

Актуальні проблеми прикладної математики

Я хочу похвалить то, чего не имею, а именно знание точных наук, например, математики. Эта, по словам Августина, Паскаля и многих других, самая абстрактная из человеческих наук оперирует в области не фантазии, а мысленных реальностей и чрезвычайно дисциплинирует ум. Именно из среды математиков нередко выходят хорошие организаторы, практики, волевые люди, умеющие не просто думать, но и додумывать до конца.

А. Ткачев

Прикладна математика є областю сучасної математики, основною метою якої є дослідження рівнянь, що мають "прикладне" значення. У математиці зустрічаються найрізноманітніші рівняння (алгебраїчні, диференціальні, із частинними похідними,...). Розділення математики на чисту (академічну) та прикладну є достатньо умовним. Як правило, в прикладній математиці розробляються методи дослідження і розв'язання рівнянь актуальних для механіки, фізики, хімії, економіки, біології, соціології, ..., а в чистій математиці розглядаються "абстрактні" рівняння. Втім, відомі численні приклади рівнянь, що виникали і досліджувались у чистій математиці та надалі ставали актуальними і, навіть, фундаментальними для механіки, фізики, хімії,....

Математична фізика є областю прикладної математики, основною метою якої є дослідження крайових і початково-крайових задач для рівнянь із частинними похідними, що мають "прикладне" значення. Ці задачі виникають в різних розділах механіки, фізики, хімії, економіки біології, соціології, ..., хоча список крайових і початково-крайових задач математичної фізики є достатньо коротким.

Множини

Кожна сучасна наука має свої сталі правила, традиції та закони розвитку. Так, у математиці прийнято виводити різноманітні твердження із використанням логічно коректних (несуперечливих) розміркувань. Такі твердження зазвичай ґрунтуються на загальноприйнятих фундаментальних поняттях. Для багатьох

сучасних областей математики такими фундаментальними поняттями є поняття *множини* та *відображення*. Поняття множини вводиться, наприклад, таким чином:

Множина – це сукупність об'єктів будь-якої природи, які називаються його елементами.

Тут дане поняття скоріше пояснюється, чим строго (логічно коректно) визначається, та зводиться фактично до заміни слова "множина" його синонімом сукупність елементів будь-якої природи. Приймаючи це поняття як строге визначення можна прийти до суперечності при спробі розглянути множину всіх множин, елементами яких є множини.

Проте, з одного боку, можна і не розглядати такі екзотичні об'єкти як множина множин із множин. З іншого боку, достатньо давно побудована досить несуперечлива (логічно коректна) *теорія множин*, що є областю математики в якій поняття множини строго визначається на основі відповідних аксіом, що виключають із розгляду відповідні екзотичні об'єкти. Дослідження загальних властивостей множин і перевірка несуперечності цих аксіом в теорії множин є достатньо об'ємними. Тому, навряд чи раціонально приводити відповідні аксіоми та твердження в якості об'ємного введення до областей математики, у яких використовується поняття множини.

Таким чином, у введенні до таких областей зазвичай припускають, що визначення множини відоме або обмежуються поясненням, що *множина – це сукупність об'єктів будь-якої природи.*

Можливо, слід було б визначити поняття несуперечності і логічно коректних розміркувань. Ці поняття строго визначаються у *математичній логіці*, що є також достатньо об'ємною областю сучасної математики. Таким чином, тут доводиться також припускати, що ці поняття відомі або є інтуїтивно ясними.

Множини зручно позначати великими літерами A, B, \dots , а елементи відповідних множин – малими літерами a, b, \dots . Твердження, що " a є елемент множини A " символічно записують таким чином

$$a \in A$$

та кажуть, що елемент a належить множині A .

Запис $a \notin A$ означає, що a не є елементом множини A .

Якщо всі елементи множини A є елементами множини B , тоді A називається підмножиною множини B та використовується позначення

$$A \subset B.$$

Множини A та B називають *співпадаючими* і пишуть

$$A = B,$$

якщо $A \subset B$ та $B \subset A$. Запис $A \neq B$ означає просто, що множини A та B не є співпадаючими.

Доцільно також ввести поняття *порожньої* множини, що не містить жодного елемента. Таку множину прийнято позначати символом \emptyset . Будь-яка множина містить \emptyset у якості підмножини. Підмножини деякої множини A , відмінні від \emptyset та A , називають *власними підмножинами* A .

Множина, яка складається із скінченного числа елементів a_1, a_2, \dots, a_n позначається через

$$\{ a_1, a_2, \dots, a_n \}.$$

Іноді, зручно не робити відмінності між множиною $\{ a \}$ та елементом a .

Прийнято також використовувати фігурні дужки для виділення множини елементів, що задовольняють деякому твердженню. Таким чином,

$$\{ a : (\text{твердження про } a) \}$$

є множиною всіх a , для яких виконано сформульоване в дужках твердження. Відповідно до цієї домовленості, можна написати

$$A = \{ a : a \in A \} = \{ b : b \in A \}.$$

Якщо деяке твердження (*) є більш загальним чим твердження (**), тоді кажуть, що із (*) слідує (**) та використовують позначення

$$(*) \Rightarrow (**).$$

Твердження (*) і (**) називають *еквівалентними* (рівносильними) та пишуть

$$(*) \Leftrightarrow (**),$$

якщо $(*) \Rightarrow (**)$ та $(**) \Rightarrow (*)$.

Для завданих множин A та B корисно також розглядати деякі комбінації елементів цих множин. Наприклад, множина

$$A \cup B = \{ a : a \in A \text{ або } a \in B \}$$

називається *об'єднанням* множин A та B , а множина

$$A \cap B = \{ a : a \in A \text{ і } a \in B \}$$

називається *перетином* множин A та B .

Впорядкованою парою (a, b) є множина $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Дві впорядковані пари (a_1, b_1) та (a_2, b_2) є *рівними* $\Leftrightarrow a_1 = a_2$ та $b_1 = b_2$. Множина

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

називається *добутком* множин A та B . У випадку коли $A = B$ використовується також позначення $A \times A = A^2$ для *другої ступені* множини A .

Скінчений добуток множин A_1, A_2, \dots, A_n визначається за індукцією

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

Відповідно, $A^3 = (A^2) \times A, \dots, A^n = (A^{n-1}) \times A$.

Аналогічно можна визначити об'єднання $\cup_{\alpha} A_{\alpha}$, перетин $\cap_{\alpha} A_{\alpha}$ та добуток $\prod_{\alpha} A_{\alpha}$ будь-якого (скінченного або нескінченного) числа множин.

Нехай задані множини A та B . Кожна підмножина $F \subset A \times B$ називається *відношенням*. Відношення $F \subset A \times B$ називається *відображенням*, якщо

$$\text{для кожного } a \in A \quad \exists b \in B : aFb \quad (\text{тобто } (a, b) \in F)$$

і

$$\text{для кожного } a \in A \quad \text{із } aFb \text{ та } aFh \quad \Rightarrow \quad b = h$$

(тобто кожне $a \in A$ однозначно визначає $b \in B$).

Відношення $E \subset A \times A$ називається *відношенням еквівалентності* на A , якщо

$$(E1) \quad \forall a \in A \Rightarrow aEa;$$

$$(E2) \quad aEb \Rightarrow bEa;$$

$$(E3) \quad aEb, bEh \Rightarrow aEh.$$

Кожне відношення еквівалентності $E \subset A \times A$ на A визначає розбиття A на непересічні множини, які називаються *класами еквівалентності*, де $a, b \in A$ належать одному класу $\Leftrightarrow aEb$. Таким чином,

$$A = \bigcup_{s \in S} A_s,$$

де $A_s \cap A_t = \emptyset$ при $s \neq t$ та

$$a, b \in A_s \quad \text{для деякого } s \in S \quad \Leftrightarrow \quad aEb.$$

З іншого боку, кожне розбиття множини A на непересічні множини $\{A_s\}_{s \in S}$ визначає деяке відношення еквівалентності E на A за правилом

$$aEb \quad \Leftrightarrow \quad a, b \in A_s \quad \text{для деякого } s \in S.$$

1. Відображення. Метричні простори

В1.1. Множина – сукупність елементів будь-якої природи.

В1.2. Відображення φ із множини A у множину B – правило зіставлення кожному елементу із A деякого елемента із B . Позначення: $\varphi : A \rightarrow B$.

В1.3. Нехай задані множини A, B і відображення $\varphi : A \rightarrow B$. Рівнянням називається співвідношення

$$\varphi(a) = b, \quad (1.1)$$

де $a \in A$ і $b \in B$. Розв'язати рівняння (1.1) означає, що для заданого $b \in B$ необхідно знайти $a \in A$ таке, що $\varphi(a) = b$.

Основна проблема математики – розв'язувати різноманітні рівняння.

Образом відображення $\varphi : A \rightarrow B$ є множина

$$\text{Im } \varphi = \{\varphi(a) : a \in A\} \subseteq B.$$

Образом елементу $a \in A$ є елемент $b = \varphi(a) \in B$.

Рівняння (1.1) може бути беззмисловим для $b \in B \setminus \text{Im } \varphi$, якщо $B \neq \text{Im } \varphi$. Проте, за визначенням рівняння (1.1) завжди має сенс і розв'язок для $b \in \text{Im } \varphi$. Таким чином, іноді корисно "зменшити" B , щоб рівняння (1.1) мало розв'язок.

В1.4. Відображення $\varphi : A \rightarrow B$ називається *накладенням*, якщо

$$\text{Im } \varphi = B.$$

Для таких φ рівняння (1.1) завжди має сенс і розв'язок. Проте, описання $\text{Im } \varphi$ не завжди відомо і фактично еквівалентно розв'язанню рівняння (1.1). Наприклад, для $b, c \in \mathbf{R}$ і відображення $\varphi(x) = x^2 + bx : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ відомо, що

$$c \in \text{Im } \varphi \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + 4c \geq 0.$$

Однак, описання образу $\text{Im } \varphi$ не відомо, наприклад, для такого відображення $\varphi(x) = x^n + ax^{n-1} + \dots + ex : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ при $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$ та $a, \dots, e \in \mathbf{R}$.

З іншого боку, для $b, c \in \mathbf{R}$ і відображення $\varphi(x) = x^2 + bx : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ завжди маємо, що $c \in \text{Im } \varphi$, тобто іноді корисно "збільшити" A і B щоб рівняння (1.1) "мало" розв'язок. Точніше, іноді зручно досліджувати замість (1.1) рівняння

$$\bar{\varphi}(\bar{a}) = \bar{b} \quad \text{яке називається розширенням (1.1),} \quad (\overline{1.1})$$

де $\bar{\varphi} : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ такі, що $A \subset \bar{A}$, $B \subseteq \bar{B}$ і $\bar{\varphi}(A) = \varphi(A)$, тобто $\bar{\varphi}(a) = \varphi(a)$ для $a \in A$. Саме так (при розширенні рівнянь другого порядку) виникла множина комплексних чисел \mathbf{C} (як втім і багато інших множин, які використовуються в сучасній математиці, виникли при розширенні різноманітних рівнянь).

Із появою комплексних чисел вдалося повністю описати $\text{Im } \varphi$ відображення $\varphi(x) = x^n + ax^{n-1} + \dots + ex : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ при $n \in \mathbf{N}$ та $a, \dots, e \in \mathbf{C}$. У даному випадку $\text{Im } \varphi = \mathbf{C}$ відповідно до *основної теореми алгебри*, однак рівняння (1.1) може мати декілька розв'язків. Зазвичай корисно знати скільки існує розв'язків, але найкращим варіантом може бути єдиність розв'язку рівняння (1.1).

В1.5. Відображення $\varphi : A \rightarrow B$ називається *вкладенням*, якщо

$$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Для таких φ рівняння (1.1) має єдиний розв'язок, якщо цей розв'язок існує. Таким чином, іноді корисно "зменшити" A щоб розв'язок був єдиним. Наприклад, якщо відомо, що для кожного $b \in B$ розв'язків завжди два, тоді може бути корисним "поділити" A на дві частини і отримати ідеальний випадок.

В1.6. Відображення $\varphi : A \rightarrow B$ називається *взаємно однозначним*, якщо воно є вкладенням та накладенням.

Для таких φ рівняння (1.1) завжди має єдиний розв'язок $a \in A$ для кожного $b \in B$, що вирішує основну проблему, і множини A та B побудовані в деякому розумінні однаково, оскільки визначено відображення $\tilde{\varphi} : B \rightarrow A$, що зіставляє кожному $b \in B$ єдиний розв'язок $a \in A$ і таке, що $\varphi(\tilde{\varphi}(b)) = b$ та $\tilde{\varphi}(\varphi(a)) = a$.

В1.7. Дві множини A та B називаються *еквівалентними*, якщо існує взаємно однозначне відображення $\varphi : A \rightarrow B$. Позначення: $A \cong B$.

Основний принцип математики – **ототожнювати** еквівалентні множини.

Цей принцип є природним: якщо множини A, B, C, \dots побудовані однаково, тоді достатньо вивчити, наприклад, A і одночасно зрозуміти будову еквівалентних множин. Цей принцип використовується постійно. Наприклад, еквівалентність

$$\{x_1, \dots, x_n\} \cong \{1, \dots, n\} \cong \{0, \dots, n-1\}$$

означає одвічне бажання все перенумеровувати (маршрути, жителів, студентів, юридичних осіб, телефони, ...), що іноді достатньо зручно. Саме так виникла множина натуральних чисел \mathbf{N} із скінченими підмножинами якої можна ототожнити будь-яку скінчену множину, що підкреслює корисність математики принаймні в тих областях діяльності, де використовуються скінчені множини.

В1.8. *Операцією* на множині A називається всяке відображення із $A \times A$ в A .

Образ пари (a, b) називають сумою або добутком або згорткою ... і пишуть відповідно $a + b$ або $a \cdot b$ або $a * b$...

Операція $a \cdot b$ *комутативна*, якщо $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in A$.

Операція $a \cdot b$ *асоціативна*, якщо $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in A$.

В1.9. *Операцією множення на числа* $\alpha \in \mathbf{C}$ (або $\alpha \in \mathbf{R}$) на множині A називається всяке відображення із $\mathbf{C} \times A = \{(\alpha, a) : \alpha \in \mathbf{C}, a \in A\}$ в A .

Образ пари (α, a) позначають через αa або $\alpha \cdot a$.

В1.10. *Метрикою* на множині M називається всяке відображення

$$\mu : M \times M \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+ = \{r \in \mathbf{R} : r \geq 0\}$$

таке, що для $\forall a, b, c \in M$ маємо

$$1) \quad \mu(a, b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b;$$

$$2) \quad \mu(a, b) = \mu(b, a); \quad 3) \quad \mu(a, b) \leq \mu(a, c) + \mu(c, b).$$

Множина M із деякою метрикою $\mu(\cdot, \cdot)$ є *метричним простором* (M, μ) . Наприклад, $(\{1, \dots, n\}, \mu)$ є метричним простором із метрикою $\mu(a, b) = |a - b|$.

В1.11. Метричний простір (B, μ) називається *підпростором* метричного простору (M, μ) , якщо $B \subset M$.

Наприклад, $(\{1, \dots, n\}, \mu)$ є підпростором метричного простору (\mathbf{C}, μ) , де

$$\mu(a, b) = |a - b|.$$

В1.12. *Кулею* (замкненою кулею) радіусу r із центром в точці $a \in M$ метричного простору (M, μ) називається множина

$$B_r(a) = \{b \in M : \mu(b, a) < r\} \quad (\bar{B}_r(a) = \{b \in M : \mu(b, a) \leq r\}).$$

Послідовністю $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ в M називається образ кожного відображення із \mathbf{N} в M .

