заданого $x_0 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми*

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n,$$

де (α_n) — послідовність чисел з $[0,1]$.

Теорема 34. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \to C$ — нерозтягуючий оператор із $F(T) \neq \emptyset$. Нехай послідовність чисел $\alpha_n \in [0,1]$ задовольняє умову*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = +\infty. \tag{2.19}$$

Тоді згенерована алгоритмом 1 послідовність (x_n) слабко збігається до деякої точки з $F(T)$.

Доведення. Для довільного $p \in F(T)$ маємо

$$\|x_{n+1} - p\| \le \alpha_n \|x_n - p\| + (1 - \alpha_n) \|Tx_n - p\| \le \|x_n - p\| .$$

Таким чином, існує $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R}$, а послідовність (x_n) обмежена.

Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0. \tag{2.20}$$

Оцінимо зверху $\|x_{n+1} - p\|^2$, де $p \in F(T)$,

$$\|x_{n+1} - p\|^2 = \|x_n - p + (1-\alpha_n)(Tx_n - x_n)\|^2 =$$

$$= \|x_n - p\|^2 + 2(1-\alpha_n)(x_n - p, Tx_n - x_n) +$$

$$+(1-\alpha_n)^2 \|Tx_n - x_n\|^2 = \|x_n - p\|^2 - (1-\alpha_n) \|Tx_n - x_n\|^2 -$$

$$-(1-\alpha_n) \|p - x_n\|^2 + (1-\alpha_n) \|Tx_n - p\|^2 +$$

$$+(1-\alpha_n)^2 \|Tx_n - x_n\|^2 \le \|x_n - p\|^2 - \alpha_n(1-\alpha_n) \|Tx_n - x_n\|^2 .$$

Звідси

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (1-\alpha_k) \|Tx_k - x_k\|^2 \le \|x_0 - p\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

З (2.21) і (2.19) випливає

$$\liminf_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0. \tag{2.22}$$

Маємо

$$\|x_{n+1} - x_n\| = (1-\alpha_n) \|Tx_n - x_n\| .$$

Урахуємо цю рівність під час оцінки зверху $\|Tx_{n+1} - x_{n+1}\|$:

$$\|Tx_{n+1} - x_{n+1}\| \le \|Tx_{n+1} - Tx_n\| + \alpha_n \|Tx_n - x_n\| \le \\ \le \|x_{n+1} - x_n\| + \alpha_n \|Tx_n - x_n\| = \|Tx_n - x_n\| . \quad (2.23)$$

З (2.23) випливає існування $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| \in \mathbb{R}$. Разом із (2.22) це гарантує виконання (2.20).

Ураховуючи демізамкненість оператора $I - T$, обмеженість (x_n) і (2.20), робимо висновок, що всі часткові слабкі границі послідовності (x_n) є нерухомими точками оператора T.

Покажемо, що (x_n) слабко збігається до деякого елемента $y \in F(T)$. Нехай $a, b \in F(T)$ — дві слабкі часткові границі послідовності (x_n). Припустимо, що $a \ne b$, $x_{n_k} \rightharpoonup a$, $x_{n_l} \rightharpoonup b$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - a\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - a\| < \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - b\| = \\ = \lim_{l\to\infty} \|x_{n_l} - b\| < \lim_{l\to\infty} \|x_{n_l} - a\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - a\| .$$

Абсурдна нерівність указує на те, що $a = b$. Отже, послідовність (x_n) слабко збіжна. □

Зауваження 19. Розглянута теорема опублікована в [59]. Існує приклад замкненої обмеженої опуклої множини $C \subseteq \ell_2$, нерозтягуючого оператора $T : C \to C$ і точки $x_0 \in C$ таких, що алгоритм 1 з $\alpha_n = \frac{1}{2}$ не збігається сильно.

2.2.3. Апроксимаційна теорема Браудера

У цьому пункті ми доведемо фундаментальну теорему Ф. Браудера про апроксимацію нерухомих точок нерозтягуючих операторів у гільбертовому просторі.

Теорема 35 (Ф. Браудера [40])**.** *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \to C$ — нерозтягуючий оператор, $F(T) \ne \emptyset$, $y \in C$. Тоді* *для довільного* $t \in (0,1)$ *існує єдиний елемент* $x_t \in C$ *такий, що*

$$x_t = ty + (1-t)Tx_t.$$

При $t \to 0$ *напрямленість* $\{x_t\}$ *сильно збігаєтьса до точки* $P_{F(T)}y$, *де* $P_{F(T)}$ *— оператор метричного проектування на множину* $F(T)$.

Доведення. Оскільки $F(T)$ — непорожня замкнена опукла множина, то існує точка $y_0 = P_{F(T)}y \in F(T)$. Для довільного $t \in (0,1)$ оператор $ty + (1-t)T$ стискаючий і відображає множину C в себе. Тому він має єдину нерухому точку $x_t \in C$.

Покажемо, що напрямленість $\{x_t\}$ обмежена. Для $p \in F(T)$ має місце нерівність

$$\begin{aligned} \|x_t - p\| \le (1-t)\,\|Tx_t - p\| + t\,\|y-p\| \le \\ \le (1-t)\,\|x_t - p\| + t\,\|y-p\|\,. \end{aligned}$$

Звідси

$$\|x_t - p\| \le \|y - p\|\,.$$

Тобто напрямленість $\{x_t\}$ обмежена, а разом з нею обмежена й напрямленість $\{Tx_t\}$. Крім того, маємо

$$\|x_t - Tx_t\| = t\,\|Tx_t - y\| \to 0 \ \text{ при } \ t \to 0\,. \tag{2.24}$$

Оберемо довільну збіжну до нуля послідовність чисел $t_n \in (0,1)$ і покажемо, що (x_{t_n}) містить підпослідовність, яка сильно збігається до $y_0 = P_{F(T)}y$. Оскільки послідовність (x_{t_n}) обмежена, то можна вважати, що $x_{t_n} \rightharpoonup \bar{x} \in C$. Із (2.24) випливає включення $\bar{x} \in F(T)$.

Перемноживши скалярно тотожність $x_t - \bar{x} = (1-t)(Tx_t - \bar{x}) + t(y - \bar{x})$ та $x_t - \bar{x}$, використавши нерівність Шварца, отримаємо нерівність

$$\|x_t - \bar{x}\|^2 = (1-t)(Tx_t - \bar{x}, x_t - \bar{x}) + t(y - \bar{x}, x_t - \bar{x}) \leq$$
$$\leq (1-t)\|x_t - \bar{x}\|^2 + t(y - \bar{x}, x_t - \bar{x}).$$

Звідси

$$\|x_t - \bar{x}\|^2 \leq (y - \bar{x}, x_t - \bar{x}).$$

Зокрема,

$$\|x_{t_n} - \bar{x}\|^2 \leq (y - \bar{x}, x_{t_n} - \bar{x}). \qquad (2.25)$$

З нерівності (2.25) та $x_{t_n} \rightharpoonup \bar{x}$ випливає, що $x_{t_n} \to \bar{x}$.

Тепер покажемо, що $\bar{x} = y_0$. Оскільки x_t є нерухомою точкою оператора $ty + (1-t)T$, то

$$x_t - y = -\frac{1-t}{t}(x_t - Tx_t).$$

Для $x \in F(T)$, ураховуючи монотонність оператора $I - T$, отримуємо

$$(x_t - y, x_t - x) = -\frac{1-t}{t}(x_t - Tx_t, x_t - x) =$$
$$= -\frac{1-t}{t}((I-T)x_t - (I-T)x, x_t - x) \leq 0. \qquad (2.26)$$

Здійснивши в нерівності (2.26) граничний перехід при $t = t_n \to 0$, доходимо висновку, що $\bar{x}$ задовольняє нерівність

$$(\bar{x} - y, \bar{x} - x) \leq 0 \quad \forall x \in F(T),$$

що рівносильно рівності $\bar{x} = y_0$.

Покажемо, що й уся напрямленість $\{x_t\}$ сильно збігається до $y_0 = P_{F(T)}y$. Для цього припустимо, що $x_{s_n} \to y_1$, де $s_n \to 0$. Оскільки $y_1 \in F(T)$, то

$$(y_0 - y, y_0 - y_1) \leq 0. \qquad (2.27)$$

Міняючи місцями y_0 та y_1 , отримуємо

$$(y_1 - y, y_1 - y_0) \leq 0. \tag{2.28}$$

Склавши (2.27) та (2.28), дістаємо

$$(y_0 - y_1, y_0 - y_1) \leq 0,$$

тобто $y_0 = y_1$. □

Твердження 1. *Нехай у теоремі 35 маємо $F(T) = \emptyset$. Тоді*

$$\|x_t\| \to +\infty \quad \textit{при} \ t \to 0.$$

Доведення. Дійсно, інакше існує слабко збіжна послідовність (x_{t_n}), де $(0,1) \ni t_n \to 0$. Її границя z має належати множині $F(T)$ (унаслідок (2.24)). □

Таким чином, апроксимації Ф. Браудера мають властивість В. П. Маслова: збіжність алгоритму рівносильна існуванню розв'язку задачі[5].

У 2004 р. Х.-К. Ксу отримав узагальнення апроксимаційної теореми Ф. Браудера.

Теорема 36 (Х.-К. Ксу [63]). *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $T : C \to C$ — нерозтягуючий оператор, $F(T) \neq \emptyset$, $f : C \to C$ — стискаючий оператор. Тоді для довільного $t \in (0,1)$ існує єдиний елемент $x_t \in C$ такий, що*

$$x_t = tf(x_t) + (1-t)Tx_t.$$

При $t \to 0$ напрямленість $\{x_t\}$ сильно збігається до точки $\bar{x}$ такої, що $\bar{x} = P_{F(T)}f(\bar{x})$.

[5]Уперше на важливість цієї властивості вказано у [18].

Доведення. Теорему 36 легко отримати з теореми 35 такими міркуваннями. Уведемо допоміжну напрямленість $\{y_t\}$ за допомогою рівняння

$$y_t = tf(\bar{x}) + (1-t)Ty_t\,,\ \ t \in (0,1)\,.$$

За теоремою 35 маємо

$$y_t \to P_{F(T)} f(\bar{x}) = \bar{x} \ \text{ при } \ t \to 0\,.$$

Для доведення теореми 36 достатньо показати, що

$$\|y_t - x_t\| \to 0 \ \text{ при } \ t \to 0\,.$$

З оцінки

$$\|y_t - x_t\| = \|t(f(\bar{x}) - f(x_t)) + (1-t)(Ty_t - Tx_t)\| \le$$

$$\le \alpha t\,\|\bar{x} - x_t\| + (1-t)\,\|y_t - x_t\|\,,$$

де $\alpha \in [0,1)$ — коефіцієнт стискання оператора f, отримуємо

$$\|y_t - x_t\| \le \alpha\,\|\bar{x} - x_t\| \le \alpha\,\|\bar{x} - y_t\| + \alpha\,\|y_t - x_t\|\,.$$

Звідси $\|y_t - x_t\| \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\,\|\bar{x} - y_t\| \to 0$ при $t \to 0$. □

Описана апроксимація має на меті поліпшення вихідної задачі. Задачу

$$x_t = ty + (1-t)Tx_t \tag{2.29}$$

можна розв'язувати стандартним методом послідовних наближень, оскільки оператор $ty+(1-t)T$, на відміну від оператора T, є стискаючим. Однак ітерації, що апроксимують розв'язок (2.29) при фіксованому $t \neq 0$, узагалі кажучи, не апроксимують елемент $P_{F(T)}y$ при збільшенні номера ітерації.