В1.13. Елемент $a \in M$ метричного простору (M, μ) є *границею* послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, якщо $\mu(a_n, a) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Позначення: $a_n \rightarrow a$.

В1.14. Відображення $\varphi : M \rightarrow L$ метричних просторів (M, μ) і (L, ϱ) називається *неперервним у точці* $a \in M$, якщо

$$\varphi(a_n) \rightarrow \varphi(a) \quad \text{для кожної послідовності} \quad a_n \rightarrow a.$$

Відображення $\varphi : M \rightarrow L$ метричних просторів (M, μ) і (L, ϱ) називається *неперервним*, якщо воно неперервне в кожній точці $a \in M$.

Наприклад, для метричного простору (M, μ) і кожного $c \in M$ відображення $\varphi = \mu(\cdot, c) : M \rightarrow \mathbf{C}$ є неперервним, тобто $\mu(a_n, c) \rightarrow \mu(a, c)$ для $a_n \rightarrow a \in M$.

В1.15. Послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ метричного простору (M, μ) називається *фундаментальною*, якщо $\mu(a_n, a_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$.

В1.16. Метричний простір (M, μ) називається *повним*, якщо кожна фундаментальна послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ має границю $a \in M$.

Метричний простір (\mathbf{Q}, μ) (де $\mu(a, b) = |a - b|$) не є повним, оскільки

$$\mathbf{Q} \ni a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \in \mathbf{R} \neq \mathbf{Q}.$$

Позначимо

$$C[0, 1] = C^0[0, 1] = \{f : f \text{ неперервна функція з } [0, 1] \text{ в } \mathbf{R}\},$$

$$\mu_0(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Метричний простір $(C^0[0, 1], \mu_0)$ є повним, оскільки границя послідовності рівномірно неперервних функцій є рівномірно неперервною функцією.

В1.17. Відображення $\varphi : M \rightarrow M$ метричного простору (M, μ) називається *стискаючим*, якщо $\exists \alpha \in (0, 1)$:

$$\mu(\varphi(a), \varphi(b)) \leq \alpha \mu(a, b) \quad \forall a, b \in M.$$

Теорема 1.18 (С. Банах). Нехай відображення $\varphi : M \rightarrow M$ метричного простору (M, μ) є стискаючим та (M, μ) є повним. Тоді

$$\exists ! a_0 \in M : \quad \varphi(a_0) = a_0.$$

◁ Фіксуємо довільне $a \in M$ і розглянемо послідовність

$$a_1 = \varphi(a), \quad a_2 = \varphi(a_1) = \varphi(\varphi(a)) = \varphi^2(a),$$

$$a_3 = \varphi(a_2) = \varphi(\varphi(a_1)) = \varphi^3(a), \dots,$$

$$a_n = \varphi(a_{n-1}) = \varphi^n(a), \dots$$

Тоді

$$\mu(a_1, a_2) = \mu(\varphi(a), \varphi(a_1)) \leq \alpha \mu(a, a_1) = \alpha \mu(a, \varphi(a)),$$

$$\mu(a_2, a_3) = \mu(\varphi(a_1), \varphi(a_2)) \leq \alpha^2 \mu(a, \varphi(a)), \dots$$

$$\mu(a_n, a_{n+1}) \leq \alpha^n \mu(a, \varphi(a)), \dots$$

Для цілого $p > 1$ маємо

$$\begin{aligned} \mu(a_n, a_{n+p}) &\leq \mu(a_n, a_{n+1}) + \mu(a_{n+1}, a_{n+2}) + \dots + \mu(a_{n+p-1}, a_{n+p}) \leq \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{n+p-1}) \mu(a, \varphi(a)) = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1 - \alpha} \mu(a, \varphi(a)). \end{aligned}$$

Таким чином

$$\mu(a_n, a_{n+p}) < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \mu(a, \varphi(a)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (1.1)$$

і послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ є фундаментальною, оскільки $0 < \alpha < 1$.

Метричний простір (M, μ) є повним, отже

$$\exists a_0 \in M : a_n \rightarrow a_0.$$

Крім того

$$\mu(\varphi(a_0), a_n) = \mu(\varphi(a_0), \varphi(a_{n-1})) \leq \alpha \mu(a_0, a_{n-1}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

тобто $a_n \rightarrow \varphi(a_0)$ та

$$\exists a_0 \in M : a_0 = \varphi(a_0)$$

через єдиність границі. Припустимо, що $\exists a_0, b_0 \in M : a_0 = \varphi(a_0)$ і $b_0 = \varphi(b_0)$.

Тоді

$$\mu(a_0, b_0) = \mu(\varphi(a_0), \varphi(b_0)) \leq \alpha \mu(a_0, b_0) \Leftrightarrow \mu(a_0, b_0)(1 - \alpha) \leq 0.$$

Таким чином, $\mu(a_0, b_0) = 0$ і $a_0 = b_0$. \triangleright

Із неперервності відображення $\mu(c, \cdot)$ та нерівності (1.1) випливає, що

$$\mu(a_n, a_0) < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \mu(a, \varphi(a)).$$

Тому маємо оцінку відстані між a_n і a_0 через відстань між a і $\varphi(a)$, яка дає можливість розв'язати рівняння $a_0 = \varphi(a_0)$ із наперед заданою точністю $\varepsilon > 0$.

Наприклад, розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння

$$y'_t = F(t, y), \quad y|_{t=t_0} = y_0, \quad (1.2)$$

де $t \in (t_0, T)$, $t_0 < T$ та $y_0 \in \mathbf{R}^n$.

Теорема 1.19 ($\exists 1$ для задачі Коші). Припустимо, що $F \in C^0([t_0, T] \times \mathbf{R}^n)^n$ і

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2| \quad \text{для} \quad t \in (t_0, T) \quad \text{і} \quad y_1, y_2 \in \mathbf{R}^n$$

(умова Ліпшиця із константою C). Тоді

$$\exists 1 \ y \in C^1[t_0, T]^n : \quad y'_t = F(t, y), \quad y|_{t=t_0} = y_0,$$

де $C^1[t_0, T]^n = \{v \in C^0[t_0, T]^n : v'_t \in C^0[t_0, T]^n\}$.

◁ Задача (1.2) еквівалентна наступній задачі для інтегрального рівняння

$$\text{знайти } y \in C^0[t_0, T]^n : \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(t, y(t)) dt. \quad (1.3)$$

Дійсно, якщо $y \in C^1[t_0, T]^n$ є розв'язком задачі (1.2), то після інтегрування отримуємо (1.3). Відповідно, якщо $y \in C^0[t_0, T]^n$ є розв'язком задачі (1.3), то після диференціювання отримуємо (1.2), оскільки $F(t, y(t)) \in C^0[t_0, T]^n$ як суперпозиція неперервних функцій $y \in C^0[t_0, T]^n$ і $F \in C^0([t_0, T] \times \mathbf{R}^n)^n$.

Фіксуємо $t_1 \in (t_0, T]$ таке, що $C(t_1 - t_0) < 1$ і розглянемо відображення $\varphi : C^0[t_0, t_1]^n \rightarrow C^0[t_0, t_1]^n$, визначене формулою

$$\varphi(y) = y_0 + \int_{t_0}^t F(t, y(t)) dt.$$

Перевіримо, що φ є стискаючим для метричного простору $(C^0[t_0, t_1]^n, \mu_0)$. Маємо

$$\begin{aligned} \mu_0(\varphi(a), \varphi(b)) &= \max_{t_0 \leq t \leq t_1} |\varphi(a)(t) - \varphi(b)(t)| = \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \left| \int_{t_0}^t [F(t, a(t)) - F(t, b(t))] dt \right| \leq \\ &\leq \max_{t_0 \leq t \leq t_1} \int_{t_0}^t |F(t, a(t)) - F(t, b(t))| dt \leq \max_{t_0 \leq t \leq t_1} C \int_{t_0}^t |a(t) - b(t)| dt \leq \\ &\leq C(t_1 - t_0) \max_{t_0 \leq t \leq t_1} |a(t) - b(t)| = C(t_1 - t_0) \mu_0(a, b) \end{aligned}$$

для $a, b \in C^0[t_0, t_1]^n$. Таким чином, φ є стискаючим для $(C^0[t_0, t_1]^n, \mu_0)$.

При $t_1 < T$, розіб'ємо відрізок $[t_0, T]$ на відрізки $[t_0, t_1], \dots, [t_{k-1}, t_k]$ так, щоб $C(t_j - t_{j-1}) < 1$ для $j = 1, \dots, k$ і повторимо попереднє доведення для цих відрізків $[t_0, t_1], \dots, [t_{k-1}, t_k]$. Тоді доведемо, що

$$\exists 1 y \in C^0[t_0, T]^n : \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(t, y(t)) dt. \triangleright$$

У цій теоремі суттєво, що розв'язок $y(t)$ є визначеним і скінченим для кожного $t \in [t_0, T]$, ця властивість може не виконуватися, якщо умова Ліпшиця порушена, наприклад, для додатних $y_0, a \in \mathbf{R}$ і $n = 1$ задача Коші

$$y'_t = ay^2, \quad y|_{t=0} = y_0, \quad (1.4)$$

має розв'язок $y(t) = \frac{y_0}{1 - t a y_0}$, якій не є визначеним для $t = \frac{1}{a y_0}$.

Цей приклад пояснює суттєву відмінність між $C^0[0, Fy_0]$ і $C^0[0, Fy_0)$. Проте, іноді є корисною наступна теорема про локальну розв'язуваність задачі Коші.

Теорема 1.20 (локальне $\exists 1$ для задачі Коші). *Нехай $F \in C^0([t_0, T] \times \mathbf{C}^n)^n$ і*

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leq L(y_1, y_2) |y_1 - y_2| \quad \text{для } t \in (t_0, T) \quad \text{і } y_1, y_2 \in \mathbf{C}^n,$$

де $L(y_1, y_2)$ є рівномірно обмеженою на обмежених множинах (локальна умова Ліпшиця), тобто для кожного $c > 0$

$$L' = \sup_{|y_1| < 2c, |y_2| < 2c} L(y_1, y_2) < \infty. \quad (1.5)$$

Тоді існує $T_0 > t_0$ таке, що $T \geq T_0$ і

$$\exists 1 \ y \in C^1[t_0, T_0]^n : \quad y'_t = F(t, y), \quad y|_{t=t_0} = y_0.$$

◁ Фіксуємо $c > |y_0|$, позначимо $M = \max_{[t_0, T]} |F(t, y_0)|$ та оберемо $T_0 > t_0$ так щоб

$$\alpha = L'(T_0 - t_0) < 1 \quad \text{і} \quad M(T_0 - t_0) \leq c(1 - \alpha). \quad (1.6)$$

Повторюючи доведення теореми Банаха, визначимо

$$a = y_0, \quad a_1 = \varphi(a), \quad \dots, \quad a_n = \varphi^n(a)$$

для

$$\varphi(y) = y_0 + \int_{t_0}^t F(t, y(t)) dt.$$

Тоді

$$\mu_0(a, \varphi(a)) = \max_{[t_0, T_0]} |a - \varphi(a)| = \max_{[t_0, T_0]} \left| \int_{t_0}^t F(t, y_0) dt \right| \leq M(T_0 - t_0) \leq c(1 - \alpha),$$

зокрема $\max_{[t_0, T_0]} |a_1| \leq \max_{[t_0, T_0]} |a_1 - a| + \max_{[t_0, T_0]} |a| < 2c$. Припустимо по індукції виконання нерівностей $\max_{[t_0, T_0]} |a_2| < 2c, \dots, \max_{[t_0, T_0]} |a_n| < 2c$ і перевіримо, що також $\max_{[t_0, T_0]} |a_{n+1}| < 2c$. Маємо

$$\max_{[t_0, T_0]} |a_{n+1} - a_n| \leq \max_{t_0 \leq t \leq T_0} \int_{t_0}^t |F(t, a_n(t)) - F(t, a_{n-1}(t))| dt \leq$$

$$\leq \alpha \max_{[t_0, T_0]} |a_n - a_{n-1}| \leq \dots \leq \alpha^n \max_{[t_0, T_0]} |a - \varphi(a)| \leq \alpha^n c(1 - \alpha),$$

відповідно до (1.5), (1.6), де $\alpha = L'(T_0 - t_0) < 1$. Таким чином

$$\begin{aligned} \max_{[t_0, T_0]} |a_{n+1}| &\leq \max_{[t_0, T_0]} |a_{n+1} - a_n| + \max_{[t_0, T_0]} |a_n - a_{n-1}| + \dots + \max_{[t_0, T_0]} |a_1 - a| + \max_{[t_0, T_0]} |a| \leq \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + 1) c(1 - \alpha) + \max_{[t_0, T_0]} |a| < \frac{c(1 - \alpha)}{1 - \alpha} + c < 2c \end{aligned}$$

і переходячи до границі $a_n \rightarrow y$ отримаємо розв'язок задачі Коші такий, що

$$\max_{[t_0, T_0]} |y| \leq 2c. \quad \triangleright$$

Якщо $T_0 < T$, тоді можливо повторити попередню конструкцію із початкового моменту часу $t_1 = T_0$, фіксуючи $c_1 > 2c \geq |y(t_1)|$ і обчислюючи $L' = L'(c_1)$, яке залежить від c_1 , і отримати $T_1 > T_0$ таке, що

$$\max_{[t_0, T_1]} |y| \leq 2c_1.$$

Повторюючи цей процес, знайдемо $T_m > \dots > T_1 > T_0$ і розв'язок $y = y(t)$ задачі Коші такі, що $\max_{[t_0, T_m]} |y| \leq 2c_m$ для деякої константи c_m . По суті можливі два варіанти або $|y(T_m)| \rightarrow \infty$ (як в прикладі (1.4)) або розв'язок $y = y(t)$ задачі Коші буде продовжений на відрізок $[t_0, T]$ і знайдеться константа C така, що

$$\max_{[t_0, T]} |y| \leq C.$$

Більш того, якщо остання нерівність відома із деяких додаткових оцінок, тоді розв'язок $y = y(t)$ задачі Коші завжди може бути продовжений на відрізок $[t_0, T]$, оскільки варіант $|y(T_m)| \rightarrow \infty$ є неможливим.

(Завдання для самостійної роботи: перевірити, що умови теореми 1.20 виконані для прикладу (1.4).)

2. Повні простори. Поповнення просторів.

В2.1. Послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ метричного простору (M, μ) називається *фундаментальною*, якщо $\mu(a_n, a_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$.

В2.2. Метричний простір (M, μ) називається *повним*, якщо кожна фундаментальна послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ має границю $a \in M$.

Множина $B \subset M$ є *щільною* в метричному просторі (M, μ) , якщо для кожного $a \in M$ і $\varepsilon > 0$

$$\exists b_{\varepsilon} \in B : \mu(a, b_{\varepsilon}) \leq \varepsilon.$$

Метричний простір (M, μ) називається *сепарабельним*, якщо існує зчисленна множина $B \subset M$, яка щільна в (M, μ) .