У наступному пункті ми побудуємо послідовність, що сильно збігається до $P_{F(T)}y$, за допомогою такої конструкції. Нехай t_0 та $x_0 \in C$ фіксовані. Беручи x_0 за початкову точку, зробимо один крок методу послідовних наближень розв'язання задачі $x = t_0 y + (1 - t_0)Tx$. Отримаємо точку

$$x_1 = t_0 y + (1 - t_0)Tx_0.$$

Оберемо тепер t_1 і з парою t_1, x_1 виконаємо аналогічну дію. Отримаємо точку x_2 і т. д.

Описаний метод запропонував Б. Гальперн у 1967 р. Виявляється, удається так апріорно задати послідовність $t_n \to 0$, що описана ітераційна процедура буде сильно збігатись до $P_{F(T)}y$ (якщо $F(T) \neq \emptyset$).

2.2.4. Метод Гальперна

Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \to C$ — нерозтягуючий оператор. Припустимо, що $F(T) \neq \emptyset$. Розглянемо таку ітераційну процедуру.

Алгоритм 2. *Задаємо $x_0 \in C$ та $y \in C$, генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми*

$$x_{n+1} = \alpha_n y + (1 - \alpha_n)Tx_n,$$

де (α_n) — послідовність чисел з $(0, 1)$.

Уперше збіжність цього ітераційного алгоритму дослідив у 1967 р. Б. Гальперн [44]. Він показав, що умови

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty \end{array} \right\} \tag{2.30}$$

є необхідними для сильної збіжності побудованої послідовності (x_n) до нерухомих точок нерозтягуючих операторів T (покажіть це самостійно), та отримав достатні умови сильної збіжності. Зокрема, Б. Гальперн довів збіжність алгоритму 2 при $\alpha_n = \frac{1}{(n+1)^q}$, де $q \in (0, 1)$.

У 1977 р. майбутній філдсовський лауреат П.–Л. Ліонс покращив результат Б. Гальперна, довівши сильну збіжність алгоритму 2, якщо послідовність задовольняє умови (2.30) та

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)/\alpha_{n+1}^2 = 0. \qquad (2.31)$$

Зазначимо, що умови Б. Гальперна та П.–Л. Ліонса не задовольняє числова послідовність $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$.

У 1992 р. Р. Віттман [61] довів сильну збіжність алгоритму 2 до нерухомої точки оператора T за виконання умов (2.30) та

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n| < +\infty. \qquad (2.32)$$

Нарешті, у 2002 р. Х.–К. Ксу сформулював теорему про сильну збіжність алгоритму 2 за виконання умов (2.30) та

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)/\alpha_{n+1} = 0. \qquad (2.33)$$

Досі відкритим залишається питання: чи є (2.30) достатньою умовою сильної збіжності алгоритму 2 для довільного нерозтягуючого оператора $T : C \to C$?

Теорема 37 (Х.–К. Ксу [62]). *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \to C$ — нерозтягуючий оператор із $F(T) \neq \emptyset$, $y \in C$. Нехай послідовність чисел $\alpha_n \in (0,1)$ задовольняє умови:*

1) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$,

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = +\infty$,

3) $\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n| < +\infty$ *або* $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = 0$.

Тоді згенерована алгоритмом 2 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $P_{F(T)}y$.

Доведення. Покажемо спочатку обмеженість послідовності (x_n). Для $p \in F(T)$ маємо

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 - \alpha_n) \|Tx_n - p\| + \alpha_n \|y - p\| \leq$$

$$\leq (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| + \alpha_n \|y - p\| \leq \max \{\|x_n - p\|, \|y - p\|\}.$$

Звідси індукцією отримуємо

$$\|x_n - p\| \leq \{\|x_0 - p\|, \|y - p\|\}, \quad n \geq 0.$$

Таким чином, послідовність (x_n) обмежена, а разом з нею — також послідовність (Tx_n).

Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0 \tag{2.34}$$

та

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0. \tag{2.35}$$

Використаємо таку лему про числові послідовності.

Лема 9. *Нехай (ξ_n) — послідовність невід'ємних чисел, що задовольняє рекурентну нерівність*

$$\xi_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)\xi_n + \alpha_n \beta_n + \gamma_n,$$

де (α_n), (β_n) і (γ_n) мають властивості: 1) $\alpha_n \in [0, 1)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$; 2) $\limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq 0$; 3) $\gamma_n \in [0, +\infty)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$. Тоді $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

Доведення леми 9. Для довільного $\epsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $n \geq N$ маємо $\beta_n < \epsilon$, $\sum_{n=N}^{\infty} \gamma_n < \epsilon$. Для $n > N$ з рекурентної нерівності дістаємо

$$\xi_{n+1} \leq \left(\prod_{k=N}^{n} (1 - \alpha_k) \right) \xi_N + \left(1 - \prod_{k=N}^{n} (1 - \alpha_k) \right) \epsilon + \sum_{k=N}^{n} \gamma_k.$$

Беручи до уваги рівносильність умов $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ та

$\prod_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)=0$, отримуємо, що $\limsup_{n\to\infty}\xi_n \le 2\epsilon$. Звідси $\lim_{n\to\infty}\xi_n = 0$. $\square$

Маємо

$$\|x_{n+1}-x_n\| = \\ = \|(\alpha_n-\alpha_{n-1})(y-Tx_{n-1})+(1-\alpha_n)(Tx_n-Tx_{n-1})\| \le \\ \le (1-\alpha_n)\|x_n-x_{n-1}\| + |\alpha_n-\alpha_{n-1}|\cdot\|y-Tx_{n-1}\|.$$

З леми про числові послідовності випливає (2.34). Тепер ми можемо отримати (2.35) із (2.34).

$$\|x_n-Tx_n\| \le \|x_n-x_{n+1}\| + \|x_{n+1}-Tx_n\| =$$

$$= \|x_n-x_{n+1}\| + \alpha_n\|y-Tx_n\| \to 0.$$

Доведемо, що

$$\limsup_{n\to\infty}(P_{F(T)}y-x_n, P_{F(T)}y-y) \le 0. \qquad (2.36)$$

Виділимо з (x_n) підпослідовність (x_{n_k}) таку, що

$$\limsup_{n\to\infty}(P_{F(T)}y-x_n, P_{F(T)}y-y) = \lim_{k\to\infty}(P_{F(T)}y-x_{n_k}, P_{F(T)}y-y).$$

Можна вважати, що $x_{n_k} \rightharpoonup \tilde{x}$. Із (2.35) випливає включення $\tilde{x}\in F(T)$. Тому одержуємо

$$\lim_{k\to\infty}(P_{F(T)}y-x_{n_k}, P_{F(T)}y-y) = (P_{F(T)}y-\tilde{x}, P_{F(T)}y-y) \le 0,$$

чим і доводимо (2.36).

Покажемо тепер, що $x_n \to P_{F(T)}y$. Маємо

$$\left\|x_{n+1}-P_{F(T)}y\right\|^2 \le (1-\alpha_n)\left\|x_n-P_{F(T)}y\right\|^2 + \\ + 2\alpha_n\left(y-P_{F(T)}y, x_{n+1}-P_{F(T)}y\right). \qquad (2.37)$$

Застосувавши до одержаної рекурентної нерівності (2.37) лему про числові послідовності, робимо висновок, що $\left\|x_n - P_{F(T)}y\right\| \to 0$. $\square$

Зауваження 20. Розглянута схема є узагальненням усереднення за Чезаро. Дійсно, якщо T — лінійний оператор, $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ та $x_0 = y$, то породжена алгоритмом Гальперна послідовність має вигляд $x_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k y$, а за умови $\|T\| \le 1$ послідовність (x_n) сильно збігається до $P_{N(I-T)}y$. Отже, з теореми 37 випливає ергодична теорема фон Неймана.

2.2.5. Гібридний метод

У загальному випадку метод Красносельського – Манна слабко збігається. Існує кілька сильно збіжних його модифікацій. Розглянемо CQ–метод (відомий під назвою ***гібридний метод***), що запропонований К. Накадзьо та В. Такахасі [50].

Нехай $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H, $T : C \to C$ — нерозтягуючий оператор. Припустимо, що $F(T) \ne \emptyset$.

Алгоритм 3. *Для заданого $x_0 = x \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми:*

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_n = \left\{z \in C : \|z - y_n\| \le \|z - x_n\|\right\}, \\ Q_n = \left\{z \in C : (x_n - z, x_0 - x_n) \ge 0\right\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0, \end{cases}$$

де (α_n) — послідовність чисел із $[0, \alpha]$ для деякого $\alpha \in [0, 1)$.

Множини Q_n, C_n опуклі та замкнені. Опуклість C_n випливає з того, що нерівність $\|z - y_n\| \le \|z - x_n\|$ рівносильна нерівності $\|y_n - x_n\| + 2(y_n - x_n, x_n - z) \le 0$. Отже, множини $C_n \cap Q_n$ замкнені та опуклі для кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Нехай $p \in F(T)$. З нерівності

$$\|y_n - p\| \le \alpha_n \|x_n - p\| + (1-\alpha_n)\|Tx_n - p\| \le \|x_n - p\|$$

випливає $p \in C_n$ для всіх $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Отже, $F(T) \subseteq C_n$ для всіх $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тепер за допомогою математичної індукції покажемо, що послідовність (x_n) коректно визначена та для кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ має місце вкладення $F(T) \subseteq C_n \cap Q_n$. Для $n = 0$ маємо $x_0 = x \in C$ і $Q_n = C$. Тому $F(T) \subseteq C_0 \cap Q_0$. Нехай для деякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ маємо $F(T) \subseteq C_k \cap Q_k$. Тоді існує єдина точка $x_{k+1} \in C_k \cap Q_k$ така, що $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x_0$. Із $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x_0$ випливає

$$(x_{k+1} - z, x_0 - x_{k+1}) \geq 0 \quad \forall z \in C_k \cap Q_k.$$

Оскільки $F(T) \subseteq C_k \cap Q_k$, то $F(T) \subseteq Q_{k+1}$. Таким чином, $F(T) \subseteq C_{k+1} \cap Q_{k+1}$.

Покажемо, що послідовність (x_n) обмежена. Існує єдина точка $z_0 \in F(T)$ така, що $z_0 = P_{F(T)} x_0$. Із $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0$ випливає

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|z - x_0\| \quad \forall z \in C_n \cap Q_n.$$

Оскільки $z_0 \in F(T) \subseteq C_n \cap Q_n$, то

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|z_0 - x_0\| \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{2.38}$$

Звідси випливає обмеженість (x_n).

Доведемо, що

$$\lim_{n \to \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \tag{2.39}$$

Із $x_{n+1} \in C_n \cap Q_n \subseteq Q_n$ та $x_n = P_{Q_n} x_0$ випливає

$$\|x_{n+1} - x_0\| \geq \|x_n - x_0\| \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Числова послідовність $(\|x_n - x_0\|)$ обмежена та неспадна. Тому існує скінченна границя $\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\|$. З іншого боку, оскільки $x_{n+1} \in Q_n$, то $(x_n - x_{n+1}, x_0 - x_n) \geq 0$ та

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+1}\|^2 = \|(x_n - x_0) - (x_{n+1} - x_0)\|^2 = \\ = \|x_n - x_0\|^2 - 2(x_n - x_0, x_{n+1} - x_0) + \|x_{n+1} - x_0\|^2 = \\ = \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2 - 2(x_n - x_{n+1}, x_0 - x_n) \leq \\ \leq \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2 . \end{aligned}$$

Звідси випливає (2.39).

Доведемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0. \tag{2.40}$$

Із $x_{n+1} \in C_n$ випливає

$$\begin{aligned} \|Tx_n - x_n\| = \frac{1}{1-\alpha_n} \|y_n - x_n\| \leq \frac{1}{1-\alpha_n} (\|y_n - x_{n+1}\| + \\ + \|x_{n+1} - x_n\|) \leq \frac{2}{1-\alpha_n} \|x_{n+1} - x_n\| . \end{aligned}$$

Урахувавши (2.39), отримуємо (2.40).

Розглянемо довільну підпослідовність (x_{n_k}), що слабко збігається до деякої точки $w_0 \in C$. Урахувавши демізамкненість оператора $I - T$ та (2.40), робимо висновок, що $w_0 \in F(T)$. Для $z_0 = P_{F(T)}x_0$ із (2.38) випливає

$$\begin{aligned} \|x_0 - z_0\| \leq \|x_0 - w_0\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_0 - x_{n_k}\| \leq \\ \leq \limsup_{k\to\infty} \|x_0 - x_{n_k}\| \leq \|x_0 - z_0\| . \end{aligned}$$

Таким чином, ми отримали

$$\lim_{k\to\infty} \|x_0 - x_{n_k}\| = \|x_0 - w_0\| = \|x_0 - z_0\| .$$

Звідси $x_{n_k} \to w_0 = z_0$. Отже, $x_n \to z_0$.

Має місце

Теорема 38 (Накадзьо – Такахасі [50]). *Породжена алгоритмом 3 послідовність* (x_n) *сильно збігається до точки* $z_0 = P_{F(T)}x_0$.

2.2.6. Метод зовнішніх апроксимацій

Нехай $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H, $T : C \to H$ — нерозтягуючий оператор. Припустимо, що $F(T) \neq \emptyset$.

Алгоритм 4. *Для заданого* $x_0 = x \in C$ *генеруємо послідовність елементів* $x_n \in C$ *за допомогою ітераційної схеми:*

$$\begin{cases} x_1 \in C, \ \ C_1 = C, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, \end{cases}$$

де (α_n) *— послідовність чисел із* $[0, \alpha]$ *для деякого* $\alpha \in [0,1)$.

Припустимо, що $C_n \neq \emptyset$ та $F(T) \subseteq C_n$. Маємо

$$\|y_n - z\| \leq \alpha_n \|x_n - z\| + \\ + (1-\alpha_n)\|Tx_n - z\| \leq \|x_n - z\| \quad \forall z \in F(T).$$

Отже, $F(T) \subseteq C_{n+1}$. Отримали ланцюжок вкладень

$$C = C_1 \supseteq ... \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq ... \supseteq F(T) \neq \emptyset$$

і коректність визначення послідовності (x_n).

Нехай $z_0 = P_{F(T)}x_0$. Має місце нерівність

$$\|x_n - x_0\| = \min_{y \in C_n} \|y - x_0\| \leq \min_{y \in C_{n+1}} \|y - x_0\| = \\ = \|x_{n+1} - x_0\| \leq \min_{y \in F(T)} \|y - x_0\| = \|z_0 - x_0\|. \quad (2.41)$$

Отже, існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|$.

Для $k > l$ маємо

$$\|x_k - x_l\|^2 = \|x_k - x_0\|^2 - \|x_l - x_0\|^2 + 2\,(x_0 - x_l, x_k - x_l)\,.$$

Урахувавши $x_l = P_{C_l} x_0$ та $x_k \in C_l$, отримаємо

$$\|x_k - x_l\|^2 \le \|x_k - x_0\|^2 - \|x_l - x_0\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad k > l \to \infty.$$

Отже, послідовність (x_n) фундаментальна. Таким чином, існує елемент $x \in C$ такий, що $x_n \to x$.

Покажемо, що $x \in F(T)$. Оскільки $x_{n+1} \in C_{n+1}$, то

$$\|Tx_n - x_n\| = \frac{1}{1-\alpha_n}\,\|y_n - x_n\| \le \frac{1}{1-\alpha_n}\,(\|y_n - x_{n+1}\| + \\ + \|x_{n+1} - x_n\|) \le \frac{2}{1-\alpha_n}\,\|x_{n+1} - x_n\| \to 0.$$

З неперервності оператора T випливає рівність $Tx = x$.

Здійснивши граничний перехід у (2.41), отримаємо

$$\|x - x_0\| \le \min_{y \in F(T)} \|y - x_0\|\,.$$

Звідси $x = z_0 = P_{F(T)} x_0$.

Таким чином, має місце

Теорема 39 (Такахасі – Такеучі – Куботи [60])**.** *Породжена алгоритмом 4 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $z_0 = P_{F(T)} x_0$.*

Зауваження 21. Для інформації про подальший розвиток ітераційних методів цього типу рекомендуємо ознайомитись із роботами [29, 30].

2.2.7. Пошук спільної точки опуклих множин

Розглянемо скінченний набір замкнених опуклих множин C_1, C_2,..., C_r. Для $x_0 \in H$ визначимо послідовність (x_n) за таким правилом:

$$x_0 \overset{P_{C_1}}{\mapsto} x_1 \overset{P_{C_2}}{\mapsto} x_2 \overset{P_{C_3}}{\mapsto} x_3 \overset{P_{C_4}}{\mapsto} ... \overset{P_{C_r}}{\mapsto} x_r \overset{P_{C_1}}{\mapsto} x_{r+1} \overset{P_{C_2}}{\mapsto} ..., \qquad (2.42)$$

тобто

$$x_{n+1} = P_{C_{n \bmod r+1}} x_n.$$

Має місце

Теорема 40 (Л. Брегмана)**.** *Нехай C_1,..., $C_r \subseteq H$ — замкнені опуклі множини з непорожнім перетином. Тоді*

$$x_n \rightharpoonup \bar{x} \in \cap_{i=1}^r C_i \ \ \textit{при} \ n \to \infty.$$

Доведення. Нехай $x \in \cap_{i=1}^r C_i$. Позначимо через (y_k^i) підпослідовність (x_{kr+i}), де $i \in \{1, ..., r\}$. Із означення метричної проекції випливають нерівності

$$\|x_0 - x\| \geq \|x_1 - x\| \geq \|x_2 - x\| \geq \|x_3 - x\| \geq ... \geq 0.$$

Отже, послідовність (x_n) обмежена та існує границя $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|$. Зокрема, обмеженою є послідовність (y_k^1). Тому існує така підпослідовність $(y_{k_l}^1)$, що $y_{k_l}^1 \rightharpoonup \bar{x} \in H$ $(l \to \infty)$. Оскільки $y_{k_l}^1 \in C_1$, а множина C_1 слабко замкнена, то $\bar{x} \in C_1$. Для $y_{k_l}^2 = P_{C_2} y_{k_l}^1$ маємо

$$\left\|y_{k_l}^1 - y_{k_l}^2\right\|^2 \leq \left\|y_{k_l}^1 - x\right\|^2 - \left\|y_{k_l}^2 - x\right\|^2.$$

Тому $\lim_{l\to\infty} \left\|y_{k_l}^1 - y_{k_l}^2\right\| = 0$. Звідси $y_{k_l}^2 \rightharpoonup \bar{x}$. Отримали, що $\bar{x} \in C_2$. Продовжуючи аналогічно, доходимо висновку, що має місце включення $\bar{x} \in \cap_{i=1}^r C_i$.

Залишилось показати, що вся послідовність (x_n) слабко збігається до $\bar{x}$. Доводимо від супротивного. Припустимо, що (x_n) не збігається слабко до $\bar{x}$. Тоді існує така підпослідовність (x_{n_j}), що $x_{n_j} \rightharpoonup \tilde{x} \neq \bar{x}$ $(j \to \infty)$. Підпослідовність (x_{n_j}) містить принаймні одну підпослідовність вигляду $(y_{k_l}^i)$ для деякого

$i \in \{1, ..., r\}$. Міркуючи як і раніше, отримаємо $\tilde{x} \in \cap_{i=1}^{r} C_i$. Розглянемо числову послідовність

$$\alpha_n = \|x_n - \bar{x}\|^2 - \|x_n - \tilde{x}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 - \|\tilde{x}\|^2 + 2(x_n, \tilde{x} - \bar{x}).$$

Послідовність (α_n) збіжна. Нехай $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$. З одного боку, розглянувши підпослідовність (α_{n_j}), отримаємо

$$\alpha = \|\bar{x} - \tilde{x}\|^2 .$$

З іншого, розглянувши $(y_{k_l}^1)$, отримаємо

$$\alpha = -\|\bar{x} - \tilde{x}\|^2 .$$

Таким чином, $\alpha = 0$ та $\bar{x} = \tilde{x}$. □

Має місце

Теорема 41. *Нехай E_1,..., $E_r \subseteq H$ — замкнені афінні підпростори з непорожнім перетином. Тоді для всіх $x \in H$*

$$(P_{E_r} ... P_{E_2} P_{E_1})^n x \to P_{\cap_{i=1}^{r} E_i} x \quad \textit{при} \ n \to \infty.$$

Опишемо тепер метод усереднених проекцій знаходження спільної точки скінченного набору замкнених опуклих множин C_1, C_2,..., C_r. Для $x_0 \in H$ будуємо послідовність (x_n) за правилом:

$$x_{n+1} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} P_{C_i} x_n. \tag{2.43}$$

Обчислення проекцій у (2.43) можна організувати паралельно.

Має місце

Теорема 42. *Нехай C_1, C_2,..., $C_r \subseteq H$ — замкнені опуклі множини з непорожнім перетином, (x_n) — послідовність,* *побудована методом усереднених проекцій* (2.43). *Тоді*

$$x_n \rightharpoonup \bar{x} \in \cap_{i=1}^r C_i \quad \textit{при } n \to \infty.$$

Доведення. Розглянемо гільбертовий простір

$$\mathcal{H} = \underbrace{H \times H \times ... \times H}_{r}$$

зі скалярним добутком $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^r (x_i, y_i)$. Задамо множини:

$$\begin{aligned} &\mathcal{C} = \{\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_r) \in \mathcal{H} : \ x_i \in C_i\}, \\ &\mathcal{D} = \{(x, x, ..., x) \in \mathcal{H} : \ x \in H\}. \end{aligned}$$

Множина $\mathcal{C}$ — опукла та замкнена, а $\mathcal{D}$ — замкнений лінійний підпростір. Більш того, $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ тоді й тільки тоді, коли $\cap_{i=1}^r C_i \neq \emptyset$. Неважко переконатись у правильності формул:

$$\begin{aligned} &P_{\mathcal{C}} \vec{x} = (P_{C_1} x_1, P_{C_2} x_2, ..., P_{C_r} x_r), \\ &P_{\mathcal{D}} \vec{x} = (x, x, ..., x), \ \text{ де } x = \tfrac{\sum_{i=1}^r x_i}{r}. \end{aligned}$$

Для $\vec{x} = (x, x, ..., x) \in \mathcal{D}$ розглянемо $P_{\mathcal{D}} P_{\mathcal{C}} \vec{x}$. Маємо

$$P_{\mathcal{D}} P_{\mathcal{C}} \vec{x} = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r P_{C_i} x, \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r P_{C_i} x, ..., \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r P_{C_i} x \right).$$

Застосувавши теорему 40 для послідовності $\vec{x}_{n+1} = P_{\mathcal{D}} P_{\mathcal{C}} \vec{x}_n$, $\vec{x}_0 = (x_0, x_0, ..., x_0) \in \mathcal{H}$, отримаємо потрібне. □

Зауваження 22. Якщо додатково C_1, C_2,..., $C_r \subseteq H$ — замкнені афінні підпростори з непорожнім перетином, то $x_n \to P_{\cap_{i=1}^r C_i} x_0$ при $n \to \infty$, де (x_n) — послідовність, побудована методом усереднених проекцій (2.43).