Наприклад, множина поліномів

$$M[0, 1] = \{m \in C^0[0, 1] : m \text{ є поліномом на } [0, 1]\}$$

є щільною в метричному просторі $(C^0[0, 1], \mu_0)$ (теорема Вейшрасса). Крім того, $(C^0[0, 1], \mu_0)$ є сепарабельним.

В2.3. Відображення $\varphi : M \rightarrow L$ метричних просторів (M, μ) і (L, ϱ) називається *ізотрією*, якщо $\varphi : M \rightarrow L$ є взаємно однозначним та

$$\varrho(\varphi(a), \varphi(b)) = \mu(a, b) \quad \forall a, b \in M.$$

Ізометричні простори ототожнюються в теорії метричних просторів.

В2.4. Повний метричний простір (\overline{M}, μ) називається *поповненням* метричного простору (M, μ) , якщо множина M є щільною в (\overline{M}, μ) .

Теорема 2.5 (про поповнення метричних просторів). *Кожен метричний простір (M, μ) має єдине поповнення (\overline{M}, μ) .*

◁ Нехай метричний простір (M, μ) не є повним. Фундаментальні послідовності $\{a_n\}, \{b_n\} \subset M$ називаються *еквівалентними*, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(a_n, b_n) = 0.$$

Еквівалентність послідовностей позначається так $\{a_n\} \sim \{b_n\}$. Із нерівності трикутника випливає, що якщо $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ та $\{b_n\} \sim \{c_n\}$, тоді $\{a_n\} \sim \{c_n\}$.

Таким чином, множина всіх фундаментальних послідовностей в (M, μ) розпадається на непересічні класи еквівалентних фундаментальних послідовностей. Позначимо через \overline{M} множину таких класів (еквівалентних фундаментальних послідовностей). Якщо фундаментальна послідовність $\{a_n\}$ належить класу $\bar{a} \in \overline{M}$, тоді пишуть $\{a_n\} \in \bar{a}$. Із нерівності трикутника маємо

$$\mu(a_n, b_n) \leq \mu(a_n, a_m) + \mu(a_m, b_m) + \mu(b_m, b_n),$$

$$\mu(a_m, b_m) \leq \mu(a_m, a_n) + \mu(a_n, b_n) + \mu(b_n, b_m),$$

для $n, m \in \mathbf{N}$ і тому $|\mu(a_n, b_n) - \mu(a_m, b_m)| \leq \mu(a_n, a_m) + \mu(b_m, b_n)$.

Отже, для фундаментальних послідовностей $\{a_n\}, \{b_n\} \subset M$ послідовність чисел $\alpha_n = \mu(a_n, b_n) \subset \overline{\mathbf{R}}_+$ є фундаментальною і має границю $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

Таким чином, для $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{M}$ таких, що $\{a_n\} \in \bar{a}, \{b_n\} \in \bar{b}$ визначено відображення

$$\bar{\mu}(\bar{a}, \bar{b}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(a_n, b_n) \quad : \quad \overline{M} \times \overline{M} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+.$$

Перевіримо, що це визначення не залежить від вибору $\{a_n\} \in \bar{a}$ і $\{b_n\} \in \bar{b}$. Нехай $\{a_n\}, \{a'_n\} \in \bar{a}$ і $\{b_n\}, \{b'_n\} \in \bar{b}$ (тобто $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ і $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$). Тоді

$$\mu(a'_n, b'_n) \leq \mu(a'_n, a_n) + \mu(a_n, b_n) + \mu(b_n, b'_n),$$

$$\mu(a_n, b_n) \leq \mu(a_n, a'_n) + \mu(a'_n, b'_n) + \mu(b'_n, b_n)$$

та

$$|\mu(a_n, b_n) - \mu(a'_n, b'_n)| \leq \mu(a_n, a'_n) + \mu(b'_n, b_n).$$

Отже

$$\bar{\mu}(\bar{a}, \bar{b}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(a'_n, b'_n)$$

(оскільки $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ і $\{b_n\} \sim \{b'_n\} \Leftrightarrow \lim \mu(a_n, a'_n) = 0$ і $\lim \mu(b_n, b'_n) = 0$), тобто це визначення відображення $\bar{\mu} : \overline{M} \times \overline{M} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ є коректним (не залежить від вибору $\{a_n\} \in \bar{a}$ і $\{b_n\} \in \bar{b}$).

Далі, маємо

$$\bar{\mu}(\bar{a}, \bar{b}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(a_n, b_n) = 0 \Leftrightarrow \{a_n\} \sim \{b_n\} \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b},$$

$$\bar{\mu}(\bar{a}, \bar{b}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(b_n, a_n) = \bar{\mu}(\bar{b}, \bar{a}).$$

Крім того, із нерівності трикутника

$$\mu(a_n, b_n) \leq \mu(a_n, c_n) + \mu(c_n, b_n)$$

впливає (після переходу до $\lim_{n \rightarrow \infty}$), що

$$\bar{\mu}(\bar{a}, \bar{b}) \leq \bar{\mu}(\bar{a}, \bar{c}) + \bar{\mu}(\bar{c}, \bar{b}).$$

Таким чином, доведено, що відображення $\bar{\mu}$ є метрикою на множині \bar{M} та $(\bar{M}, \bar{\mu})$ є метричним простором.

Кожному $a \in M$ зіставимо у відповідність послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty}$. Такі послідовності називаються *стаціонарними* і є фундаментальними. Отже визначене взаємно однозначне відображення φ із M в $M' \subset \bar{M}$, де M' є множиною класів фундаментальних послідовностей, що містять стаціонарні послідовності.

Для $a, b \in M$ маємо $\bar{a} = \varphi(a), \bar{b} = \varphi(b)$ належать M' і

$$\bar{\mu}(\varphi(a), \varphi(b)) = \bar{\mu}(\bar{a}, \bar{b}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(a, b) = \mu(a, b),$$

де $\{a\}_{n=1}^{\infty} \in \bar{a}$ і $\{b\}_{n=1}^{\infty} \in \bar{b}$. Таким чином, відображення φ є ізометрією і метричні простори (M, μ) і $(M', \bar{\mu})$ можна ототожнити.

Перевіримо, що M' щільно в $(\bar{M}, \bar{\mu})$. Нехай $\bar{a} \in \bar{M}$ і $\{a_n\} \in \bar{a}$. Для кожного $k \in \mathbf{N}$ позначимо $\bar{a}_k = \varphi(a_k) \in M'$. За визначенням

$$\bar{\mu}(\bar{a}, \bar{a}_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(a_n, a_k).$$

Послідовність $\{a_n\}$ є фундаментальною, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad : \quad \mu(a_n, a_k) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, k \geq N_\varepsilon.$$

Отже

$$\bar{\mu}(\bar{a}, \bar{a}_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(a_n, a_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall k \geq N_\varepsilon,$$

тобто $\forall \bar{a} \in \bar{M}$ і $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{b}_\varepsilon \in M' : \bar{\mu}(\bar{a}, \bar{b}_\varepsilon) < \varepsilon$ (M' щільно в $(\bar{M}, \bar{\mu})$).

Перевіримо, що $(\bar{M}, \bar{\mu})$ є повним. Нехай $\{\bar{a}_n\} \subset \bar{M}$ є фундаментальною послідовністю. Для кожного $n \in \mathbf{N}$ можна знайти $\bar{b}_n = \varphi(b_n) \in M'$ таке, що

$$\bar{\mu}(\bar{a}_n, \bar{b}_n) < \frac{1}{n},$$

де $\bar{b}_n = \varphi(b_n)$ є стаціонарною послідовністю відповідною $b_n \in M$ для $n \in \mathbf{N}$.

Послідовність $\{\bar{b}_n\} \subset \bar{M}$ є фундаментальною. Дійсно, для $\varepsilon > 0$ маємо

$$\bar{\mu}(\bar{b}_n, \bar{b}_m) \leq \bar{\mu}(\bar{b}_n, \bar{a}_n) + \bar{\mu}(\bar{a}_n, \bar{a}_m) + \bar{\mu}(\bar{a}_m, \bar{b}_m) < \frac{1}{n} + \bar{\mu}(\bar{a}_n, \bar{a}_m) + \frac{1}{m} \leq \varepsilon$$

для достатньо великих n і m , оскільки $\{\bar{a}_n\} \subset \bar{M}$ є фундаментальною.

Послідовність $\bar{b}_n = \varphi(b_n) \in M'$ є стаціонарною і тому

$$\bar{\mu}(\bar{b}_n, \bar{b}_m) = \mu(b_n, b_m).$$

Таким чином, послідовність $\{b_n\} \subset M$ є фундаментальною і існує елемент $\bar{b} \in \bar{M}$ такий що $\{b_n\} \in \bar{b}$. Тоді, для $\varepsilon > 0$ маємо

$$\bar{\mu}(\bar{b}, \bar{a}_n) \leq \bar{\mu}(\bar{b}, \bar{b}_n) + \bar{\mu}(\bar{b}_n, \bar{a}_n) < \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(b_k, b_n) + \frac{1}{n} \leq \mu(b_k, b_n) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

для достатньо великих k і n , оскільки $\{b_n\} \subset M$ є фундаментальною.

Отже, метричний простір $(\bar{M}, \bar{\mu})$ є повним.

Перевіримо, що поповнення (\bar{M}, μ) для (M, μ) є єдиним (точніше, що поповнення $(\bar{M}, \bar{\mu})$ для $(M', \bar{\mu})$ є єдиним, проте $(M', \bar{\mu})$ і (M, μ) ототожнюються).

Нехай (\tilde{M}, μ) є іншим повним метричним простором таким, що M щільно в (\tilde{M}, μ) . Тоді для $\tilde{a} \in \tilde{M}$ існує послідовність $\{a_n\} \subset M \subset \tilde{M}$ така, що

$$\mu(\tilde{a}, a_n) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{тобто} \quad a_n \rightarrow \tilde{a}).$$

Послідовність $\{a_n\} \subset M$ є фундаментальною і визначає єдиний елемент $\bar{a} \in \bar{M}$. Таким чином, кожному $\tilde{a} \in \tilde{M}$ відповідає єдиний елемент $\bar{a} \in \bar{M}$.

Нехай $\bar{b} \in \bar{M}$. Тоді визначена фундаментальна послідовність $\{b_n\} \subset M$ така, що $\{b_n\} \in \bar{b}$. Простір (\tilde{M}, μ) є повним. Тому існує $\tilde{b} \in \tilde{M}$ таке, що

$$\mu(\tilde{b}, b_n) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{тобто} \quad b_n \rightarrow \tilde{b}).$$

Таким чином, кожному $\bar{b} \in \bar{M}$ відповідає єдиний елемент $\tilde{b} \in \tilde{M}$ і

$$\bar{\mu}(\bar{a}, \bar{b}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(a_n, b_n) = \mu(\tilde{a}, \tilde{b}).$$

Отже відображення $\bar{a} \mapsto \tilde{a}$ із \bar{M} в \tilde{M} є ізометрією.

Якщо метричний простір (M, μ) є повним, тоді $(\bar{M}, \mu) = (M, \mu)$ є єдиним поповненням для (M, μ) . \triangleright

В2.6. Метричний простір (M, μ) називається *компактним*, якщо

$$\forall \{a_n\} \subset M \quad \exists \{a_{n_k}\} \subset \{a_n\} : a_{n_k} \rightarrow a \in M \quad \text{при} \quad n_k \rightarrow \infty.$$

Наприклад, замкнута обмежена множина $M \subset \mathbf{R}^n$ є компактним метричним простором (M, μ_0) , де $\mu_0 = |a - b|$ для $a, b \in M$.

В2.7. Множина L називається *лінійним* простором над \mathbf{C} (або \mathbf{R}), якщо

(I) на L визначена операція додавання $L \times L \ni (a, b) \mapsto a + b \in L$ така, що

- 1) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in L$;
- 2) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in L$;
- 3) $\exists 1 \theta \in L : a + \theta = a \quad \forall a \in L$;
- 4) $\forall a \in L \quad \exists 1 (-a) \in L : a + (-a) = \theta$;

(II) на L визначена операція множення на числа $\alpha \in \mathbf{C}$ (або $\alpha \in \mathbf{R}$) така, що

- 5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{C} \quad \forall a \in L$;
- 6) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad \forall \alpha \in \mathbf{C} \quad \forall a, b \in L$;
- 7) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{C} \quad \forall a \in L$;
- 8) $1a = a \quad \forall a \in L$.

В2.8. *Нормою* на лінійному просторі L називається всяке відображення

$$\eta : L \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+ = \{r \in \mathbf{R} : r \geq 0\}$$

таке, що для $\forall \alpha \in \mathbf{C}$ та $\forall a, b \in L$ маємо

- 1) $\eta(a) = 0 \Leftrightarrow a = \theta$;
- 2) $\eta(\alpha a) = |\alpha| \eta(a)$;
- 3) $\eta(a + b) \leq \eta(a) + \eta(b)$.

Лінійний простір L із деякою нормою $\eta(\cdot)$ називається *нормованим простором* (L, η) . Зазвичай позначають $\eta(a) = \|a\|_L$ або $\eta(a) = \|a\|$.

Кожен нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ є метричним простором (L, μ) із метрикою

$$\mu(a, b) = \|a - b\|_L \quad \forall a, b \in L.$$

Таким чином, визначена повнота нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$.

В2.9. Повний нормований простір називається *банаховим простором*.

Множина $A \subset L$ лінійного простору називається *лінійним многовидом*, якщо

$$a_1, \dots, a_m \in A \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m \in A \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbf{C}.$$

В2.10. Множина $A \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *обмеженою*, якщо

$$\exists M \in \mathbf{R}_+ : \quad \|a\|_L \leq M \quad \forall a \in A.$$

В2.11. Відображення $\varphi : L \rightarrow H$ лінійних просторів L і H над \mathbf{C} називається (лінійним) *оператором*, якщо

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(\alpha a) = \alpha \varphi(a), \quad \forall \alpha \in \mathbf{C}, \quad \forall a, b \in L.$$

В2.12. Оператор $\varphi : L \rightarrow H$ нормованих просторів $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(H, \|\cdot\|_H)$ називається *обмеженим*, якщо

$$\exists M \in \mathbf{R}_+ : \quad \|\varphi(a)\|_H \leq M \|a\|_L \quad \forall a \in L.$$

Найменша із констант $M \in \mathbf{R}_+$ ($:\|\varphi(a)\|_H \leq M \|a\|_L$) називається нормою оператора φ та позначається $\|\varphi\|_B$.

Теорема 2.13. Оператор $\varphi : L \rightarrow H$ нормованих просторів $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(H, \|\cdot\|_H)$ є обмеженим \Leftrightarrow оператор $\varphi : L \rightarrow H$ є неперервним. $\triangleleft \triangleright$

Множина всіх обмежених операторів $\varphi : L \rightarrow H$ для нормованих просторів $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(H, \|\cdot\|_H)$ позначається $B(L, H)$.

Теорема 2.14. Множина $B(L, H)$ із природними операціями є лінійним простором. $(B(L, H), \|\cdot\|_B)$ є нормованим простором та

$$\|\varphi\|_B = \sup_{\|a\|_L \leq 1} \|\varphi(a)\|_H = \sup_{a \neq \theta} \frac{\|\varphi(a)\|_H}{\|a\|_L} \quad \forall \varphi \in B(L, H).$$

Простір $(B(L, H), \|\cdot\|_B)$ є банаховим, якщо $(H, \|\cdot\|_H)$ є банаховим. $\triangleleft \triangleright$

Зокрема, нормований простір $(B(L, \mathbf{C}), \|\cdot\|_B)$ є банаховим, цей простір називається *спряженим* (або *дуальним*) до $(L, \|\cdot\|_L)$ і позначається L^* ($= (B(L, \mathbf{C}))$). Елементи $\varphi \in L^*$ називаються *функціоналами*.