2.3. Теорема про неявну функцію у просторах Фреше

Цей підрозділ присвячений застосуванню теорії сильних узагальнено-обернених операторів при дослідженні нелінійних операторних рівнянь [4].

Задачі математичної фізики часто зводяться до розв'язання нелінійних рівнянь чи систем рівнянь вигляду $\mathcal{F}(x,h)=0$, де $\mathcal{F}(x,h)$ — нелінійний оператор, визначений і неперервний (достатньо гладкий, аналітичний) в околі $w=w(x_0,h_0)\subset E_1+E$ відомого розв'язку $x=x_0$ при $h=h_0$ зі значеннями в E_2, а E_1,E_2,E — простори Фреше, Банаха або Гільберта. Необхідно побудувати розв'язок $x=x(h)$ рівняння в околі w точки (x_0,h_0). Якщо похідна Фреше $\mathcal{F}_x(x_0,h_0)$ існує та є оборотним оператором, то в околі w, як випливає з класичної теореми про неявну функцію [20], існує єдиний неперервний (гладкий, аналітичний) розв'язок $x=x_0+y(h-h_0)$. Теорія розгалуження [6, 17] розглядає питання про існування й кількість малих розв'язків $y(h-h_0)$, а також побудову їхньої асимптотики за малим параметром $h-h_0$ у тому випадку, коли оператор $Q=-\mathcal{F}_x(x_0,h_0)$ має нетривіальний підпростір нулів $N(Q)$, тобто не виконуються припущення класичної теореми про неявну функцію. За цих умов у околі $w(x_0,h_0)$ може існувати кілька розв'язків чи сімей розв'язків, залежних від одного або кількох вільних параметрів; (x_0,h_0) називається тоді точкою розгалуження розв'язків рівняння. Надалі будемо для зручності вважати, що $x_0=0,h_0=0$. Тоді вихідне рівняння можна записати у вигляді $Qx=hR(x,h)$, $R(0,0)=0$, у припущенні на нелінійність: $R_x(0,0)=0$. Якщо $h=\lambda$ — числовий параметр і за всіх можливих значень λ: $R(0,\lambda)=0$, то отримане рівняння називається задачею про точки біфуркації. Точками біфуркації є ті значення параметра λ, в околі яких існують нетривіальні розв'язки рівняння. Основи теорії розгалуження функціональних рівнянь було закладено ще на початку XX ст. у роботах О. М. Ляпунова й Е. Шмідта. Дослідження О. М. Ляпунова були пов'язані з відомою задачею про рівноважні фігури, а Е. Шмідта — із загальною теорією лінійних і нелінійних інтегральних рівнянь. Зазначимо також, що якщо $N(Q)$ скінченновимірне, то в такому випадку ця задача досліджувалась у [39] за допомогою леми Шмідта для фредгольмових та нетерових операторів. Метод, що застосовується при розв'язанні задач теорії розгалуження, дістав назву методу Ляпунова – Шмідта. Інші теореми про неявні функції було отримано в роботах [51, 52], а також [14, 20, 37, 45].

Роглянемо нелінійне рівняння

$$\mathcal{F}(x,h) = 0 \tag{2.44}$$

за умови, що його можна переписати у вигляді

$$Qx = hR(x,h) \tag{2.45}$$

у просторах Фреше E_1 та E_2 з нелінійністю $R(x,h)$, що задовольняє умову $R(0,0) = 0$, $R_x(0,0) = 0$ (похідна в сенсі Фреше за першою змінною). Задача полягає у відшуканні такого розв'язку $x = x(h)$, який при $h = 0$ обертається на один з розв'язків породжувальної задачі $Qx = 0$ і визначений та неперервний у околі цього розв'язку.

Спочатку розглянемо випадок, коли оператор Q такий, що пара (X, Y) є Q-допустимою, згідно із означенням 17. Тоді розв'язок породжувальної задачі може бути зображений у вигляді $x = P_{N(Q)}c$. Знайдемо необхідну умову існування розв'язку нелінійного рівняння.

Теорема 43 (необхідна умова)**.** *Нехай рівняння (2.45) має розв'язок $x = x(h)$, який при $h = 0$ обертається на один з розв'язків $x(0) = P_{N(Q)}c$ з елементом $c = c_0$. Тоді c_0 має задовольняти рівняння для породжувальних елементів*

$$F(c) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c, 0) = 0. \tag{2.46}$$

Доведення. Припустимо, що нелінійне рівняння має розв'язок $x = x(h)$, який обертається на один з розв'язків породжувального рівняння $x(0) = P_{N(Q)}c_0$, коли $h = 0$. Підставимо цей розв'язок у рівняння (2.45) і запишемо умову розв'язності: $P_{N(Q^*)}R(x(h), h) = 0$. Перейдемо до границі, коли $h \to 0$. Використовуючи при цьому неперервність R у околі породжувального розв'язку, отримаємо (2.46). $\square$

Знайдемо достатню умову існування розв'язку нелінійного рівняння. Для її отримання будемо вимагати додаткової гладкості від нелінійності R в околі породжувального розв'язку.

Нехай елемент $c = c_0$ задовольняє рівняння для породжувальних елементів (2.46). Зробимо заміну змінних $x(h) = P_{N(Q)}c_0 + y(h)$. Тоді рівняння (2.45) перепишемо у вигляді

$$Qy(h) = hR(P_{N(Q)}c^0 + y(h), h). \tag{2.47}$$

Відображення $y(h)$ задовольняє умову $y(0) = 0$. Виділимо у (2.47) лінійну частину в околі породжувального розв'язку

$$R(P_{N(Q)}c_0 + y(h), h) = R(P_{N(Q)}c_0, 0) + \\ + ly(h) + \mathcal{R}(y(h), h), \tag{2.48}$$

$$ly(h) = R_x(P_{N(Q)}c_0, 0),$$

і запишемо умову розв'язності для рівняння (2.47):

$$P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0 + y(h), h) = 0.$$

За виконання цієї умови рівняння (2.47) буде мати розв'язки у вигляді

$$y(h) = \overline{y}(h) + P_{N(Q)}c(h),$$

де

$$\overline{y}(h) = G[y(h)] := Q^- R(P_{N(Q)}c_0 + y(h), h).$$

Підставивши цей вираз в умову розв'язності й урахувавши зображення (2.48) та умову (2.46), отримаємо операторне рівняння відносно $c(h)$: $B_0 c(h) = g(h)$, де $B_0 = P_{N(Q^*)} l P_{N(Q)}$, $g(h) = -P_{N(Q^*)} l\overline{y}(h) - P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(y(h), h)$. За виконання умови $P_{N(Q_0^*)} P_{N(Q^*)} = 0$ це рівняння буде розв'язним з одним із розв'язків у вигляді $c(h) = B_0^- g(h)$. Тоді ми отримаємо таку операторну систему відносно $y(h), c(h), \overline{y}(h)$:

$$\begin{cases} y(h) = P_{N(Q)} c(h) + \overline{y}(h), \\ c(h) = -B_0^- P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y(h), h) + l\overline{y}(h)\}, \\ \overline{y}(h) = G[y(h)], \end{cases}$$

яку перепишемо у вигляді

$$u(h) = Lu(h) + g(h), \tag{2.49}$$

де $u(h) = (y(h), c(h), \overline{y}(h))^T$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & P_{N(Q)} & I \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, g(h) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_1(h) \\ g_2(h) \end{pmatrix},$$

де

$$L_1 z = -B_0^- P_{N(Q^*)} l z,$$

$$g_1(h) = -B_0^- P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(y(h), h),\ g_2(h) = G[y(h)].$$

Тоді $u(h) = (I - L)^{-1} g(h) = \mathcal{S}(h) u(h)$, де

$$\mathcal{S}(h) u(h) = (I - L)^{-1} g(h) = \begin{pmatrix} I & P_{N(Q)} & P_{N(Q)} L_1 + I \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} g(h),$$

$$\mathcal{S}(h)\begin{bmatrix} y(h) \\ c(h) \\ \overline{y}(h) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -P_{N(Q)} B_0^- P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(y(h), h) - \\ -P_{N(Q)} B_0^- P_{N(Q^*)} l G[y(h)] + G[y(h)], \\ -B_0^- P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(y(h), h) - B_0^- P_{N(Q^*)} l G[y(h)], \\ G[y(h)] \end{pmatrix}.$$

За рахунок малості h завжди можна досягти того, щоб оператор $\mathcal{S}(h)$ був стискаючим. Скориставшись принципом стискаючих відображень [20], отримаємо таку теорему.

Теорема 44 (достатня умова)**.** *Нехай оператори B_0, Q узагальнено-оборотні та $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$. Тоді для довільного елемента $c = c_0$, що задовольняє рівняння для породжувальних елементів (2.46), існує неперервний розв'язок рівняння (2.45). Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу*

$$\begin{cases} y_{k+1}(h) = P_{N(Q)}c_k(h) + \overline{y}_k(h), \\ c_{k+1}(h) = -B_0^- P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y_k(h), h) + l\overline{y}_k(h)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(h) = G[y_k(h)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(h), h) = R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(h), h) - R(P_{N(Q)}c_0, 0) - ly_k(h),$$

$$x_k(h) = P_{N(Q)}c_0 + y_k(h), \quad x(h) = \lim_{k\to\infty} x_k(h),$$

$$G[y_k(h)] = B^- R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(h), h),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0, 0) = 0$$

для $y_0(h) = 0, c_0(h) = 0, \overline{y}_0(h) = 0.$

З'ясуємо зв'язок між необхідною та достатньою умовами. Спочатку доведемо таке твердження.

Наслідок 9. *Нехай $F(c)$ має похідну Фреше для кожного елемента $c = c_0$ простору E_1, що задовольняє рівняння для породжувальних елементів (2.46). Якщо похідна Фреше $F^{(1)}(c_0)$ має обмежений обернений оператор, то рівняння (2.45) має єдиний розв'язок для кожного c_0.*

Доведення. Розглянемо різницю

$$F(c_0 + h) = F(c_0 + h) - F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}(c_0 + h), h)-$$

$$-P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0, 0) = P_{N(Q^*)}lP_{N(Q)}h+$$

$$+P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(P_{N(Q)}h, h) = B_0[h] + P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(P_{N(Q)}h, h).$$

Звідси випливає, що $B_0 = F^{(1)}(c_0)$. З оборотності $F^{(1)}(c_0)$ дістаємо потрібне. □

Таким чином, умова оборотності оператора B_0 пов'язує між собою необхідну й достатню умови. У скінченновимірному випадку ця умова еквівалентна умові простоти кореня.