Аналогічно визначається *другий* спряжений простір $L^{**} = (L^*)^*$ для $(L, \|\cdot\|_L)$ та

$$L \subset L^{**}.$$

В2.15. Нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *рефлексивним*, якщо

$$L = L^{**}.$$

В2.16. Лінійний простір L над \mathbf{C} називається *n -вимірним*, якщо існують лінійно незалежні $e_1, \dots, e_n \in L$ такі, що $\forall a \in L \setminus \{\theta\}$ елементи $a, e_1, \dots, e_n \in L$ є лінійно залежними (тобто $\exists \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C} : \alpha a + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \theta$).

В цьому випадку елементи $e_1, \dots, e_n \in L$ називаються *базисом* L та

$$L = \text{Lin} \{e_1, \dots, e_n\} \equiv \{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n : \alpha_i \in \mathbf{C}, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Дві норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ на лінійному просторі L називаються *еквівалентними*, якщо $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$:

$$\alpha \|a\|_1 \leq \|a\|_2 \leq \beta \|a\|_1 \quad \forall a \in L.$$

Нехай норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ на лінійному просторі L є еквівалентними. Тоді послідовність $\{a_n\} \subset L$ збігається (фундаментальна) в $(L, \|\cdot\|_1)$

$$\Leftrightarrow \text{послідовність } \{a_n\} \text{ збігається (фундаментальна) в } (L, \|\cdot\|_2).$$

В цьому випадку нормовані простори $(L, \|\cdot\|_1)$ і $(L, \|\cdot\|_2)$ також називаються *еквівалентними*.

Крім того, нормовані простори $(L, \|\cdot\|_L)$ і $(H, \|\cdot\|_H)$ називаються *еквівалентними*, якщо існує лінійна ізометрія $\varphi: L \rightarrow H$, тобто φ є оператором і

$$\|a\|_L = \|\varphi(a)\|_H \quad \forall a \in L.$$

Еквівалентні простори ототожнюються в теорії нормованих просторів.

Теорема 2.17. *Кожні дві норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ на \mathbf{C}^n (відповідно на \mathbf{R}^n) є еквівалентними. $\triangleleft \triangleright$*

Теорема 2.18. *Кожен нормований n -вимірний простір $(L, \|\cdot\|_L)$ над \mathbf{C} (відповідно над \mathbf{R}) є еквівалентним \mathbf{C}^n (відповідно \mathbf{R}^n). $\triangleleft \triangleright$*

Позначимо через $C^0(\{1, \dots, n\}, \mathbf{C})$ множину функцій (відображень) із множини $\{1, \dots, n\}$ в \mathbf{C} .

(**Завдання для самостійної роботи:** перевірити, що такі функції є неперервними.)

Існує природне взаємно однозначне відображення

$$\varphi: C^0(\{1, \dots, n\}, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}^n.$$

Дійсно, $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbf{C}$ зіставляє кожному $i \in \{1, \dots, n\}$ деяке число a_i яке визначає елемент a_i для $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{C}^n$.

Таким чином, простір $C^0[0, 1]$ є нескінченновимірним, оскільки множина $[0, 1]$ є нескінченною. Це можна перевірити і таким чином, для кожного $k \in \mathbf{N}$ мономи $1, x, x^2, \dots, x^k \in C^0[0, 1]$ є лінійно незалежними і утворюють зчислений базис в

$$M[0, 1] = \{m \in C^0[0, 1] : m \text{ є поліномом на } [0, 1]\}.$$

Теорема 2.19 (про поповнення нормованих просторів). *Кожен нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ має єдине лінійне поповнення $(\bar{L}, \|\cdot\|_L)$.*

\triangleleft Відомо, що $(L, \|\cdot\|_L)$ має єдине поповнення \tilde{L} (що складається із класів еквівалентних фундаментальних послідовностей) як метричний простір і залишається перевірити, що \tilde{L} є лінійним простором. Але, якщо $\{a_n\}, \{b_n\} \subset L$

фундаментальні послідовності, тоді $\{a_n + b_n\} \subset L$ і $\{\alpha a_n\} \subset L$ для деякого $\alpha \in \mathbf{C}$ також є фундаментальними послідовностями. Тобто $\overline{L} = \tilde{L}$. \triangleright

Приклад 2.20. Розглянемо для $a, b \in \mathbf{R} : a < b$ множину

$$C^0[a, b] = \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C} : f \text{ є неперервною на } [a, b] \}$$

із нормами

$$\|f\|_0 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

(Завдання для самостійної роботи: перевірити, що $\|\cdot\|_0$ і $\|\cdot\|_p$ для фіксованого p є нормами на лінійному просторі $C^0[a, b]$.)

Відомо, що $(C^0[a, b], \|\cdot\|_0)$ є банаховим простором.

З іншого боку, $(C^0[a, b], \|\cdot\|_p)$ не є повним нормованим простором. Дійсно, розглянемо, наприклад, $(C^0[-1, 1], \|\cdot\|_1)$ і послідовність неперервних функцій

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{для } x \in [-1, -\frac{1}{n}], \\ nx, & \text{для } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ 1, & \text{для } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Для кожних $n, m \in \mathbf{N}$ маємо

$$\int_{-1}^1 |f_{n+m}(x) - f_n(x)| dx \leq$$

$$\leq \int_{-1}^1 |f_{n+m}(x) - \operatorname{sgn}(x)| dx + \int_{-1}^1 |\operatorname{sgn}(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{n+m} + \frac{1}{n}.$$

Таким чином, послідовність $\{f_n\}$ є фундаментальною в $(C^0[-1, 1], \|\cdot\|_1)$ і має границю $\operatorname{sgn}(x)$, яка не є неперервною функцією.

Зокрема, норми $\|\cdot\|_0$ та $\|\cdot\|_p$ на $C^0[a, b]$ не є еквівалентними.

В2.21. Поповнення $(C^0[a, b], \|\cdot\|_p)$ для фіксованого p (при $1 \leq p < \infty$) називається простором Лебега інтегрованих у ступені p функцій і позначається

$$(L^p(a, b), \|\cdot\|_p) = (\overline{C^0[a, b]}, \|\cdot\|_p).$$

3. Гільбертові простори.

В3.1. *Спряжено-білінійним* (або *півторалінійним*) функціоналом на лінійному просторі H над \mathbf{C} називається всяке відображення

$$\varphi : H \times H \rightarrow \mathbf{C}$$

таке, що для $\forall \alpha, \beta, \delta \in \mathbf{C}$ і $\forall a, b, d \in H$ маємо

$$1) \quad \varphi(\alpha a + \beta b, d) = \alpha \varphi(a, d) + \beta \varphi(b, d);$$

$$2) \quad \varphi(a, \beta b + \delta d) = \bar{\beta} \varphi(a, b) + \bar{\delta} \varphi(a, d),$$

де риса над числом позначає комплексне спряження.

В3.2. *Спряжено-білінійний* функціонал на лінійному просторі H називається *скалярним* (або *внутрішнім*) добутком, якщо для $\forall a, b \in H$ цей функціонал задовольняє умовам

$$i) \quad \varphi(a, b) = \overline{\varphi(b, a)};$$

$$ii) \quad \varphi(a, a) \geq 0;$$

$$iii) \quad \varphi(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = \theta.$$

Лінійний простір H із деяким скалярним добутком $\varphi(\cdot, \cdot)$ називається *передгільбертовим простором* (H, φ) .

Лінійний простір $L \subset H$ називається *підпростором* передгільбертового простора (H, φ) і є передгільбертовим простором (L, φ) .

Зазвичай позначають $\varphi(a, b) = \langle a, b \rangle_H$, $\varphi(a, b) = (a, b)_H$ або $\varphi(a, b) = \langle a, b \rangle$.

Наприклад, на \mathbf{C}^n скалярний добуток можна визначити рівністю

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k \quad \text{для} \quad a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{C}^n$$

або рівністю

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k,h=1}^n A_{kh} a_k \bar{b}_h \quad \text{для} \quad a, b \in \mathbf{C}^n, \quad A_{kh} \in \mathbf{C}, \quad k, h = 1, \dots, n,$$

де матриця $A = \{A_{kh}\}_{k,h=1}^n$ є ермітовою і додатною, тобто $A_{kh} = \overline{A_{hk}}$ і

$$\sum A_{kh} a_k \bar{a}_h > 0 \quad \text{для} \quad a \neq \theta.$$

На множині квадратично сумовних послідовностей

$$l^2(\mathbf{C}) = \{ a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty, \quad a_k \in \mathbf{C}, \quad k = 1, \dots, n, \dots \}$$

скалярний добуток можна визначити, наприклад, рівністю

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k \quad \text{для} \quad a = (a_1, \dots, a_n, \dots), \quad b = (b_1, \dots, b_n, \dots) \in l^2(\mathbf{C})$$

(де збіжність ряду впливає із відомої оцінки $|a_k \bar{b}_k| \leq \frac{1}{2} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$).

Теорема 3.3 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца). Для передгілбертового простора $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ визначимо

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}, \quad a \in H.$$

Тоді

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|, \quad a, b \in H.$$

У випадку $b = \theta$ ця нерівність очевидна ($0 \leq 0$).

Для $\alpha \in \mathbf{C}$ і $a, b \in H, b \neq \theta$ маємо

$$\langle a + \alpha b, a + \alpha b \rangle \geq 0$$

або

$$\langle a, a \rangle + \bar{\alpha} \langle a, b \rangle + \alpha \langle b, a \rangle + |\alpha|^2 \langle b, b \rangle \geq 0.$$

Визначаючи

$$\alpha = - \frac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle},$$

отримуємо (оскільки $|\alpha|^2 = \alpha \bar{\alpha}$), що

$$\langle a, a \rangle - \frac{|\langle a, b \rangle|^2}{\langle b, b \rangle} \geq 0. \quad \triangleright$$

Використовуючи цю нерівність, можна визначити кут ϕ між двома ненульовими елементами $a, b \in H$ із рівності

$$\cos(\phi) = \frac{|\langle a, b \rangle|}{\|a\| \|b\|}.$$

Зокрема, елементи $a, b \in H$ називаються *ортogonalними*, якщо

$$\langle a, b \rangle = 0.$$

Система елементів $e_\nu \in H$ для деякої множини індексів $\nu \in \Lambda$ називається *ортонормованою*, якщо

$$\langle e_\nu, e_\kappa \rangle = 0 \quad \text{для } \nu \neq \kappa \quad \text{і} \quad \|e_\nu\| = 1 \quad \text{для } \nu, \kappa \in \Lambda.$$

Теорема 3.4. Для передгілбертового простора $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ відображення

$$\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle} : H \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$$

є нормою, тобто

$$1) \quad \|a\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \theta; \quad 2) \quad \|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|;$$

$$3) \quad \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

◁ Умови 1) і 2) виходять із визначення скалярного добутку. Для перевірки умови 3), використовуючи нерівність Коші-Буняковського-Шварца, маємо

$$\begin{aligned} \|a + b\|^2 &= \langle a + b, a + b \rangle \leq |\langle a, a \rangle| + |\langle a, b \rangle| + |\langle b, a \rangle| + |\langle b, b \rangle| \leq \\ &\leq \|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2 = (\|a\| + \|b\|)^2. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Таким чином, $(H, \|\cdot\|)$ є нормованим простором.

Передгілбертові простори $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ і $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ називаються *еквівалентними*, якщо вони еквівалентні як нормовані простори $(H_1, \|\cdot\|_1)$ і $(H_2, \|\cdot\|_2)$.

Еквівалентні простори ототожнюються в теорії гільбертових просторів.

В3.5. Передгілбертів простір $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ називається *гільбертовим*, якщо нормований простір $(H, \|\cdot\|)$ є повним (та нескінченновимірним).

Теорема 3.6 (про поповнення гільбертових просторів). *Кожен передгілбертів простір $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ має єдине гільбертове поповнення $(\overline{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.*

◁ Відомо, що $(H, \|\cdot\|)$ має єдине поповнення \widetilde{H} (що складається із класів еквівалентних фундаментальних послідовностей) як нормований простір і залишається перевірити, що \widetilde{H} є гільбертовим простором.

Нехай $\tilde{a}, \tilde{b} \in \widetilde{H}$ і $\{a_n\}, \{b_n\} \subset H$ фундаментальні послідовності такі, що $\{a_n\} \in \tilde{a}, \{b_n\} \in \tilde{b}$. Визначимо

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n, b_n \rangle.$$

Ця границя існує, оскільки для $n, m \in \mathbf{N}$

$$|\langle a_n, b_n \rangle - \langle a_m, b_m \rangle| \leq \|a_m - a_n\| \|b_m\| + \|b_m - b_n\| \|a_n\|,$$

тому послідовність чисел $\{\langle a_n, b_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ є фундаментальною і має границю.

Аналогічно перевіряється, що ця границя не залежить від вибору послідовностей $\{a_n\} \in \tilde{a}, \{b_n\} \in \tilde{b}$ і визначає скалярний добуток на \widetilde{H} . Тобто $\overline{H} = \widetilde{H}$. ▷

Приклад 3.7. Розглянемо для $a, b \in \mathbf{R} : a < b$ множину

$$C^0[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C} : f \text{ є неперервною на } [a, b]\}$$

із скалярним добутком

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall f, g \in C^0[a, b].$$

(Завдання для самостійної роботи: перевірити, що $\langle f, g \rangle$ є скалярним добутком на лінійному просторі $C^0[a, b]$.)

Таким чином $(C^0[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є передгільбертовим простором і нерівність Коші-Буняковського-Шварца має вигляд

$$\left| \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f, g \in C^0[a, b].$$

Норма на цьому просторі визначається рівністю

$$\|f\| = \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Відомо, що $(C^0[a, b], \|\cdot\|_2)$ не є гільбертовим (тобто повним) простором, оскільки існують послідовності, що збігаються до функції $\operatorname{sgn}(x - (a+b)/2) \notin C^0[a, b]$.

В3.8. Поповнення $(C^0[a, b], \|\cdot\|_2)$ називається простором *квадратично інтегрованих* функцій і позначається

$$(L^2(a, b), \|\cdot\|_2) = (\overline{C^0[a, b]}, \|\cdot\|_2).$$

Таким чином, простір $(L^2(a, b), \|\cdot\|_2)$ складається із "функцій", які можуть бути наближені неперервними функціями, тобто для $f \in L^2(a, b)$ та

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in C^0[a, b] : \quad \|f - f_\varepsilon\|_2 < \varepsilon.$$

Зокрема, для $f \in L^2(a, b)$ є визначеним інтеграл $\int_a^b f dx$, як границя інтегралів від $\int_a^b f_\varepsilon dx$, тобто рівністю

$$\int_a^b f(x) dx = \langle f, 1 \rangle.$$

Такий інтеграл називається *інтегралом Лебега*.

Нехай $L \subset H$ є підпростір передгільбертового простора $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Елемент $a \in H$ називається *ортгоналим* підпростору L , якщо

$$\langle a, l \rangle = 0 \quad \forall l \in L.$$

В цьому випадку пишуть $a \perp L$.

Нехай $a \in H$. Елемент $l_a \in L$ називається *ортгоналичною проекцією* a в підпростір $L \subset H$, якщо $\langle a - l_a, l \rangle = 0 \quad \forall l \in L$.

Коли така проекція існує, то пишуть $l_a = \operatorname{Pr}_L(a)$ і така проекція l_a є єдиною. Дійсно, якщо $l_1, l_2 \in L$ такі, що

$$\langle a - l_1, l \rangle = 0, \quad \langle a - l_2, l \rangle = 0 \quad \forall l \in L,$$

тоді $\langle l_2 - l_1, l \rangle = 0 \quad \forall l \in L$ і $\langle l_2 - l_1, l_2 - l_1 \rangle = 0$, тобто $l_2 = l_1$.

(Завдання для самостійної роботи: перевірити, що $l_{\alpha a} = \alpha l_a$ і $l_{a+b} = l_a + l_b$, тобто $\operatorname{Pr}_L(\alpha a) = \alpha \operatorname{Pr}_L(a)$ і $\operatorname{Pr}_L(a+b) = \operatorname{Pr}_L(a) + \operatorname{Pr}_L(b)$ для $a, b \in H$ і $\alpha \in \mathbf{C}$.)

Лема 3.9 (закон паралелограма). *Нехай $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є передгільбертовим простором. Тоді*

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 \quad \forall a, b \in H.$$

◁ Перевіряється безпосередньо, оскільки $\|a + b\|^2 = \langle a + b, a + b \rangle$. ▷

Теорема 3.10 (про існування єдиної ортогональної проєкції). *Нехай $L \subset H$ є повний підпростором передгільбертового простора $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ та $a \in H$. Тоді*

$$\exists ! l_a = \text{Pr}_L(a) \quad \text{і} \quad \|a - l_a\| = \inf_{l \in L} \|a - l\|.$$

◁ Позначимо через η_k мінімізуючу послідовність, тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a - \eta_k\| = d = \inf_{l \in L} \|a - l\|. \quad (3.1)$$

Існування такої послідовності впливає із визначення інфімуму. Із закону паралелограма

$$\|d + b\|^2 + \|d - b\|^2 = 2\|d\|^2 + 2\|b\|^2 \quad \forall d, b \in L,$$

при $d = a - \eta_k$ і $b = a - \eta_h$, отримуємо

$$\|\eta_k - \eta_h\|^2 = 2\|a - \eta_k\|^2 + 2\|a - \eta_h\|^2 - 4\left\|a - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h)\right\|^2.$$

Множина L є підпростором, тому $\frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h) \in L$ і $d^2 \leq \left\|a - \frac{1}{2}(\eta_k + \eta_h)\right\|^2$. Отже

$$\|\eta_k - \eta_h\|^2 \leq 2\|a - \eta_k\|^2 + 2\|a - \eta_h\|^2 - 4d^2$$

і послідовність $\{\eta_k\} \subset L$ є фундаментальною через (3.1).

Таким чином, існує $l_a \in L$ таке, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = l_a$ і

$$\|a - l_a\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|a - \eta_k\| = d.$$

Припустимо, що $l \in L$ і $l \neq \theta$. Тоді $\eta_k + \varepsilon l \in L$ для $\varepsilon \in \mathbb{C}$ і

$$\|a - (\eta_k + \varepsilon l)\|^2 \geq d^2,$$

тобто

$$\|a - \eta_k\|^2 - \bar{\varepsilon} \langle a - \eta_k, l \rangle - \varepsilon \langle l, a - \eta_k \rangle + |\varepsilon|^2 \|l\|^2 \geq d^2.$$

При $\varepsilon = \frac{\langle a - \eta_k, l \rangle}{\|l\|^2}$ маємо

$$\|a - \eta_k\|^2 - d^2 \geq \frac{|\langle a - \eta_k, l \rangle|^2}{\|l\|^2}.$$

Звідки при $k \rightarrow \infty$ отримуємо $\langle a - l_a, l \rangle = 0 \quad \forall l \in L. \triangleright$

Лема 3.11. Нехай $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є передгілбертовим простором та $a \in H$. Тоді функціонал

$$f(x) = \langle x, a \rangle \quad \forall x \in H$$

є лінійним і обмеженим (тобто $f \in H^*$). Крім того

$$\|f\|_B = \|a\|_H = \sqrt{\langle a, a \rangle}.$$

◁ Лінійність $f(\cdot)$ випливає із лінійності $\langle \cdot, a \rangle$, а обмеженість із нерівності

$$|f(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|x\|_H \|a\|_H \quad \forall x \in H.$$

Крім того $f(a) = \|a\|_H \|a\|_H$, тобто $\|f\|_B = \|a\|_H. \triangleright$

Лема 3.12. Нехай $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є передгілбертовим простором і функціонал $f \in H^*$ такий, що

$$f(x) = \langle x, a \rangle \quad \forall x \in H.$$

Тоді $a \in H$ визначено однозначно.

◁ Нехай $a, b \in H$ такі, що

$$f(x) = \langle x, a \rangle, \quad f(x) = \langle x, b \rangle \quad \forall x \in H.$$

Тоді $\langle x, a - b \rangle = 0 \quad \forall x \in H$. Зокрема $\langle a - b, a - b \rangle = 0$, тобто $a = b. \triangleright$

Теорема 3.13 (Рісса). Нехай $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є гільбертовим простором і $f \in H^*$. Тоді

$$\exists 1 \ a \in H : \quad f(x) = \langle x, a \rangle \quad \forall x \in H.$$

◁ Позначимо

$$L = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

Із лінійності f випливає, що L є лінійним підпростором в H . Крім того, L є повним. Дійсно, якщо $\{a_n\} \subset L$ є фундаментальною послідовністю, тоді

$$\exists a \in H : a_n \rightarrow a,$$

оскільки H є повним, та $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$, тобто $a \in L$.

Якщо $L = H$, тоді $f(x) = 0 \quad \forall x \in H$ і

$$\exists 1 \theta \in H : f(x) = \langle x, \theta \rangle \quad \forall x \in H.$$

Нехай $L \neq H$, тоді $\exists a \in H$ такий, що $f(a) \neq 0$.

Позначимо через $l_a \in L$ ортогональну проєкцію a на L і визначимо

$$b = a - l_a.$$

Тоді $\langle b, l \rangle = 0 \quad \forall l \in L$ та $f(b) = f(a) \neq 0$.

Із лінійності f випливає, що

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(b)} b\right) = 0 \quad \forall x \in H.$$

Таким чином, маємо

$$\forall x \in H \quad x - \frac{f(x)}{f(b)} b \in L$$

і тому

$$\left\langle x - \frac{f(x)}{f(b)} b, b \right\rangle = 0 \quad \forall x \in H$$

за визначенням ортогональної проєкції. Отже

$$\langle x, b \rangle = f(x) \frac{\|b\|^2}{f(b)} \quad \forall x \in H$$

і позначаючи $a = \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b$ отримуємо, що

$$\exists 1 a \in H : f(x) = \langle x, a \rangle \quad \forall x \in H. \quad \triangleright$$

Таким чином, множину лінійних обмежених функціоналів H^* можна ототожити із H . Зокрема, $H = H^{**}$, тобто гільбертові простори є рефлексивними.

В3.14. Нехай $X, Y \subset H$ є заданими підпросторами лінійного простору H . Тоді $H = X \oplus Y$ є прямою сумою X та Y , якщо

$$\forall a \in H \quad \exists 1 x_a, y_a : \quad a = x_a + y_a, \quad \text{де } x_a \in X \quad \text{і } y_a \in Y.$$

Крім того, якщо H є гільбертовим простором $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ та $X \perp Y$ (тобто $\langle x, y \rangle_H = 0$ для $x \in X, y \in Y$), тоді $H = X \oplus Y$ називається прямою ортогональною сумою X та Y .

Теорема 3.15 (про розкладання у пряму ортогональну суму). Нехай $L \subset H$ є повним підпростором гільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$. Тоді

$$H = L \oplus L^\perp,$$

де $L^\perp = \{h \in H : \langle h, l \rangle_H = 0 \quad \forall l \in L\}$.

◁ Дійсно, визначимо $l_a = \text{Pr}_L(a) \in L$ та $h_a = a - l_a \in L^\perp$. Тоді $a = l_a + h_a$. ▷

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що

$$L^2(0, 1) = \mathbf{C} \oplus \{h \in L^2(0, 1) : \int_0^1 h(x) dx = 0\}.)$$

Теорема 3.16 (про повноту ядра оператора). Нехай L є повним нормованим простором, H є нормованим простором і $A \in B(L, H)$. Тоді

$$\text{Ker } A = \{x \in L : Ax = 0\} \quad \text{є повним підпростором } L.$$

◁ Завдання для самостійної роботи. ▷

Теорема 3.17 (про повноту образа оператора). Нехай L і H є повними нормованими просторами, $A \in B(L, H)$ і існує така додатна стала α , що

$$\alpha \|x\|_L \leq \|Ax\|_H \quad \forall x \in L.$$

Тоді $\text{Im } A = \{y \in H : y = Ax \quad \text{для } x \in L\}$ є повним підпростором H .

Крім того, для кожного $y \in \text{Im } A \quad \exists 1 x \in L : Ax = y$.

◁ Завдання для самостійної роботи. ▷

4. Простори Соболева.

Теорема 4.1 (про продовження операторів по неперервності). *Нехай оператор $A \in B(L, Y)$, де Y є банаховим простором та лінійний простір $L \subset X$ є щільним в лінійному нормованому просторі X .*

Тоді $\exists \bar{A} \in B(X, Y)$:

$$\bar{A}(x) = A(x) \quad \forall x \in L$$

i

$$\|\bar{A}\|_{B(X,Y)} = \|A\|_{B(L,Y)}.$$

◁ Нехай $x \in X$ та $x \notin L$. Тоді існує $\{x_n\} \subset L$ така, що

$$x_n \rightarrow x,$$

оскільки L є щільним в X . Із нерівності

$$\|A(x_n) - A(x_m)\|_Y \leq \|A\|_{B(L,Y)} \|x_n - x_m\|_L$$

впливає, що послідовність $\{A(x_n)\} \subset Y$ є фундаментальною і має границю, оскільки Y є банаховим простором. Визначимо

$$\bar{A}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n)$$

і перевіримо, що це визначення не залежить від вибору послідовності $\{x_n\} \subset L$.

Нехай $\{x'_n\} \subset L$ така, що $x'_n \rightarrow x$ і

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n), \quad y' = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x'_n).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|y - y'\|_Y &\leq \|y - A(x_n)\|_Y + \|A(x_n) - A(x'_n)\|_Y + \|A(x'_n) - y'\|_Y \leq \\ &\leq \|y - A(x_n)\|_Y + \|A\|_{B(L,Y)} \|x_n - x'_n\|_L + \|A(x'_n) - y'\|_Y \rightarrow 0, \end{aligned}$$

тобто $y = y'$.

Лінійність \bar{A} випливає із лінійності A та лінійності границі. Крім того, маємо

$$\|A(x_n)\|_Y \leq \|A\|_{B(L,Y)} \|x_n\|_L$$

і тому

$$\|\bar{A}(x)\|_Y \leq \|A\|_{B(L,Y)} \|x\|_L,$$

тобто $\|\bar{A}\|_{B(X,Y)} \leq \|A\|_{B(L,Y)}$. З іншого боку, при продовженні оператора норма цього оператора не може зменшитися, отже

$$\|\bar{A}\|_{B(X,Y)} = \|A\|_{B(L,Y)}.$$

Нехай $\bar{A}_1 \in B(X, Y)$ і $\bar{A}_2 \in B(X, Y)$ такі, що

$$\bar{A}_1(x) = \bar{A}_2(x) = A(x) \quad \forall x \in L.$$

Для доведення єдиності необхідно перевірити, що

$$\bar{A}_1(x) = \bar{A}_2(x) \quad \forall x \in X.$$

Виберемо $x \in X$ таке, що $x \notin L$. Тоді існує послідовність $\{x_n\} \subset L$ така, що

$$x_n \rightarrow x,$$

оскільки L є щільним в X . Таким чином, маємо рівність

$$\bar{A}_1(x_n) = \bar{A}_2(x_n).$$

Враховуючи неперервність $\bar{A}_1, \bar{A}_2 \in B(X, Y)$ і обчислюючи $\lim_{n \rightarrow \infty}$ отримуємо

$$\bar{A}_1(x) = \bar{A}_2(x). \quad \triangleright$$

Приклад 4.2. Розглянемо на $C^0[a, b]$ норми

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

і позначимо

$$(L^p(a, b), \|\cdot\|_p) = (\overline{C^0[a, b]}, \|\cdot\|_p).$$

За визначенням, $C^0[a, b]$ є щільним, наприклад, в $(L^1(a, b), \|\cdot\|_1)$. На $C^0[a, b]$ є визначеним інтеграл

$$\int_a^b : C^0[a, b] \rightarrow \mathbf{C}$$

і

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

Отже, оператор інтегрування належить $B(C^0[a, b], \mathbf{C})$ та допускає продовження на $(L^1(a, b), \|\cdot\|_1)$.

Аналогічно визначається такий інтеграл на $(L^p(a, b), \|\cdot\|_p)$, оскільки

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M \|f\|_p,$$

що випливає із відомої нерівності Гельдера

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \text{для} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{і} \quad f, g \in C^0[a, b].$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити нерівність Гельдера, використовуючи що

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \quad \text{для} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{і} \quad \alpha, \beta \geq 0$$

та обираючи $\alpha = \frac{|f|}{\|f\|_p}$, $\beta = \frac{|g|}{\|g\|_q}$ при $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$ і $f, g \in C^0[a, b]$.)

В4.3. Відкрита обмежена зв'язна підмножина $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ називається *областю* у \mathbf{R}^n . Замикання області Ω в \mathbf{R}^n позначається $\bar{\Omega}$ (і є компактною множиною), а

$$\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$$

називається *межею* цієї області.

Наприклад, $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$ є відкритою кулею в \mathbf{R}^n ,

$$\bar{\Omega} = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq 1\}$$

є замкненою кулею та $\partial\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| = 1\}$ називається одиничною сферою.

Розглянемо для області Ω в \mathbf{R}^n лінійний простір

$$C^0(\overline{\Omega}) = \{ f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{C} : f \text{ є неперервною на } \overline{\Omega} \}.$$

Теорема 4.4 (нерівність Гельдера). Для $f, g \in C^0(\overline{\Omega})$ виконана нерівність

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{де } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

і $1 < p < \infty$. Зокрема

$$\left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} 1 dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} (\text{mes}(\Omega))^{\frac{1}{q}}. \quad \triangleleft \triangleright$$

Розглянемо на $C^0(\overline{\Omega})$ норми

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p,$$

де $\lim_{p \rightarrow \infty}$ існує, оскільки неперервні функції обмежені ($|f(x)| \leq M$) і тому обмежена послідовність чисел $\|f\|_p$ ($\|f\|_p \leq M \text{mes}(\Omega)^{1/p} \leq M \text{mes}(\Omega)$, наприклад, якщо $\text{mes}(\Omega) \geq 1$), крім того, ця послідовність є монотонною.