Зробимо деякі зауваження щодо посилення результатів.

Використовуючи поняття сильного узагальнено-оберненого оператора, можна довести більш загальне твердження, ніж у теоремі 44.

Теорема 45. *Нехай виконуються умови: 1) Q, B_0 — сильні (X_1, Y_1)-, (X_2, Y_2)-узагальнено-оборотні оператори, відповідно; 2) $P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)} = 0$. Тоді для довільного елемента $c = c_0$, що задовольняє рівняння для породжувальних елементів (2.46), існує неперервний узагальнений розв'язок $x(h)$ рівняння (2.45). Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу*

$$\begin{cases} y_{k+1}(h) = P_{N(Q)} c_k(h) + \overline{y}_k(h), \\ c_{k+1}(h) = -B^-_{0X_2,Y_2} P_{N(Q^*)} \{\mathcal{R}(y_k(h), h) + l\overline{y}_k(h)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(h) = G[y_k(h)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(h), h) = R(P_{N(Q)} c_0 + y_k(h), h) - R(P_{N(Q)} c_0, 0) - l y_k(h),$$

$$x_k(h) = P_{N(Q)} c_0 + y_k(h), \quad x(h) = \lim_{k\to\infty} x_k(h),$$

$$G[y_k(h)] = Q^-_{X_1,Y_1} R(P_{N(Q)} c_0 + y_k(h), h),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)} R(P_{N(Q)} c_0, 0) = 0$$

для $y_0(h) = 0, c_0(h) = 0, \overline{y}_0(h) = 0$; $B^-_{0X_1,Y_1}, B^-_{X_2,Y_2}$ — сильні узагальнено-обернені оператори.

Зауваження 23. Техніка доведення не відрізняється від доведення теореми 44, але теорема 45 є більш загальною за рахунок того, що умова замкненості множини значень оператора Q не припускається.

Розглянемо тепер те саме рівняння, але визначене у просторах Гільберта $E_1 = H_1$, $E = H$, $E_2 = H_2$. Геометрія цих просторів багатша, і, як випливає з результатів, отриманих вище, довільний лінійний обмежений оператор має сильний псевдообернений. Зважаючи на це, отримаємо наслідок.

Наслідок 10. *Нехай $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$. Тоді для довільного елемента $c = c_0$, що задовольняє рівняння для породжувальних елементів (2.46), існує неперервний узагальнений розв'язок $x(h)$ рівняння (2.45). Цей розв'язок можна знайти за допомогою ітераційного процесу*

$$\begin{cases} y_{k+1}(h) = P_{N(Q)}c_k(h) + \overline{y}_k(h), \\ c_{k+1}(h) = -\overline{B}_0^+ P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y_k(h), h) + l\overline{y}_k(h)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(h) = G[y_k(h)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(h), h) = R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(h), h) - R(P_{N(Q)}c_0, 0) - ly_k(h),$$

$$x_k(h) = P_{N(Q)}c_0 + y_k(h), \quad x(h) = \lim_{k\to\infty} x_k(h),$$

$$G[y_k(h)] = \overline{Q}^+ R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(h), h),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0, 0) = 0,$$

збіжного для довільних початкових значень $y_0(h)$, $c_0(h)$, $\overline{y}_0(h)$; $\overline{B}_0^+$, $\overline{Q}^+$ — сильні псевдообернені за Муром – Пенрозом оператори.

Розділ 3

Різницеві операторні рівняння

У цьому розділі досліджуються умови існування обмежених і періодичних розв'язків операторних різницевих рівнянь та алгоритми їх побудови. Розвинена техніка узагальнено-обернених та псевдообернених операторів у теорії крайових задач дає можливість досліджувати такі проблеми. Теорія різницевих рівнянь є добре розробленою в регулярному випадку [7, 31], коли задача має єдиний розв'язок. Нижче розглядаються також нерегулярні задачі.

3.1. Періодичні розв'язки різницевих рівнянь

Отримаємо необхідну та достатню умови існування періодичних розв'язків різницевих рівнянь із використанням поняття відносного спектра лінійного обмеженого оператора в просторі Банаха та ергодичної теореми.

Нехай $\mathbf{B}$ — комплексний простір Банаха з нормою $||\cdot||$ та нульовим елементом $\overline{0}$; $\mathcal{L}(\mathbf{B})$ — простір Банаха лінійних обмежених операторів із $\mathbf{B}$ у $\mathbf{B}$. Будемо розглядати задачу про існування періодичних розв'язків рівняння

$$x_{n+1} = \lambda A_{n+1} x_n + h_{n+1}, \quad n \geq 0 \tag{3.1}$$

з умовою періодичності

$$x_0 = x_m, \tag{3.2}$$

де $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{B})$, $A_{n+m} = A_n$ для кожного $n \geq 0$, λ — комплексний параметр, $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ — послідовність у $\mathbf{B}$. Розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд [42]

$$x_m(\lambda) = \Phi(m, n, \lambda) x_n(\lambda), \quad m \geq n,$$

де

$$\Phi(m, n, \lambda) = \lambda^{m-n} A_{m+1} A_m ... A_{n+1}, \quad m > n$$

— еволюційний оператор задачі (3.1); $\Phi(m, m, \lambda) = I$, де I — тотожний оператор. Введемо оператори

$$U(m, \lambda) = \Phi(m, 0, \lambda), \quad U(0, \lambda) = I.$$

Маємо

$$U(k + n, \lambda) = U(k, \lambda) U(n, \lambda).$$

Оператор $U(m, \lambda)$ традиційно будемо називати оператором монодромії.

Розв'язок рівняння (3.1) з довільною початковою умовою $x(0, \lambda) = x_0, x_0 \in \mathbf{B}$ може бути зображений у вигляді

$$x_k(\lambda) = \Phi(k, 0, \lambda) x_0 + g(k, \lambda),$$

де

$$g(k, \lambda) = \sum_{i=0}^{k} \Phi(k, i, \lambda) h_i.$$

Підставляючи це зображення в крайову умову (3.2), отримаємо операторне рівняння

$$x_0(\lambda) - x_m(\lambda) = x_0 - \Phi(m, 0, \lambda)x_0 - g(m, \lambda) = \overline{0}.$$

Згідно із позначеннями отримаємо операторне рівняння

$$(I - U(m, \lambda))x_0 = g(m, \lambda). \tag{3.3}$$

Крайова задача (3.1), (3.2) має періодичний розв'язок тоді й тільки тоді, коли операторне рівняння (3.3) розв'язне.

Як і в [5], будемо називати точку λ точкою стійкості праворуч, якщо степені оператора монодромії задовольняють нерівність $\{||U^n(m, \lambda)|| \leq c, n \geq 0\}$ з деякою сталою $c > 0$.

Позначимо $\rho_{NS}(I - U(m, \lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : R(I - U(m, \lambda)) = \overline{R(I - U(m, \lambda))}\}$. Резольвентна множина $\rho(I - U(m, \lambda))$ оператора $I - U(m, \lambda)$ є підмножиною $\rho_{NS}(I - U(m, \lambda))$.

Далі для простоти викладення будемо припускати, що простір $\mathbf{B}$ є рефлексивним [11]. Позначимо через

$$U_0(m, \lambda) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U^k(m, \lambda)}{n}$$

проектор на ядро $I - U(m, \lambda)$, що є усередненим до степенів оператора монодромії.

Метою даного підрозділу є доведення такого твердження.

Теорема 46. *Нехай $\lambda \in \rho_{NS}(I - U(m, \lambda))$ — точка стійкості праворуч для рівняння (3.1). Тоді:*

а) крайова задача (3.1), (3.2) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли послідовність $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}, h_n \in \mathbf{B}$ задовольняє умову

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} U^k(m, \lambda)\Phi(m, i, \lambda)h_i}{n} = 0; \tag{3.4}$$

б) за виконання умови (3.4), розв'язки крайової задачі

(3.1), (3.2) мають вигляд

$$x_n(\lambda) = U(n,\lambda)U_0(m,\lambda)c + U(n,\lambda)G(n,\lambda)[h_n], \qquad (3.5)$$

де c — довільний елемент простору Банаха $\mathbf{B}$, $G(n,\lambda)$ — узагальнений оператор Гріна крайової задачі (3.1), (3.2), який визначається рівністю

$$G(n,\lambda)[h_n] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(1-\mu)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(m,\lambda)-U_0(\lambda))^l\}^{k+1}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{m}\Phi(m,i,\lambda)h_i - U_0(\lambda)\sum_{i=0}^{m}\Phi(m,i,\lambda)h_i +$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\Phi(n,i,\lambda)h_i.$$

Сформулюємо допоміжний результат.

Лема 10. *Якщо $\lambda \in \rho_{NS}(I - U(m,\lambda))$, то крайова задача (3.1), (3.2) розв'язна тоді й тільки тоді, коли послідовність h_n задовольняє умову*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{m}U^k(m,\lambda)\Phi(m,i,\lambda)h_i}{n} = 0.$$

Доведення. З умов леми випливає, що виконано умови статистичної ергодичної теореми [11]. Тоді

$$R(I - U(m,\lambda)) = \{x \in \mathbf{B} : \lim_{n\to\infty} U_n(m,\lambda)x = \overline{0}\},$$

де

$$U_n(m,\lambda) = \frac{\sum_{k=1}^{n}U^k(m,\lambda)}{n}.$$

З цих міркувань випливає, що елемент $g(m,\lambda)$ належить множині значень оператора $I - U(m, \lambda)$ тоді й тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} U^k(m,\lambda)}{n} \sum_{i=0}^{m} \Phi(m,i,\lambda)h_i = 0,$$

що й доводить лему. □

Для того, щоб довести теорему, будемо використовувати зображення узагальнено-оберненого оператора до оператора $I - U(m,\lambda)$, отримані у першому розділі, у вигляді

$$(I - U(m,\lambda))^- = (I - U(m,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - U_0(\lambda) \qquad (3.6)$$

або збіжного операторного ряду

$$(I - U(m,\lambda))^- = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \{\sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (U(m,\lambda) - U_0(\lambda))^l\}^{k+1} - U_0(\lambda) \qquad (3.7)$$

для всіх $0 < \mu - 1 < \frac{1}{||R_\mu||}$.

Доведення теореми 46. Згідно із загальною теорією розв'язності лінійних рівнянь [39] отримаємо, що задача (3.1), (3.2) розв'язна для послідовності $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, яка задовольняє умову

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U^k(m,\lambda)}{n} g(m,\lambda) = 0.$$

Ця умова разом із лемою еквівалентна виконанню умови а) теореми 46.

За її виконання розв'язки задачі (3.1), (3.2) мають вигляд

$$x_n = U(n,\lambda)U_0(\lambda)c + U(n,\lambda)(I - U(m,\lambda))^- g(m,\lambda) + g(n,\lambda) =$$

$$= U(n,\lambda)U_0(\lambda)c + U(n,\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \times$$

$$\times\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(m,\lambda)-U_0(\lambda))^l\}^{k+1}g(m,\lambda)-$$

$$-U(n,\lambda)U_0(\lambda)g(m,\lambda)+g(n,\lambda),$$

що разом із позначеннями рівносильно зображенню б). $\square$

Зауваження 24. Припустимо, що $A_k^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbf{B})$ існує для всіх $k=\overline{0,m-1}$. Тоді справедлива рівність $\Phi(k,i,\lambda)=U(k,\lambda)U^{-1}(i,\lambda), k>i$. Вона дає можливість зображувати розв'язки рівняння (3.1), (3.2), використовуючи лише сім'ю операторів та їх обернених.