В4.5. Поповнення $(C^0(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_p)$ для фіксованого p при $1 \leq p < \infty$ називається простором Лебега інтегрованих у ступені p функцій і позначається

$$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p) = (\overline{C^0(\overline{\Omega})}, \|\cdot\|_p).$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що

$$(\overline{C^0(\overline{\Omega})}, \|\cdot\|_{\infty}) = (C^0(\overline{\Omega}), \max_{\overline{\Omega}} |\cdot|).$$

Таким чином, простір $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ складається із "функцій", які можуть бути наближені неперервними функціями, тобто для $f \in L^p(\Omega)$ та

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_{\varepsilon} \in C^0(\overline{\Omega}) : \|f - f_{\varepsilon}\|_p < \varepsilon.$$

Для $f \in C^0(\bar{\Omega})$ є визначеним лінійний інтеграл $\int_{\Omega} f dx$. Із нерівності Гельдера випливає, що цей інтеграл є обмеженим відображенням із $C^0(\bar{\Omega})$ в \mathbf{C} . Таким чином, із теореми 4.1 маємо, що для $f \in L^p(\Omega)$ є визначеним лінійний інтеграл (такий інтеграл називається *інтегралом Лебега*) і

$$\left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| \leq (\text{mes}(\Omega))^{\frac{1}{q}} \|f\|_p.$$

Нехай $A \subset \bar{\Omega}$. Визначимо функцію $\chi_A(x)$ рівністю $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A$ і $\chi_A(x) = 0$ при $x \in \bar{\Omega} \setminus A$. Така функція називається *характеристичною* функцією множини $A \subset \bar{\Omega}$.

В4.6. Множина $A \subset \bar{\Omega}$ називається *вимірною*, якщо $\chi_A(x) \in L^1(\Omega)$. Функція $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{C}$ називається (абсолютно) *інтегрованою*, якщо $f \in L^1(\Omega)$.

Міра Лебега $\text{mes}(A)$ вимірної множини $A \subset \bar{\Omega}$ визначається рівністю

$$\text{mes}(A) = \int_A dx = \int_{\Omega} \chi_A dx.$$

Теорема 4.7. *Міра Лебега вимірної множини $A \subset \bar{\Omega}$ є нульовою ($\text{mes}(A) = 0$)*
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ існує множина кубів $K_1, K_2, \dots, K_k \dots$ така, що

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |K_k| < \varepsilon,$$

де $|K_k| = |b_k - a_k|^n$ позначає об'єм куба $K_k = [a_k, b_k]^n$ і $k = 1, 2, \dots$ $\triangleleft \triangleright$

Відомо, що $L^p(\Omega)$ складається із класів еквівалентності інтегрованих функцій, де f і g належать одному класу, якщо $f = g$ майже скрізь у Ω , тобто

$$\text{mes}(\{x \in \Omega : f \neq g\}) = 0.$$

Теорема 4.8 (Лузін Н.Н.). *Функція $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{C}$ є інтегрованою* \Rightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_{\varepsilon} \in C^0(\bar{\Omega}) : \quad \text{mes}(\{x \in \Omega : f \neq f_{\varepsilon}\}) < \varepsilon. \quad \triangleleft \triangleright$$

При $p = 2$ простір $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ є гільбертовим із скалярним добутком

$$\langle u, v \rangle_2 = (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Для цього простору виконана наступна теорема, яка еквівалентна теоремі Рісса.

Теорема 4.9 (Рісс). *Нехай $f \in B(L^2(\Omega), \mathbf{C})$. Тоді*

$$\exists 1 \ v_f \in L^2(\Omega) : \quad f(u) = \int_{\Omega} u(x) v_f(x) dx \quad \forall u \in L^2(\Omega). \quad \triangleleft \triangleright$$

Аналогічна теорема виконана для просторів $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ при $1 < p < \infty$.

Теорема 4.10. *Нехай $f \in B(L^p(\Omega), \mathbf{C})$ при $1 < p < \infty$. Тоді*

$$\exists 1 \ v_f \in L^q(\Omega) : \quad f(u) = \int_{\Omega} u(x) v_f(x) dx \quad \forall u \in L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1. \quad \triangleleft \triangleright$$

Ця теорема означає, що простори $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ і $(L^q(\Omega), \|\cdot\|_q)$ є взаємно спряженими:

$$L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega), \quad L^q(\Omega)^* = L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \quad \text{і} \quad 1 < p < \infty.$$

Зокрема, при $1 < p < \infty$ простір $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ є рефлексивним, оскільки

$$L^p(\Omega) = L^q(\Omega)^* = L^p(\Omega)^{**}.$$

Визначимо

$$L^\infty(\Omega) = L^1(\Omega)^*.$$

Відомо, що $L^p(\Omega)$ є сепарабельними при $1 \leq p < \infty$ та

$$L^p(\Omega) = \{ f \in \text{інтегрована} : \|f(x)\|_p < \infty \} \quad \text{при} \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

але $L^\infty(\Omega)^* \neq L^1(\Omega)$ та $L^\infty(\Omega)$ не є сепарабельним.

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що

$$L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \text{при} \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty.$$

Зокрема $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ при $1 \leq p \leq \infty$.)

У просторі $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ інтеграл є визначеним. Для визначення диференціювання на $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ необхідні додаткові визначення.

В4.11. Межа $\partial\Omega$ області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ має клас C^k при $k \geq 0$, якщо $\partial\Omega$ є компактною і для кожного $x \in \partial\Omega$ існує відкрита множина $U \subset \mathbf{R}^n$, $x \in U$ та взаємно однозначне відображення $\psi : B = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\} \rightarrow U$ такі, що $\psi \in C^k(\overline{B})^n$, $\psi^{-1} \in C^k(\overline{U})^n$, $\psi(B_+) = U \cap \Omega$, $\psi(B_-) = U \cap (\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$, $\psi(B_0) = U \cap \partial\Omega$, де $B_+ = \{x \in B : x_n > 0\}$, $B_- = \{x \in B : x_n < 0\}$, $B_0 = \{x \in B : x_n = 0\}$ і

$$C^k(\overline{B})^n = \{v \in C^0(\overline{B})^n : \nabla v \in C^0(\overline{B})^{n \times n}, \dots, \nabla^k v \in C^0(\overline{B})^{n \times n^k}\}.$$

Область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ має ліпшицеву межу $\partial\Omega$, якщо $\psi \in \text{Lip}(\overline{B})$ і $\psi^{-1} \in \text{Lip}(\overline{U})$, де

$$\text{Lip}(\overline{B}) = \{v \in C^0(\overline{B})^n : \exists L > 0 : |v(x) - v(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \overline{B}\}.$$

Теорема 4.12 (Радемахер). Нехай $\psi \in \text{Lip}(\overline{B})$. Тоді $\nabla\psi \in L^\infty(B)^{n \times n}$. $\triangleleft \triangleright$

Надалі розглядаються тільки області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, що мають ліпшицеві межі.

Визначимо на лінійному просторі $C^1(\overline{\Omega}) = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) : \nabla v \in C^0(\overline{\Omega})^n\}$ норми

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty,$$

де $L^p(\Omega)^n = L^p(\Omega) \times \dots \times L^p(\Omega) = \{(v_1, \dots, v_n) : v_k \in L^p(\Omega), k = 1, \dots, n\}$.

В4.13. Поповнення нормованого простору $(C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty$$

і називається простором *Соболева першого порядку* інтегрованих у ступені p (класів еквівалентних) функцій на Ω . Зокрема, для елементів із $W^{1,p}(\Omega)$ визначений інтеграл і диференціювання. У відповідності із теоремою.

Теорема 4.14. Розглянемо оператор градієнта ∇ як лінійний оператор із $(C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ в $(L^p(\Omega)^n, \|\cdot\|_{L^p(\Omega)^n})$, $1 \leq p < \infty$. Тоді $\nabla \in B(C^1(\overline{\Omega}), L^p(\Omega)^n)$,

$$\exists 1 \quad \overline{\nabla} \in B(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n) : \quad \overline{\nabla}(v) = \nabla(v) \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$$

i

$$\|\overline{\nabla}\|_{B(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n)} = 1.$$

◁ Нехай $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Тоді $\nabla u \in C^0(\bar{\Omega})^n \subset L^p(\Omega)^n$ та

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n} \leq \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty.$$

Залишається скористатися теоремою 4.1. ▷

В4.15. Нехай $u \in W^{1,p}(\Omega)$ при $1 \leq p < \infty$ та $E \subset \bar{\Omega}$. За визначенням

$$u \geq 0 \quad \text{на} \quad E \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega),$$

якщо існує послідовність $\{u_n\} \subset C^1(\bar{\Omega})$ така, що

$$u_n \geq 0 \quad \forall x \in E \quad \text{і} \quad u_n \rightarrow u \quad \text{у нормі} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Якщо $-u \geq 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$, тоді пишуть $u \leq 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$. Відповідно, якщо $u \geq 0$ і $u \leq 0$ на E в $W^{1,p}(\Omega)$, тоді за визначенням

$$u = 0 \quad \text{на} \quad E \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Для цілого $l \geq 1$ визначимо лінійні простори

$$C^l(\bar{\Omega}) = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : \nabla v \in C^0(\bar{\Omega})^n, \dots, \nabla^l v \in C^0(\bar{\Omega})^{n^l}\},$$

$$C^l(\mathbf{R}^n) = \{v \in C^0(\mathbf{R}^n) : \nabla v \in C^0(\mathbf{R}^n)^n, \dots, \nabla^l v \in C^0(\mathbf{R}^n)^{n^l}\},$$

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{l=1}^{\infty} C^l(\bar{\Omega}), \quad C^\infty(\mathbf{R}^n) = \bigcap_{l=1}^{\infty} C^l(\mathbf{R}^n)$$

та розглянемо лінійний простір функцій, що є нескінченно диференційованими і мають компактні носії

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \text{supp } v \subset \Omega\},$$

де $\text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}}$ називається носієм функції v .

Нехай $\omega_1(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$ є парною невід'ємною функцією такою, що

$$\omega_1(t) = 0 \quad \text{при} \quad |t| \geq 1$$

і

$$\int_{\mathbf{R}^n} \omega_1(|x|) dx = \int_{|x| < 1} \omega_1(|x|) dx = 1$$

для фіксованого $n \geq 1$. Наприклад, оберемо

$$\omega_1(t) = C_n e^{-\frac{1}{1-t^2}} \quad \text{при} \quad |t| < 1$$

та $\omega_1(t) = 0$ при $|t| \geq 1$, де постійна C_n обирається так, щоб $\int_{\mathbf{R}^n} \omega_1(|x|) dx = 1$.

Для фіксованого $h > 0$ функція

$$\omega_h(|x|) = \frac{1}{h^n} \omega_1\left(\frac{|x|}{h}\right)$$

називається *ядром усереднення*. Таке ядро $\omega_h(|x|)$ задовольняє умовам:

1. $\omega_h(|x|) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\omega_h(|x|) \geq 0$ в \mathbf{R}^n ;
2. $\omega_h(|x|) = 0$ для $|x| \geq h$;
3. $\int_{\mathbf{R}^n} \omega_h(|x|) dx = 1$;
4. для кожного цілого $l \geq 0$ та всіх $x \in \mathbf{R}^n$ існує постійна C_l така, що

$$|\nabla^l \omega_h(|x|)| \leq \frac{C_l}{h^{n+l}},$$

де постійна C_l не залежить від h і x .

Нехай $u \in L^1(\Omega)$ і $u = 0$ при $x \in \mathbf{R}^n \setminus \Omega$. Для фіксованого $h > 0$ функція

$$u_h(x) = \int_{\Omega} u(y) \omega_h(|x - y|) dy$$

називається *усередненою функцією* для u радіусу h . Безпосередньо із визначення та умови **2** маємо

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \int_{\Omega} u(y) \omega_h(|x - y|) dy = \int_{\mathbf{R}^n} u(y) \omega_h(|x - y|) dy = \\ &= \int_{\{|x-y|<h\}} u(y) \omega_h(|x - y|) dy = \int_{\Omega \cap \{|x-y|<h\}} u(y) \omega_h(|x - y|) dy \end{aligned}$$

і $u_h = 0$ при $x \in \mathbf{R}^n \setminus \Omega^h$, де $\Omega^h = \cup_{x_0 \in \Omega} \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_0| < h\}$.

Із визначення та умови **1** також маємо $u_h \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, оскільки

$$\nabla^l u_h(x) = \int_{\Omega} u(y) \nabla_x^l \omega_h(|x - y|) dy$$

для кожного цілого $l \geq 0$ і всіх $x \in \mathbf{R}^n$.

Теорема 4.16. Для цілого $l \geq 0$ і $u \in C^l(\bar{\Omega})$ маємо

$$\|u_h - u\|_{C^0(\bar{\omega})} + \dots + \|\nabla^l u_h - \nabla^l u\|_{C^0(\bar{\omega})^{n^l}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0$$

для кожного $\omega \subset \Omega$ такого, що $\bar{\omega} \subset \Omega$.

◁ Нехай $l = 0$. Оберемо h_0 так, щоб $h_0 < \text{dist}(\partial\omega, \partial\Omega)$, де $\text{dist}(\partial\omega, \partial\Omega)$ позначає відстань між $\partial\omega$ і $\partial\Omega$. Тоді для $h \leq h_0$ та $x \in \bar{\omega}$ отримуємо

$$\begin{aligned} |u_h - u| &= \\ &= \left| \int_{\{|x-y|<h\}} u(y) \omega_h(|x-y|) dy - u(x) \int_{\{|x-y|<h\}} \omega_h(|x-y|) dy \right| \leq \\ &\leq \max_{\{|x-y|<h\}} |u(y) - u(x)| \int_{\{|x-y|<h\}} \omega_h(|x-y|) dy = \max_{\{|x-y|<h\}} |u(y) - u(x)|. \end{aligned}$$

Таким чином, із рівномірної неперервності функції u випливає, що

$$\|u_h - u\|_{C^0(\bar{\omega})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

Випадок $u \in C^l(\bar{\Omega})$ при $l \geq 1$ розглядається аналогічно, оскільки

$$\begin{aligned} \nabla^l u_h(x) &= \int_{\Omega} u(y) \nabla_x^l \omega_h(|x-y|) dy = \\ &= (-1)^l \int_{\Omega} u(y) \nabla_y^l \omega_h(|x-y|) dy = \int_{\Omega} \nabla_y^l u(y) \omega_h(|x-y|) dy. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Теорема 4.17. Нехай $u \in L^p(\Omega)$ при $1 \leq p \leq \infty$. Тоді

$$\|u_h\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

для кожного $h > 0$. Зокрема $u_h \in L^p(\Omega)$.

◁ Розглянемо, наприклад, випадок $1 < p < \infty$. Із нерівності Гельдера маємо

$$\begin{aligned} |u_h(x)|^p &= \left| \int_{\Omega} u(y) \omega_h(|x-y|)^{1/p} \omega_h(|x-y|)^{1/q} dy \right|^p \leq \\ &\leq \int_{\Omega} |u(y)|^p \omega_h(|x-y|) dy \left(\int_{\Omega} \omega_h(|x-y|) dy \right)^{p/q}. \end{aligned}$$

Інтегруючи цю нерівність отримуємо

$$\|u_h\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u(y)|^p dy \leq \int_{\Omega} |u(y)|^p \left(\int_{\Omega} \omega_h(|x-y|) dx \right) dy \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

оскільки

$$\int_{\Omega} \omega_h(|x-y|) dy = \int_{\Omega \cap \{|x-y|<h\}} \omega_h(|x-y|) dy \leq \int_{\{|x-y|<h\}} \omega_h(|x-y|) dy = 1.$$

Випадок $p = 1$ розглядається аналогічно, а у випадку $p = \infty$ достатнього обчислити $\lim_{p \rightarrow \infty}$ від вже доведеної нерівності теореми. \triangleright

Теорема 4.18. *Нехай $u \in L^p(\Omega)$ при $1 \leq p < \infty$. Тоді*

$$\|u_h - u\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

\triangleleft Для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\tilde{u} \in C^0(\bar{\Omega})$ таке, що

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Використовуючи теорему 4.17 та нерівність трикутника, отримуємо

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|u - \tilde{u}\|_{L^p(\Omega)} + \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^p(\Omega)} + \|\tilde{u}_h - u_h\|_{L^p(\Omega)} \leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{C^0(\bar{\Omega})}. \end{aligned}$$

За теоремою Вейшрасса функцію $\tilde{u} \in C^0(\bar{\Omega})$ можна вважати поліномом, який визначено на такої області Ω' , що $\bar{\Omega} \subset \Omega'$. Тому, із теореми 4.16 випливає, що

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

для достатньо малих $h \leq h_0$. \triangleright

Твердження цієї теореми може не виконуватися при $p = \infty$, оскільки відомо, що $L^\infty(\Omega)$ не є сепарабельним.

Теорема 4.19 (про абсолютну неперервність інтеграла Лебега). *Нехай фіксовано $f \in L^1(\Omega)$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке що*

$$\left| \int_{\omega} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \text{mes}(\omega) = \int_{\omega} dx < \delta$$

для кожного вимірного $\omega \subset \Omega$. $\triangleleft \triangleright$

Безпосередньо із теорем 4.16–4.19 випливає наступне твердження.

Теорема 4.20. *Простір $C_0^\infty(\Omega)$ щільний в $L^p(\Omega)$ при $1 \leq p < \infty$, тобто для кожного $f \in L^p(\Omega)$ і*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega) : \quad \|f - f_\varepsilon\|_p < \varepsilon.$$

Простір $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільний в $W^{1,p}(\Omega)$ при $1 \leq p < \infty$. Зокрема, ці простори можуть бути визначені як поповнення $C_0^\infty(\Omega)$ і $C^\infty(\overline{\Omega})$:

$$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p) = (\overline{C_0^\infty(\Omega)}, \|\cdot\|_p),$$

$$(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) = (\overline{C^\infty(\overline{\Omega})}, \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty. \quad \triangleleft \triangleright$$

В4.21. Поповнення нормованого простору $(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty.$$

За визначенням, якщо $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ тоді

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Крім того, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ є повним підпростором в $W^{1,p}(\Omega)$.

Для фіксованого цілого $m \geq 1$ визначимо на лінійному просторі $C^\infty(\overline{\Omega})$ норми

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}^p + \dots + \|\nabla^m u\|_{L^p(\Omega)^{n^m}}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty.$$

В4.22. Поповнення нормованого простору $(C^\infty(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}) \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty$$

і називається простором *Соболева m -го порядку* інтегрованих у ступені p (класів еквівалентних) функцій на Ω .

Поповнення нормованого простору $(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ позначається

$$(W_0^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}) \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty.$$

Таким чином, $W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ є повним підпростором в $W^{m,p}(\Omega)$.

Теорема 4.23. Для цілого $0 < l \leq m$ розглянемо оператор l -градієнта ∇^l як лінійний оператор із $(C^\infty(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ в $(L^p(\Omega)^{n^l}, \|\cdot\|_{L^p(\Omega)^{n^l}})$, $1 \leq p < \infty$.

Тоді $\nabla^l \in B(C^\infty(\bar{\Omega}), L^p(\Omega)^{n^l})$, $\exists 1 \quad \bar{\nabla}^l \in B(W^{m,p}(\Omega), L^p(\Omega)^{n^l})$:

$$\bar{\nabla}^l(v) = \nabla^l(v) \quad \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

i

$$\|\bar{\nabla}^l\|_{B(W^{m,p}(\Omega), L^p(\Omega)^{n^l})} = 1.$$

◁ Нехай $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Тоді $\nabla^l u \in C^\infty(\bar{\Omega})^{n^l} \subset L^p(\Omega)^{n^l}$ та

$$\|\nabla^l u\|_{L^p(\Omega)^{n^l}} \leq \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \dots + \|\nabla^m u\|_{L^p(\Omega)^{n^m}}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty.$$

Залишається скористатися теоремою 4.1. ▷

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що

$$\bar{\nabla}^m(v) = \nabla^m(v) \quad \forall v \in W^{m,p}(\Omega) \quad \text{при } 1 \leq p < \infty. \quad)$$

При $p = 2$ простір $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ є гільбертовим із скалярним добутком

$$(u, v)_{W^{m,2}(\Omega)} = \int_{\Omega} u \bar{v} dx + \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \bar{v}) dx + \dots + \int_{\Omega} (\nabla^m u, \nabla^m \bar{v}) dx,$$

де зазвичай пишуть ∇ замість $\bar{\nabla}$. Такі гільбертові простори позначаються також

$$(H^m(\Omega), \|\cdot\|_{H^m(\Omega)}) = (W^{m,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,2}(\Omega)})$$

та $(H_0^m(\Omega), \|\cdot\|_{H^m(\Omega)}) = (W_0^{m,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,2}(\Omega)})$.

Теорема 4.24 (Хана-Банаха). Нехай H є нормованим простором, $L \subset H$ є підпростором в H та $f \in L^*$ є лінійним функціоналом на L .

Тоді існує такий лінійний функціонал $F \in H^*$, що

$$F(x) = f(x) \quad \text{для } x \in L$$

i

$$\|F\|_{H^*} = \|f\|_{L^*}. \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 4.25. Нехай H є нормованим простором і елемент $x_0 \in H$ є таким, що $x_0 \neq 0$. Тоді існує такий лінійний функціонал $F \in H^*$, що

$$F(x_0) = \|x_0\|_H$$

і

$$\|F\|_{H^*} = 1.$$

◁ Розглянемо лінійний півпростір $L = \{x : x = tx_0\}$, де $t \in \mathbf{C}$ (або $t \in \mathbf{R}$). Визначимо $f(x) = t\|x_0\|_H$ для $x \in L$. Тоді $f \in L^*$, $f(x_0) = \|x_0\|_H$ та

$$|f(x)| = |t|\|x_0\|_H = \|x\|_H,$$

тобто $\|f\|_{B(L,R)} = 1$. Залишається скористатися теоремою 4.24. ▷

Розглянемо лінійний оператор $A : X \rightarrow Y$, де X і Y є нормованими просторами. Нехай $\varphi \in Y^*$. Тоді φ є визначеним при $y = Ax$ для кожного $x \in X$ і

$$\varphi(y) = \varphi(Ax) = f(x) \tag{4.1}$$

є лінійним функціоналом на X , тобто $f \in X^*$.

Таким чином, кожному $\varphi \in Y^*$ відповідає деякий $f \in X^*$ та визначено лінійне відображення

$$B : Y^* \rightarrow X^*.$$

Це відображення називається оператором *спряженим* до A і позначається A^* .

Відповідно, рівність $\varphi(y) = f(x)$ записується у вигляді

$$f = A^*\varphi. \tag{4.2}$$

За аналогією із гільбертовим випадком, значення функціонала $\varphi \in Y^*$ на елементі $y \in Y$ можна позначити так

$$\varphi(y) = \langle \varphi, y \rangle_{(Y^*, Y)} = \langle \varphi, y \rangle$$

та, відповідно, $f(x) = \langle f, x \rangle_{(X^*, X)} = \langle f, x \rangle$ для $f \in X^*$ і $x \in X$. Таким чином, визначення (4.1) і (4.2) можна написати так

$$\langle \varphi, Ax \rangle_{(Y^*, Y)} = \langle \varphi, y \rangle_{(Y^*, Y)} = \langle f, x \rangle_{(X^*, X)} = \langle A^*\varphi, x \rangle_{(X^*, X)}. \tag{4.3}$$

Оператор A^* спряжений до A є визначеним однозначно. Дійсно, нехай A^* та A° задовольняють (4.3). Тоді

$$\langle (A^* - A^\circ)\varphi, x \rangle_{(X^*, X)} = 0$$

для кожного $x \in X$ і тому $(A^* - A^\circ)\varphi = \theta$ для кожного $\varphi \in Y^*$, тобто $A^* = A^\circ$.

Теорема 4.26. *Нехай X і Y є нормованими просторами та $A \in B(X, Y)$. Тоді $A^* \in B(Y^*, X^*)$ і*

$$\|A^*\|_{B(Y^*, X^*)} = \|A\|_{B(X, Y)}.$$

◁ За визначенням

$$|(A^*\varphi)(x)| = |f(x)| = |\varphi(Ax)| \leq \|\varphi\|_{Y^*} \|Ax\|_Y \leq \|\varphi\|_{Y^*} \|A\|_{B(X, Y)} \|x\|_X,$$

звідки

$$\sup_{x \neq 0} \frac{|(A^*\varphi)(x)|}{\|x\|_X} = \|A^*\varphi\|_{X^*} \leq \|\varphi\|_{Y^*} \|A\|_{B(X, Y)}.$$

Отже, $A^* : Y^* \rightarrow X^*$ є обмеженим і

$$\|A^*\|_{B(Y^*, X^*)} \leq \|A\|_{B(X, Y)}.$$

Нехай $x_0 \in X : x_0 \neq 0$. За теоремою 4.25 існує $\varphi_0 \in Y^*$ такий, що $\|\varphi_0\|_{Y^*} = 1$ і

$$\varphi_0(Ax_0) = \|Ax_0\|_Y.$$

За визначенням

$$\begin{aligned} \|Ax_0\|_Y &= \varphi_0(Ax_0) = |f_0(x_0)| \leq \|f_0\|_{X^*} \|x_0\|_X = \\ &= \|A^*\varphi_0\|_{X^*} \|x_0\|_X \leq \|A^*\|_{B(Y^*, X^*)} \|\varphi_0\|_{Y^*} \|x_0\|_X = \|A^*\|_{B(Y^*, X^*)} \|x_0\|_X, \end{aligned}$$

звідки $\|A\|_{B(X, Y)} \leq \|A^*\|_{B(Y^*, X^*)}$, тобто

$$\|A^*\|_{B(Y^*, X^*)} = \|A\|_{B(X, Y)}. \quad \triangleright$$

В4.27. Множина лінійних функціоналів на $W_0^{1,p}(\Omega)$ позначається $W_0^{-1,q}(\Omega)$ при $1 \leq p < \infty$ та $q^{-1} + p^{-1} = 1$, тобто

$$W_0^{-1,q}(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)^*.$$

Значення функціонала $\varphi \in W_0^{-1,q}(\Omega)$ на елементі $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ позначається так

$$\varphi(v) = \langle \varphi, v \rangle_{(W_0^{-1,q}, W_0^{1,p})} = \langle \varphi, v \rangle.$$

Для $f \in L^q(\Omega)$ і $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ вираз

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

визначає лінійний обмежений функціонал і тому $L^q(\Omega) \subset W_0^{-1,q}(\Omega)$, тобто

$$\langle f, v \rangle_{(W_0^{-1,q}, W_0^{1,p})} = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Крім того, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, оскільки $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ для $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Оператор градієнта $\nabla_p : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)^n$ є визначеним при $1 \leq p < \infty$ та $\|\nabla_p\|_{B(W_0^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)^n)} = 1$. Таким чином, оператор

$$\nabla_p^* : L^q(\Omega)^n \rightarrow W_0^{-1,q}(\Omega)$$

є визначеним при $1 < q \leq \infty$ та $\|\nabla_p^*\|_{B(L^q(\Omega)^n, W_0^{-1,q}(\Omega))} = 1$. Оператор ∇_p^* називається оператором *узагальненої дивергенції* та позначається $\nabla_p^* = -\text{div}_q$.

Композиція операторів $-\text{div}_p$ і ∇_p при $1 < p < \infty$ позначається $-\Delta_p$ та називається *узагальненим оператором Лапласа*. Таким чином, за визначенням

$$-\Delta_p = -\text{div}_p(\nabla_p) : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{-1,p}(\Omega)$$

є таким лінійним та обмеженим оператором, що $\|\Delta_p\|_{B(W_0^{1,p}(\Omega), W_0^{-1,p}(\Omega))} = 1$, де зазвичай пишуть просто div , ∇ та Δ замість div_p , ∇_p та Δ_p , відповідно.

Для $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ і $\varphi \in L^q(\Omega)^n$, за визначенням спряженого оператора, маємо

$$\varphi(\nabla u) = \langle \varphi, \nabla u \rangle_{(L^q, L^p)} = \int_{\Omega} (\varphi, \nabla u) dx = -\langle \text{div} \varphi, u \rangle_{(W_0^{-1,q}, W_0^{1,p})} = (\nabla^* \varphi)(u). \quad (4.4)$$

Цю рівність можна розглядати як узагальнену формулу *інтегрування частинами*. Для $u \in C_0^\infty(\Omega)$ і $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})^n$ або $u \in C^1(\overline{\Omega})$ і $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^n$ така формула є відомою та має вигляд

$$\int_{\Omega} (\varphi, \nabla u) dx = - \int_{\Omega} (\text{div} \varphi) u dx, \quad (4.5)$$

де

$$\operatorname{div} \varphi = \operatorname{div} (\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}. \quad (4.6)$$

Визначимо на лінійному просторі $C^\infty(\overline{\Omega})^n$ норми

$$\|u\|_{D^{1,q}(\Omega)^n} = \left(\|u\|_{L^q(\Omega)^n}^q + \|\operatorname{div} u\|_{L^q(\Omega)}^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{при} \quad 1 \leq q < \infty.$$

В4.28. Поповнення нормованого простору $(C^\infty(\Omega)^n, \|\cdot\|_{D^{1,q}(\Omega)^n})$ позначається

$$(D_0^{1,q}(\Omega)^n, \|\cdot\|_{D^{1,q}(\Omega)^n}) \quad \text{при} \quad 1 \leq q < \infty.$$

Множина лінійних функціоналів на $D_0^{1,q}(\Omega)^n$ позначається через $D_0^{-1,p}(\Omega)^n$ при $1 \leq q < \infty$ та $q^{-1} + p^{-1} = 1$, тобто

$$D_0^{-1,p}(\Omega)^n = (D_0^{1,q}(\Omega)^n)^*.$$

Значення функціонала $\varphi \in D_0^{-1,p}(\Omega)^n$ на $v \in D_0^{1,q}(\Omega)^n$ визначається так

$$\varphi(v) = \langle v, \varphi \rangle_{(D_0^{1,q}, D_0^{-1,p})}.$$

За визначенням $L^p(\Omega)^n \subset D_0^{-1,p}(\Omega)^n \subset W_0^{-1,p}(\Omega)^n$, оскільки

$$\langle v, f \rangle_{(D_0^{1,q}, D_0^{-1,p})} = \int_{\Omega} (f(x), v(x)) \, dx,$$

наприклад, для $f \in L^p(\Omega)^n$ і $v \in D_0^{1,q}(\Omega)^n$. Крім того, виконані вкладання

$$W_0^{1,q}(\Omega)^n \subset D_0^{1,q}(\Omega)^n \subset L^q(\Omega)^n.$$

Оператор дивергенції $\operatorname{div}_q : D_0^{1,q}(\Omega)^n \rightarrow L^q(\Omega)$ є визначеним при $1 \leq q < \infty$ та $\|\operatorname{div}_q\|_{B(D_0^{1,q}(\Omega)^n, L^q(\Omega))} = 1$ за теоремою 4.1. Таким чином, оператор

$$\operatorname{div}_q^* : L^p(\Omega) \rightarrow D_0^{-1,p}(\Omega)^n$$

є визначеним при $1 < p \leq \infty$ та $\|\operatorname{div}_q^*\|_{B(L^p(\Omega), D_0^{-1,p}(\Omega)^n)} = 1$. Оператор div_q^* називається *узагальненим оператором градієнта* або *градієнтом у сенсі розподілів* та позначається $\operatorname{div}_q^* = -\tilde{\nabla}_p$.