Проілюструємо твердження, доведені вище, на прикладі двовимірної системи.

1) Розглянемо рівняння

$$\overrightarrow{x}_{n+1}=\lambda A_{n+1}\overrightarrow{x}_n+\overrightarrow{h}_{n+1},\quad n\geq 0, \tag{3.8}$$

з умовою періодичності

$$\overrightarrow{x}_3=\overrightarrow{x}_0, \tag{3.9}$$

де $\overrightarrow{x}_n=(x_n^1,x_n^2)^T, x_n^1,x_n^2\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{h}_n=(\frac{3\sqrt{3}r}{4\pi},0)^T$,

$$A_n=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad\forall n\geq 0.$$

Легко побачити, що

$$\overrightarrow{x}_3=\lambda^3\overrightarrow{x}_0+g(3,\lambda), \tag{3.10}$$

де

$$g(3,\lambda)=(\frac{-3\sqrt{3}r\lambda-3\sqrt{3}r\lambda^2+6\sqrt{3}r}{8\pi},\frac{9r\lambda-9r\lambda^2}{8\pi})^T.$$

Для всіх $k \geq 0$

$$U(3k+1,\lambda) = \lambda^{3k+1} A_2, U(3k+2,\lambda) = \lambda^{3k+2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$U(3k+3,\lambda) = \lambda^{3k+3} I.$$

Підставляючи умову періодичності (3.9) у (3.10), отримаємо рівняння відносно $\overrightarrow{x}_0$:

$$(1-\lambda^3)\overrightarrow{x}_0 = g(3,\lambda). \tag{3.11}$$

Розглянемо випадок, коли $\lambda = 1$. У такому випадку рівняння (3.11) обертається на $0\overrightarrow{x}_0 = (0,0)^T$, яке справджується для довільно початкового вектора $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Ясно, що $U^n(1,1) = U(n,1)$ та $U_0(1) = I$. Згідно із теоремою 46 усі періодичні розв'язки рівняння (3.8) мають вигляд

$$\begin{pmatrix} x_n^1(c_1,c_2) \\ x_n^2(c_1,c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3}n & \sin\frac{2\pi}{3}n \\ -\sin\frac{2\pi}{3}n & \cos\frac{2\pi}{3}n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{3r}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3}n \\ 0 \end{pmatrix}$$

для всіх $\overrightarrow{c} = (c_1,c_2)^T \in \mathbb{R}^2$.

2) Знайдемо періодичні розв'язки довільного періоду w у попередній задачі. Вони мають загальний вигляд

$$\overrightarrow{x}_n(c_1,c_2,w,r) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{w}n & \sin\frac{2\pi}{w}n \\ -\sin\frac{2\pi}{w}n & \cos\frac{2\pi}{w}n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{rw}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{w}n \\ 0 \end{pmatrix},$$

де c_1, c_2, w, r — параметри.

3.2. Розв'язки лінійних різницевих рівнянь у просторі Банаха, обмежені на всій цілочисловій осі

Доведемо теореми про необхідні та достатні умови існування обмежених на всій цілочисловій осі розв'язків різницевих рівнянь у просторі Банаха з нормально розв'язним оператором, а також побудуємо відповідні розв'язки.

Розглянемо рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n + h_n,\ n \in \mathbb{Z}, \tag{3.12}$$

де $A_n : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ — множина обмежених операторів, що мають обмежені обернені оператори та діють із простору Банаха $\mathbf{B}$ у себе. Припускаємо, що

$$A = (A_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{L}(\mathbf{B})),\ h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B}),$$

тобто

$$|||A||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} ||A_n|| < +\infty,\ |||h||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} ||h_n|| < +\infty.$$

Треба встановити умови існування обмежених розв'язків рівняння (3.12).

Поряд із (3.12) будемо розглядати однорідне рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n. \tag{3.13}$$

Зауважимо, що будь-який розв'язок однорідного рівняння володіє тією властивістю, що:

$$x_m = \Phi(m, n) x_n,\ \ m \geq n,$$

де $\Phi(m, n) = A_{m-1} A_{m-2} ... A_{n+1}$ при $m > n$, та $\Phi(m, m) = I$. Ясно, що $\Phi(m, 0) = A_{m-1} ... A_0$, $U(m) := \Phi(m, 0)$, $U(0) = I$.

Відображення $\Phi(m, n)$ називають еволюційним оператором задачі (3.13). Припустимо далі, що рівняння (3.13) є е-дихотомічним на півосях $\mathbb{Z}_+$ та $\mathbb{Z}_-$ відповідно із проекторами P та Q на просторі $\mathbf{B}$, тобто

$$\exists k_1 \geq 1;\ 0 < \lambda_1 < 1;\ \exists P(P^2 = P):$$

$$||U(n)PU^{-1}(m)|| \leq k_1 \lambda_1^{n-m},\ n \geq m$$

$$||U(n)(E-P)U^{-1}(m)|| \leq k_1 \lambda_1^{m-n},\ m \geq n$$

для всіх $m, n \in \mathbb{Z}_+$ (дихотомія на $\mathbb{Z}_+$);

$$\exists k_2 \geq 1;\ 0 < \lambda_2 < 1;\ \exists Q(Q^2 = Q):$$

$$||U(n)QU^{-1}(m)|| \leq k_2 \lambda_2^{n-m},\ n \geq m$$

$$||U(n)(E-Q)U^{-1}(m)|| \leq k_2 \lambda_2^{m-n},\ m \geq n$$

для всіх $m, n \in \mathbb{Z}_-$ (дихотомія на $\mathbb{Z}_-$).

Теорема 47. *Нехай однорідне рівняння є е-дихотомічним на півосях $\mathbb{Z}_+$ та $\mathbb{Z}_-$ із проекторами P та Q, відповідно, та оператор $D = P-(E-Q)$ — узагальнено-оборотний. Тоді для того, щоб існували обмежені на всій цілочисловій осі розв'язки рівняння (3.12), необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)h_k = 0. \tag{3.14}$$

Якщо умова (3.14) виконується, то обмежені розв'язки мають вигляд

$$x_n(c) = U(n)PP_{N(D)}c + (G[h])(n), \tag{3.15}$$

де

$$G[h](n) = U(n)Z(n),$$

$$Z(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} PU^{-1}(k+1)h_k - \\ -\sum_{k=n}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + \\ +PD^{-}[\sum_{k=0}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + \\ +\sum_{k=-\infty}^{-1} QU^{-1}(k+1)h_k], \ \ n \geq 0, \\ \sum_{k=-\infty}^{n-1} QU^{-1}(k+1)h_k - \\ -\sum_{k=n}^{-1}(E-Q)U^{-1}(k+1)h_k + \\ +(E-Q)D^{-}[\sum_{k=0}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + \\ +\sum_{k=-\infty}^{-1} QU^{-1}(k+1)h_k], \ \ n \leq 0, \end{cases}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на $\mathbb{Z}$ розв'язки з властивостями

$$(G[h])(0+0) - (G[h])(0-0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)h_k = 0,$$

$$(LG[h])(n) = h_n, \ n \in \mathbb{Z},$$

де

$$(Lx)(n) := x_{n+1} - A_n x_n : \ell_\infty(\mathbb{Z}, B) \to \ell_\infty(\mathbb{Z}, B),$$

$H(n+1) = P_{N(D^*)}QU^{-1}(n+1) = P_{N(D^*)}(E-P)U^{-1}(n+1)$, D^- — узагальнено-обернений оператор до оператора D, $P_{N(D)}$ та $P_{N(D^*)}$ — проектори, що проектують $\mathbf{B}$ на ядра $N(D)$ та $N(D^*)$ операторів D та D^*, відповідно.

Доведення. Загальний розв'язок задачі (3.12), обмежений на півосях, має вигляд

$$x_n(\xi) = \begin{cases} U(n)P\xi + \sum_{k=0}^{n-1} U(n)PU^{-1}(k+1)h_k - \\ -\sum_{k=n}^{+\infty} U(n)(E-P)U^{-1}(k+1)h_k, \ n \geq 0, \\ U(n)(E-Q)\xi + \\ +\sum_{k=-\infty}^{n-1} U(n)QU^{-1}(k+1)h_k - \\ -\sum_{k=n}^{-1}(E-Q)U^{-1}(k+1)h_k, \ n \leq 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Розв'язок, побудований таким чином, є обмеженим на півосях $(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_-)$. Дійсно, для всіх $n \geq 0$ маємо $A_n U(n)P\xi = A_n A_{n-1} ... A_0 P\xi = U(n+1)P\xi$. Тому $x_{n+1} = A_n x_n$, а отже, цей вираз задовольняє однорідне рівняння (3.13) на додатній півосі. Далі одержуємо

$$A_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} U(n)PU^{-1}(k+1)h_k - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=n}^{+\infty} U(n)(E-P)U^{-1}(k+1)h_k\right) + h_n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} U(n+1)PU^{-1}(k+1)h_k -$$
$$- \sum_{k=n}^{+\infty} U(n+1)(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + h_n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} U(n+1)PU^{-1}(k+1)h_k -$$
$$- \sum_{k=n+1}^{+\infty} U(n+1)(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + h_n -$$
$$- U(n+1)PU^{-1}(n+1)h_n - U(n+1)(E-P)U^{-1}(n+1)h_n =$$
$$= x_{n+1}(\xi).$$

Доведемо, що таким чином визначений розв'язок є обмеженим на півосях. Для цього оцінимо на $\mathbb{Z}_+$ ряди

$$||\sum_{k=0}^{n-1} U(n)PU^{-1}(k+1)h_k|| \leq |||h|||\sum_{k=0}^{n-1} ||U(n)PU^{-1}(k+1)|| \leq$$
$$\leq |||h|||\sum_{k=0}^{n-1} k_1\lambda_1^{n-k-1} = |||h|||k_1\lambda_1^n \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_1^{-(k+1)} =$$
$$= |||h|||k_1\lambda_1^n \frac{\frac{1}{\lambda_1}((\frac{1}{\lambda_1})^{n-1}-1)}{\frac{1}{\lambda_1}-1} < \infty$$

та

$$||\sum_{k=n}^{+\infty} U(n)(E-P)U^{-1}(k+1)h_k|| \le |||h|||\sum_{k=n}^{+\infty} k_1\lambda_1^{k+1-n} =$$

$$= k_1\lambda_1^{-n+1}|||h|||\sum_{k=n}^{+\infty}\lambda_1^k = k_1\lambda_1^{-n+1}\cdot\frac{\lambda_1^n}{1-\lambda_1} < \infty.$$

Аналогічно доводиться обмеженість розв'язку на $\mathbb{Z}_-$.

Знайдемо умову, за виконання якої розв'язок (3.16) буде обмеженим на всій осі цілих чисел. Це буде тоді й лише тоді, коли $x_{0+}(\xi) = x_{0-}(\xi)$. Підставивши відповідні вирази, отримаємо

$$P\xi - \sum_{k=0}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k = (E-Q)\xi + \sum_{k=-\infty}^{-1} QU^{-1}(k+1)h_k.$$

Розглянемо вектор

$$g = \sum_{k=0}^{+\infty}(E-P)U^{-1}(k+1)h_k + \sum_{k=-\infty}^{-1} QU^{-1}(k+1)h_k.$$

Дістали операторне рівняння

$$D\xi = g. \tag{3.17}$$

Оскільки D — нормально розв'язний оператор, то, як відомо з [39], необхідною й достатньою умовою розв'язності рівняння (3.17) є

$$P_{N(D^*)}g = 0. \tag{3.18}$$

Оскільки $DP_{N(D)} = 0$, то маємо, що $PP_{N(D)} = (E-Q)P_{N(D)}$. Аналогічно з того, що $P_{N(D^*)}D = 0$, маємо

$$P_{N(D^*)}Q = P_{N(D^*)}(E-P).$$

Ураховуючи це, умову (3.18) можна переписати таким чином:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_{N(D^*)} Q U^{-1}(k+1) h_k = 0,$$

або

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_{N(D^*)} (E-P) U^{-1}(k+1) h_k = 0.$$

Отже, згідно із позначеннями теореми умову (3.14) доведено. Якщо умова (3.14) виконується, то $\xi = D^{-}g + PP_{N(D)}c$ для всіх $c \in \mathbf{B}$. З безпосередньої підстановки ξ в зображення (3.16) випливає, що сім'я обмежених на всій осі $\mathbb{Z}$ розв'язків матиме вигляд (3.15). $\square$

Велику роль у теорії крайових задач відіграють нетерові, d-нормальні та n-нормальні оператори. Для таких операторів доведена теорема залишається справедливою, але з деякими уточненнями [23].

Теорема 48. *Нехай виконуються умови теореми 47 і обмежений оператор $D = P - (E - Q)$ є d-нормальним. Тоді для того, щоб існували обмежені на всій цілочисловій осі розв'язки рівняння (3.12), необхідно та достатньо, щоб виконувались d лінійно незалежних умов:*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_d(k+1) h_k = 0. \tag{3.19}$$

Якщо умова (3.19) виконується, то обмежені розв'язки мають вигляд (3.15), де

$$H_d(n) = [P_{N(D^*)} Q]_d U^{-1}(n) = [P_{N(D^*)}(E-P)]_d U^{-1}(n),$$

$$d \leq m \ (m = dimcoker D < \infty), d = dim(P_{N(D^*)} Q).$$

Доведення. Достатньо зауважити, що оператор $P_{N(D^*)}$ скінченновимірний (оскільки він є d-нормальним), і тому оператор $P_{N(D^*)}Q$ скінченновимірний $(R(P_{N(D^*)}Q) \subset R(P_{N(D^*)}))$. $\square$

Теорема 49. *Нехай виконуються умови теореми 47 та обмежений оператор $D = P - (E - Q)$ є n-нормальним. Тоді для того, щоб існували обмежені на всій цілочисловій осі розв'язки рівняння (3.12), необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова (3.14). Якщо умова (3.14) виконується, то рівняння (3.12) має r-параметричну множину обмежених розв'язків*

$$x_n(c_r) = U(n)[PP_{N(D)}]_r c_r + (G[h])(n), \tag{3.20}$$

де $r \leq n$ $(n = dimker(D))$.

Доведення. Оскільки D — n-нормальний оператор, то його ядро є скінченновимірним підпростором. Звідси випливає, що оператор $P_{N(D)}$ скінченновимірний, а тому й оператор $PP_{N(D)}$ скінченновимірний $((R(PP_{N(D)})) \subset R(P_{N(D)}))$. Якщо $dim\ N(D) = n$, то

$$dim(PP_{N(D)}B) = dim((E - Q)PP_{N(D)}) = r \leq n.$$

$\square$

Теорема 50. *Нехай виконуються умови теореми 47 та обмежений оператор $D = P - (E - Q)$ є нетеровим. Тоді для того, щоб існували обмежені на всій цілочисловій осі розв'язки рівняння (3.12), необхідно та достатньо, щоб виконувались d умов (3.19). Якщо умови (3.19) виконуються, то рівняння (3.12) має r-параметричну множину обмежених розв'язків*

$$x_n(c_r) = U(n)[PP_{N(D)}]_r c_r + (G[h])(n), \tag{3.21}$$

де $r \leq n$ $(n = dimker(D))$, $d \leq m$ $(m = dimcokerD)$.

Наслідок 11. *Нехай в умовах теореми 47* $[P, Q] = PQ - QP = 0$ *та* $PQ = Q$. *У такому випадку кажуть, що рівняння (3.13) є трихотомічним на* $\mathbb{Z}$ *і неоднорідне рівняння (3.12) має не менше одного розв'язку на* $\mathbb{Z}$ *для всіх* $h \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$.

Доведення. З того, що $P_{N(D^*)}D = 0$ та $DP = (P-(E-Q))P = QP = Q$, маємо $P_{N(D^*)}Q = P_{N(D^*)}DP = 0$. Звідси випливає розв'язність $\forall h \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$. $\square$

Наслідок 12. *Якщо в умовах теореми (47)* $[P, Q] = PQ - QP = 0$ *та* $PQ = Q = P$, *то неоднорідне рівняння (3.12) має єдиний обмежений на* $\mathbb{Z}$ *розв'язок для будь-якого* $h \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$.

Зауваження 25. У цьому випадку система є е-дихотомічною на всій осі $\mathbb{Z}$. У скінченновимірному випадку аналогічний результат добре відомий [42]. Теорема 47 за менших вимог дає можливість знаходити не один обмежений розв'язок, а цілу множину таких розв'язків.

3.3. Розв'язки лінійних слабко збурених різницевих рівнянь у просторі Банаха, обмежені на всій осі цілих чисел

У цьому підрозділі доведемо достатню умову існування обмежених на всій цілочисловій осі розв'язків слабко збуреного різницевого рівняння в просторі Банаха з нормально розв'язним узагальнено-оборотним оператором [24, 39].

Будемо розглядати слабко збурене різницеве рівняння вигляду

$$x_{n+1} = A_n x_n + \varepsilon B_n x_n + h_n, \;\; n \in \mathbb{Z}, \tag{3.22}$$

де $A_n : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ — множина обмежених операторів, що мають обмежені обернені та діють із простору Банаха $\mathbf{B}$ у себе; $h \in$

$\ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$ — послідовність векторів із $\mathbf{B}$; B_n — сім'я обмежених операторів, що задовольняє такі умови, як і сім'я A_n; $\varepsilon < 1$ — достатньо малий параметр. Покладемо

$$|||A||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|A_n\| < +\infty, \ \ |||h||| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|h_n\| < +\infty.$$

Поряд із (3.22) будемо розглядати породжувальне рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n + h_n, \ \ n \in \mathbb{Z} \tag{3.23}$$

та однорідне рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n, \ \ n \in \mathbb{Z}. \tag{3.24}$$

Обґрунтуємо модифікований метод Вішика – Люстерніка для знаходження обмежених на всій цілочисловій осі розв'язків за умов, коли рівняння (3.23) не має розв'язків, обмежених на всій цілочисловій осі.

Для формулювання й доведення основного результату будемо використовувати позначення та результати теореми 47 із попереднього підрозділу. Покажемо, що задача про відшукання розв'язку рівняння (3.22), обмеженого на всій цілочисловій осі, може бути розв'язана за допомогою оператора

$$B_0 := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1) B_k U(k) P P_{N(D)}.$$

Теорема 51. *Нехай однорідне рівняння (3.24) є е-дихотомічним на півосях $\mathbb{Z}_+$ та $\mathbb{Z}_-$ із проекторами P та Q, відповідно, оператор $D = P - (E - Q)$ має узагальнено-обернений D^-. Припустимо, що: 1) B_0 — нормально розв'язний оператор; 2) $P_{N(B_0^*)} P_{N(D^*)} Q = 0$. Якщо рівняння (3.23) не має обмежених на всій цілочисловій осі розв'язків для послідовності $h \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$, то рівняння (3.22) має принаймні один* *обмежений розв'язок у вигляді частини ряду*

$$x_n(\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i x_n^{(i)}, \tag{3.25}$$

де $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ *достатньо мале.*

Доведення. Підставимо формально ряд (3.25) у рівняння (3.22) та прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях ε. При ε^{-1} маємо рівняння

$$x_{n+1}^{(-1)} = A_n x_n^{(-1)}.$$

Виходячи з того, що за умов теореми однорідне рівняння є е-дихотомічним на півосях, випишемо множину обмежених розв'язків у вигляді

$$x_n^{(-1)}(c_{-1}) = U(n)PP_{N(D)}c_{-1}$$

для довільного елемента $c_{-1} \in \mathbf{B}$, який буде визначений на наступному кроці. При ε^0 маємо неоднорідне рівняння

$$x_{n+1}^0 = A_n x_n^0 + B_n x_n^{(-1)}(c_{-1}) + h_n. \tag{3.26}$$

Згідно із теоремою 47 необхідною та достатньою умовою існування розв'язків рівняння (3.26), обмежених на всій цілочисловій осі, є виконання співвідношення

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)\{B_k x_k^{(-1)}(c_{-1}) + h_k\} = 0. \tag{3.27}$$

Умову (3.27) можна переписати у вигляді

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)B_k U(k)PP_{N(D)}c_{-1} = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)h_k.$$

Тоді, згідно із позначеннями, матимемо операторне рівняння

$$B_0 c_{-1} = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1) h_k.$$

З другої умови теореми випливає, що це рівняння є розв'язним для довільної правої частини. Відомо також, що воно може мати не єдиний розв'язок, але нам достатньо знайти хоча б один. Константу c_{-1} оберемо таким чином:

$$c_{-1} = -B_0^- \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1) h_k,$$

де B_0^- — оператор, узагальнено-обернений до оператора B_0.

Таким чином, якщо умови теореми виконуються, то рівняння (3.26) має множину обмежених на $\mathbb{Z}$ розв'язків:

$$x_n^0(c_0) = U(n) P P_{N(D)} c_0 + (G[B_{(\cdot)} x_{(\cdot)}^{(-1)}(c_{-1}) + h_{(\cdot)}])(n),$$

де c_0 — довільний елемент простору $\mathbf{B}$, що буде визначений на наступному кроці ітераційного процесу; c_{-1} — елемент, визначений вище; $(G[*])(n)$ — узагальнений оператор Гріна із задачі про обмежені розв'язки рівняння (3.22).

Діючи за індукцією, неважко показати, що за виконання умов теореми при ε^i матимемо задачу про обмежені на всій $\mathbb{Z}$ розв'язки:

$$x_n^{(i)} = A_n x_n^{(i)} + B_n x_n^{(i-1)}(c_{i-1}). \tag{3.28}$$

Множина обмежених розв'язків рівняння (3.28) набуває вигляду

$$x_n^{(i)}(c_i) = U(n) P P_{N(D)} c_i + (G[B_{(\cdot)} x_{(\cdot)}^{(i-1)}(c_{i-1})])(n),$$

де елемент c_i визначається таким чином:

$$c_i = -B_0^- \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k+1)B_k(G[B_{(\cdot)}x_{(\cdot)}^{(i-1)}(c_{i-1}) + h_{(\cdot)}])(k).$$

Доведемо тепер, що для достатньо малого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ ряд (3.25) збігається. Для цього оцінимо кожен доданок окремо:

$$\|H(n)\| = \|H^*(n)\| \le \|U^{*-1}(n)Q^*P^*_{N(D^*)}\| \le k_1 p \lambda_1^n, \quad n \ge 0,$$

$$\|H(n)\| = \|H^*(n)\| \le$$

$$\le \|U^{*-1}(n)(E-P^*)^*P^*_{N(D^*)}\| \le k_2 p \lambda_2^n, \quad n \le 0,$$

де $p = max\{\|P_{N(D)}\|, \|P^*_{N(D^*)}\| = \|P_{N(D^*)}\|\}$.

Отже, маючи відповідні оцінки, можемо довести обмеженість узагальненого оператора Гріна:

$$\|(G[h])(n)\| \le K|||h|||,$$

де $K = max_{i=1,2}\{k_i(\lambda_i^{-1} + Nk)\}$, $k = k_2\lambda_2^{-1} + k_1\lambda_1^{-1}$, $N = \|D^-\|$.

Використаємо ці нерівності для доведення збіжності ряду (3.25):

$$\|c_i\| \le (aK)^i abpk(abplk+1)^{i-1}\|x_n^{(0)}(c_0)\|,$$

$$\|x_n^{(i)}(c_i)\| \le [aK(abplk+1)]^i\|x_n^{(0)}(c_0)\| \quad (i = 1, 2, ...),$$

де $b = \|B_0^-\|$, $a = \|B_n\|$, $l = max\{k_1 p, k_2 p\}$. Таким чином, для кожного $n \in \mathbb{Z}$ ряд (3.25) мажорується рядом

$$\varepsilon^{-1}\|x_n^{(-1)}(c_{-1})\| + \sum_{i=0}^{+\infty}[\varepsilon aK(abplk+1)]^i\|x_n^{(0)}(c_0)\|.$$

Зауважимо, що $\|x_n^{(-1)}(c_{-1})\|$ та $\|x_n^{(0)}(c_0)\|$ обмежені. Тому для $n \in \mathbb{Z}$ та всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ таких, що $\varepsilon_* < \frac{1}{aK(abplk+1)}$, ряд (3.25) абсолютно збігається. Теорему доведено. $\square$

Література

[1] **Антоневич А. Б.** Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – М. : Университетское, 1988.

[2] **Аткинсон Ф. Р.** Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах / Ф. Р. Аткинсон // Мат. сб. Нов. сер. – 1951. – 28, 1. – С. 3–14.

[3] **Ахиезер Н. И.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. 1 / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. – Х. : Вища школа, 1977.

[4] **Бойчук О. А.** Теория возмущений операторных уравнений в пространствах Фреше и Гильберта / О. А. Бойчук, О. О. Покутний // УМЖ. – 2015. – 67, № 9. – С. 1181–1188.

[5] **Бойчук А. А.** Приложение эргодической теории к исследованию краевой задачи с периодическим операторным коэффициентом / А. А. Бойчук, А. А. Покутный // УМЖ. – 2013. – 65, № 3. – С. 329–339.

[6] **Вайнберг М. М.** Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969.

[7] **Городній М.Ф.** Властивості розв'язків різницевих і диференціальних рівнянь та їх стохастичних аналогів у банаховому просторі / М. Ф. Городній // Автореферат дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. Київ, 2004.

[8] **Гохберг И. Ц.** Введение в одномерную теорию сингулярных интегральных операторов / И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник. – Кишинев : Штиинца, 1973.

[9] **Глазман И. М.** Конечномерный линейный анализ / И. М. Глазман, Ю. И. Любич. – М. : Наука, 1969.

[10] **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988.

[11] **Иосида К.** Функциональный анализ / К. Иосида. – М. : Мир, 1967.

[12] **Канторович Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1984.

[13] **Королюк В. С.** Математические основы фазового укрупнения сложных систем / В. С. Королюк, А. Ф. Турбин. – К. : Наук. думка, 1978.

[14] **Красносельский М. А.** Топологические методы в теории нелинейных операторов / М. А. Красносельский. – М. : Гостехиздат, 1956.

[15] **Крейн С. Г.** Линейные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. – М. : Наука, 1967.

[16] **Двадцатая проблема Гильберта.** Обобщенные решения операторных уравнений / С. И. Ляшко, Д. А. Номировский, Ю. И. Петунин, В. В. Семенов. – М. : Диалектика, 2009.

[17] **Логинов Б. В.** Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности / Б. В. Логинов. – Ташкент : ФАН, 1985.

[18] **Маслов В. П.** Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризационного процесса / В. П. Маслов // УМН. – 1968. – Т. 23. – № 3. – С. 183–184.

[19] **Никольский С. М.** Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. – 1943. – 7, 3. – С. 147–163.

[20] **Ниренберг Л.** Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг. – М. : Мир, 1977.

[21] **Покутный А. А.** Линейные нормально-разрешимые уравнения в пространстве Банаха / А. А. Покутный // Журн. обчисл. та прикл. матем. – 2012. – № 1 (107). – С. 146–153.

[22] **Покутний О. О.** Про розвинення методу рядів Неймана узагальненого обертання на спектрі оператора в просторах Банаха та Фреше / О. О. Покутний // Доп. НАН України. – 2013. – № 1. – С. 19–23.

[23] **Покутний О. О.** Розв'язки лінійних різницевих рівнянь в банаховому просторі, обмежені на всій цілочисельній осі / О. О. Покутний // Вісн. Київ. ун-ту. – 2006. – № 1. – С. 182–188.

[24] **Покутний О. О.** Розв'язки лінійних слабко збурених різницевих рівнянь в банаховому просторі, обмежені на всій вісі цілих чисел / О. О. Покутний // Вісн. Київ. ун-ту. – 2006. – № 3. – С. 240–244.

[25] **Попов М. М.** Доповнювальні підпростори і деякі задачі сучасної геометрії Банаха / М. М. Попов // Математика сегодня. – 2007. – С. 78–116.

[26] **Радыно А. Я.** Линейные уравнения и борнология / А. Я. Радыно. – Минск : БГУ, 1982.

[27] **Рид М.** Методы современной математической физики. В 4 т. – Т. 1. Функциональный анализ / М. Рид, Б. Саймон. – М. : Мир, 1977.

[28] **Робертсон А. П.** Топологические векторные пространства / А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон. – М. : Мир, 1967.

[29] **Семенов В. В.** Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора / В. В. Семенов // Журн. обчисл. та прикл. матем. – 2013. – № 1 (111). – С. 46–56.

[30] **Семенов В. В.** Об одной принципиальной схеме вычисления обобщенной проекции / В. В. Семенов // Доп. НАН України. – 2013. – № 6. – С. 41–46.

[31] **Слюсарчук В. Ю.** Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі / В. Ю. Слюсарчук. – Рівне, 2003.

[32] **Тихонов А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1986.

[33] **Треногин В. А.** Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1980.

[34] **Эдвадс Р. Э.** Функциональный анализ / Р. Э. Эдвардс. – М. : Мир, 1969.

[35] **Хелемский А. Я.** Функциональный анализ / А. Я. Хелемский. – М. : МЦНМО, 2004.

[36] **Ширяев А. Н.** Вероятность / А. Н. Ширяев. – М. : Наука, 1989.

[37] **де ла Яве Р.** Введение в КАМ-теорию / Р. де ла Яве. – М. : Ин-т комп. исслед., 2003.

[38] **Biletskyi B. A.** Periodic problems of difference equations and Ergodic Theory [Electronic resource] / B. A. Biletskyi, A. A. Boichuk, O. O. Pokutnyi // Abstract and Applied Analysis. – Vol. 2011 (2011), ArticleID 928587, Access mode : http://dx.doi.org/10.1155/2011/928587

[39] **Boichuk A. A.** Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems / A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. – VSP, Utrecht–Boston, 2004.

[40] **Browder F. E.** Convergence of approximants of fixed points of nonexpansive non-linear mappings in Banach spaces / F. E. Browder // Arch. Rational Mech. Anal. – 1967. – Vol. 24. – P. 82–90.

[41] **Browder F. E.** Fixed-point theorems for noncompact mapping in Hilbert space / F. E. Browder // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1965. – Vol. 53. – P. 1272–1276.

[42] **Chueshov I. D.** Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems / I. D. Chueshov. – K. : Acta, 2002.

[43] **Deutch E.** Semi-inverses, reflexive semi-inverses, and pseudoinverses of an arbitrary linear transformation / E. Deutch // Linear algebra and its applications. – 1971. – 4. – P. 313–322.

[44] **Halpern B.** Fixed points of nonexpanding maps / B. Halpern // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 73. – P. 957–961.

[45] **Hamilton R. S.** The inverse function theorem of Nash and Moser / R. S. Hamilton // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – 7 (1) – P. 65–222.

[46] **Lindenstrauss J.** Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications / J. Lindenstrauss, A. Pelczynski // Studia Mathematica. – 1968. – Vol.29. – P. 275–325.

[47] **Lyashko S. I.** On a theorem of M. A. Krasnoselski / S. I. Lyashko, V.V. Semenov // Cybern. and System Anal.– 2010. – 46, 6. – P. 1021–1025.

[48] **Mann W. R.** Mean value methods in iteration / W. R. Mann // Proc. Amer. Math. Soc. – 1953. – P. 506–510.

[49] **Moore E. H.** On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract) / E. H. Moore // Bull. Amer. Math. Soc. – 1920. – Vol. 26. – P. 394–395.

[50] **Nakajo K.** Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups / K. Nakajo, W. Takahashi // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – Vol. 279. – P. 372–379.

[51] **Nash J.** The imbedding problem for Riemannian manifolds / J. Nash // Ann. Math. – 1956. – Vol. 63. – P. 20–63.

[52] **Moser J.** A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations / J. Moser // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1961. – Vol. 47. – P. 1824–1831.

[53] **Opial Z.** Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings / Z. Opial // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 73. – P. 591–597.

[54] **Passty G. B.** Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert spaces / G. B. Passty // J. Math. Anal. Appl. – 1979. – Vol. 72. – P. 383–390.

[55] **Penrose R. A.** Generalized Inverse for Matrices / R. A. Penrose // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1955. — Vol. 51. — P. 406–413.

[56] **Ramm A. G.** A simple proof of the Fredholm alternative and a characterization of the Fredholm operators / A. G. Ramm // Amer. Math. Monthly. – 2001. – 108, 9. – P. 855–860.

[57] **Rao C. R.** Generalized inverse of matrices and its applications / C. R. Rao, S. K. Mitra. – New York : Wiley, 1971.

[58] **Ray W. O.** The fixed point property and unbounded sets in Hilbert space / W. O. Ray // Trans. Amer. Math. Soc. – 1980. – Vol. 258, N. 2. – P. 531–537.

[59] **Reich S.** Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces / S. Reich // J. Math. Anal. Appl. – 1979. – Vol. 67. – P. 274–276.

[60] **Takahashi W.** Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces / W. Takahashi, Y. Takeuchi, R. Kubota // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 341. – P. 276—286.

[61] **Wittmann R.** Approximation of fixed points of nonexpansive mappings / R. Wittmann // Arch. Math. – 1992. – Vol. 58. – P. 486–491.

[62] **Xu H. K.** Iterative algorithms for nonlinear operators / H. K. Xu // J. London Math. Soc. – 2002. – P. 240–256.

[63] **Xu H. K.** Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings / H. K. Xu // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – Vol. 298. – P. 279–291.

ЗМІСТ