Для $u \in L^p(\Omega)$ і $\varphi \in D_0^{1,q}(\Omega)^n$, за визначенням спряженого оператора, маємо

$$\langle \operatorname{div} \varphi, u \rangle_{(L^q, L^p)} = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \varphi) u \, dx = -\langle \varphi, \tilde{\nabla} u \rangle_{(D_0^{1,q}, D_0^{-1,p})}. \quad (4.7)$$

Із (4.4), (4.5) і (4.7) при $u \in C^1(\bar{\Omega})$ та $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^n$ випливає, що

$$\int_{\Omega} (\varphi, \nabla u) \, dx = \langle \varphi, \tilde{\nabla} u \rangle_{(D_0^{1,q}, D_0^{-1,p})}.$$

Для фіксованого $u \in C^1(\bar{\Omega})$ ця рівність визначає лінійний функціонал від $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^n$ і тому допускає єдине продовження на $\varphi \in L^q(\Omega)^n$ за теоремою 4.1. Таким чином, $\tilde{\nabla} u \in L^p(\Omega)^n$ при $1 < p \leq \infty$ за теоремою 4.10 та

$$\int_{\Omega} (\varphi, \nabla u) \, dx = \langle \varphi, \tilde{\nabla} u \rangle_{(L^q, L^p)} = \int_{\Omega} (\varphi, \tilde{\nabla} u) \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^n,$$

зокрема $\nabla u = \tilde{\nabla} u$ для $u \in C^1(\bar{\Omega})$, завдяки наступній відомій лемі.

Теорема 4.29 (основна лема варіаційного числення). *Нехай $\psi \in L^p(\Omega)$ при $1 \leq p \leq \infty$ є такою, що*

$$\int_{\Omega} \psi(x) v(x) \, dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Тоді $\psi = 0$ в $L^p(\Omega)$.

◁ Розглянемо, наприклад, випадок $p = 2$. Можна вважати, що $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, оскільки $C_0^\infty(\Omega)$ щільно в $L^2(\Omega)$. Отже, $\int_{\Omega} \psi(x)^2 \, dx = 0$ і тому $\psi = 0$. ▷

Для узагальненої дивергенції можна аналогічно довести, що

$$(\nabla^* u) = -\operatorname{div} u \quad \text{для} \quad u \in C^1(\bar{\Omega})^n,$$

де div позначає "звичайну" дивергенцію, яка визначена рівністю (4.6).

Відомо, що

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : \tilde{\nabla} u \in L^p(\Omega)^n \} \quad (4.8)$$

при $1 < p < \infty$. Визначимо

$$W^{1,\infty}(\Omega) = \{ u \in L^\infty(\Omega) : \tilde{\nabla} u \in L^\infty(\Omega)^n \}$$

та $W_0^{1,\infty}(\Omega) = W^{1,\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$. Відомо, що $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ та $W^{1,\infty}(\Omega)$ із нормою

$$\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_{W^{1,\infty}} = \max \{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \}$$

є банаховими. Однак, простори $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ та $W^{1,\infty}(\Omega)$ не є сепарабельними у відмінності від $W_0^{1,p}(\Omega)$ та $W^{1,p}(\Omega)$ при $1 \leq p < \infty$.

Використовуючи нерівність

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \leq \max \{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n} \} = \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)},$$

аналогічну нерівність для div і теорему 4.1, можна визначити узагальнений градієнт $\tilde{\nabla}_p$ при $p = 1$ та встановити рівність (4.8) при $1 \leq p \leq \infty$. Аналогічну рівність можна встановити для простору $W^{m,p}(\Omega)$ при $1 \leq p \leq \infty$ та $1 \leq m < \infty$.

(Завдання для самостійної роботи:

1. Нехай $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$, $s > 0$ і

$$\psi(x) = |x|^{-s}.$$

Перевірити, що

$$\psi \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow ps < n; \quad \psi \in W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow p(s+1) < n;$$

і $(\psi - 1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow p(s+1) < n$.

2. Нехай $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$ і

$$u(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Перевірити, що $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)^n$ при $1 \leq p < n$.

3. Нехай $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1/2\}$, $0 < s < 1/2$ і

$$v(x) = |\lg|x||^s.$$

Перевірити, що $v(x) \in W^{1,2}(\Omega)$, $v(x) \in L^p(\Omega)$ при $1 \leq p < \infty$ але $v(x) \notin L^\infty(\Omega)$.

5. Задача Дірихле для рівняння Пуассона.

Простір $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ над \mathbf{R} є гільбертовим із скалярним добутком

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) dx.$$

Теорема 5.1 (нерівність Фрідріхса). *Нехай $u \in H_0^1(\Omega)$. Тоді існує постійна $C = C(\Omega)$ така, що*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}.$$

◁ Досить довести цю нерівність для $u \in C_0^\infty(\Omega)$, оскільки $C_0^\infty(\Omega)$ щільно в $H_0^1(\Omega)$ за визначенням. Область Ω обмежена. Тому, можна вважати, що для $i = 1, \dots, n$ існують $l_i > 0$ такі, що

$$\Omega \subset \Pi = \{x = (x_1, \dots, x_n) : 0 < x_i < l_i, \quad i = 1, \dots, n\}$$

і $u \in C_0^\infty(\Pi)$. Для такої функції u маємо

$$u(x_1, x') = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(y_1, x')}{\partial y_1} dy_1,$$

де

$$x' \in \Pi' = \{x' = (x_2, \dots, x_n) : 0 < x_i < l_i, \quad i = 2, \dots, n\}.$$

Використовуючи нерівності Гельдера і $|f(\cdot)dx| \leq |f| \cdot |dx|$, отримуємо

$$\begin{aligned} u(x_1, x')^2 &= \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial u(y_1, x')}{\partial y_1} dy_1 \right)^2 \leq \left(\int_0^{x_1} \left| \frac{\partial u(y_1, x')}{\partial y_1} \right| dy_1 \right)^2 \leq \\ &\leq \left(\left(\int_0^{x_1} \left| \frac{\partial u(y_1, x')}{\partial y_1} \right|^2 dy_1 \right)^{1/2} \left(\int_0^{x_1} 1 dy_1 \right)^{1/2} \right)^2 \leq x_1 \int_0^{l_1} \left| \frac{\partial u(y_1, x')}{\partial y_1} \right|^2 dy_1. \end{aligned}$$

Інтегруючи цю нерівність по Π , маємо

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} u(x)^2 dx &\leq \int_{\Pi} \int_{\Pi'} \left[x_1 \int_0^{l_1} \left| \frac{\partial u(y_1, x')}{\partial y_1} \right|^2 dy_1 \right] dx_1 dx' = \\ &= \frac{l_1^2}{2} \int_{\Pi} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 dx \leq \frac{l_1^2}{2} \int_{\Pi} \left[\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right)^2 \right] dx. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Теорема 5.1' (нерівність Фрідріхса для $W_0^{1,p}(\Omega)$). Нехай $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ при $1 \leq p \leq \infty$. Тоді існує постійна $C = C(\Omega)$ така, що

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}. \quad \triangleleft \text{Завдання для самостійної роботи.} \triangleright$$

Із нерівності Фрідріхса випливає, що норми $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ і $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)^n}$ є еквівалентними на $H_0^1(\Omega)$. Дійсно, для $u \in H_0^1(\Omega)$ маємо наступні нерівності

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq (1 + C^2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 = (1 + C^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Таким чином, $H_0^1(\Omega)$ можна розглядати із скалярним добутком

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) dx.$$

Фіксуємо $f \in L^2(\Omega)$ і розглянемо функціонал

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Цей функціонал є лінійним за визначенням. Із нерівності Гельдера випливає, що цей функціонал є обмеженим, а із теореми Рісса отримуємо, що

$$\exists 1 u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.1)$$

Зокрема, ця рівність виконана $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$. Крім того, якщо $u \in C^2(\bar{\Omega})$, тоді інтегруючи частинами, маємо

$$-\int_{\Omega} (\Delta u(x)) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \quad (5.2)$$

де

$$\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u(x)) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n^2}.$$

Таким чином, із (5.2) та основної лема варіаційного числення випливає, що

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega \quad (5.3)$$

і

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega). \quad (5.4)$$

Така задача називається *однорідною задачею Дірихле для рівняння Пуассона*.

Відповідно, задача: знайти $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

називається *слабкою* (або *варіаційною*) формою однорідної задачі Дірихле (5.4) для рівняння Пуассона (5.3). Із (5.1) випливає така теорема.

Теорема 5.2 ($\exists 1$ розв'язку задачі Дірихле для рівняння Пуассона). *Нехай $f \in L^2(\Omega)$. Тоді*

$$\exists 1 u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad \triangleleft \triangleright$$

В5.3. Множина лінійних функціоналів на $H_0^1(\Omega)$ позначається $H^{-1}(\Omega)$. Значення функціонала $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$ на елементі $v \in H_0^1(\Omega)$ позначається так

$$\varphi(v) = \langle \varphi, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} = \langle \varphi, v \rangle.$$

За визначенням, маємо $L^2(\Omega) = L^2(\Omega)^* \subset H^{-1}(\Omega)$ та $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Таким чином, із теореми Рісса випливає наступна теорема.

Теорема 5.2' ($\exists 1$ розв'язку задачі Дірихле для рівняння Пуассона). *Нехай $f \in H^{-1}(\Omega)$. Тоді*

$$\exists 1 u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad \triangleleft \triangleright$$

Використовуючи узагальнену формулу інтегрування частинами, теорему 5.2' можна переписати у такому вигляді.

Теорема 5.2'' ($\exists 1$ розв'язку задачі Дірихле для рівняння Пуассона). *Нехай $f \in H^{-1}(\Omega)$ та $\Delta = \operatorname{div} \nabla$. Тоді*

$$\exists 1 u \in H_0^1(\Omega) : -\langle \Delta u, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad \triangleleft \triangleright$$

Або у наступному вигляді.

Теорема 5.2''' ($\exists 1$ розв'язку задачі Дірихле для рівняння Пуассона). *Нехай $f \in H^{-1}(\Omega)$ та $\Delta = \operatorname{div} \nabla$. Тоді $\exists 1 u \in H_0^1(\Omega)$:*

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega), \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega). \quad \triangleleft \triangleright$$

6. Слабкі розв'язки стаціонарних рівнянь.

В6.1. Послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *слабко збіжною* до $x \in L$ (позначення $x_k \rightharpoonup x$), якщо

$$f(x_k) \rightarrow f(x) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty \quad \forall f \in L^*.$$

Зокрема, послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ гільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ є *слабко збіжною* до $x \in H$, якщо

$$\langle x_k, h \rangle_H \rightarrow \langle x, h \rangle_H \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty \quad \forall h \in H = H^*.$$

Послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *сильно збіжною* до $x \in L$ (позначення $x_k \rightarrow x$), якщо

$$\|x_k - x\|_L \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Теорема 6.2. Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормованим простором і $x_k \rightarrow x$. Тоді

$$x_k \rightharpoonup x.$$

◁ Дійсно, для кожного $f \in L^*$ маємо

$$|f(x_k) - f(x)| = |f(x_k - x)| \leq \|f\|_{L^*} \|x_k - x\|_L \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad \triangleright$$

Теорема 6.3 (Банаха-Штейнхауса). Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормованим простором та $x_k \rightharpoonup x$. Тоді існує стала $C > 0$ така, що

$$\sup_k \|x_k\|_L \leq C. \quad \triangleleft \triangleright$$

В6.4. Розглянемо послідовність $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$, множина межових точок якої позначається через $\lim \text{Pt} \{\alpha_k\}$ (тобто $\alpha_0 \in \lim \text{Pt} \{\alpha_k\}$, якщо існує підпослідовність $\{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що $\alpha_l \rightarrow \alpha_0$). Верхня та нижня границі цієї послідовності визначаються рівностями

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \sup \{ \alpha : \alpha \in \lim \text{Pt} \{\alpha_k\} \}, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \inf \{ \alpha : \alpha \in \lim \text{Pt} \{\alpha_k\} \}.$$

Відомо і безпосередньо перевіряється, що кожна обмежена послідовність має верхню та нижню границі. Крім того, послідовність $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ є збіжною

$$\Leftrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha_k.$$

Теорема 6.5. *Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормованим простором та $x_k \rightharpoonup x$. Тоді*

$$\|x\|_L \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_L. \quad \triangleleft \triangleright$$

Приклад 6.6. Нехай $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L = l^2(\mathbf{R})$ та $x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots) \in l^2(\mathbf{R})$ має всі елементи $x_k^i = 0$ за виключенням $x_k^k = 1$, тоді $x_k \rightharpoonup 0$. Однак, $\|x_k\|_{l^2(\mathbf{R})} = 1$, тобто така послідовність є слабко збіжною але не є сильно збіжною.

Таким чином, існують слабко збіжні послідовності $x_k \rightharpoonup x$, для яких

$$\|x\|_L < \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_L.$$

З іншого боку, завжди $\|x\|_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_L$, якщо $x_k \rightarrow x$.

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що

$$f_k = \sin(2\pi k x) \rightharpoonup 0 \quad \text{в} \quad L^2(0, 1).)$$

Теорема 6.7 (про слабку компактність кулі). *Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є рефлексивним нормованим простором і послідовність $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L$ така, що*

$$\sup_m \|x_m\|_L \leq M \quad \text{для деякого} \quad M \in \mathbf{R}.$$

Тоді існують $x \in L$ і підпослідовність $\{x_{\tilde{m}}\}_{\tilde{m}=1}^{\infty} \subset \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset L$ такі, що

$$x_{\tilde{m}} \rightharpoonup x. \quad \triangleleft \triangleright$$

Ця теорема означає, що куля $B_M = \{x \in L : \|x\|_L \leq M\}$ в рефлексивному нормованому просторі L є слабко компактною.

Теорема 6.8 (про сильну компактність кулі). *Нехай для деякого $M > 0$ куля B_M є сильно компактною в нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$. Тоді*

$$\dim L < \infty. \quad \triangleleft \triangleright$$

Ця теорема означає, що сильна і слабка збіжність на нормованому просторі $(L, \|\cdot\|_L)$ співпадають тільки, якщо

$$\dim L < \infty.$$

Розглянемо гільбертів простір $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ над \mathbf{R} . Відображення

$$a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}, \quad u, v \mapsto a(u, v)$$

називається *білінійною формою* на H , якщо $a(u, v)$ неперервна та лінійна по кожному із аргументів. Білінійна форма *симетрична*, якщо

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in H.$$

Теорема 6.9. *Нехай $a(u, v)$ є білінійною формою на H та $u_m \rightarrow u$. Тоді*

$$a(u_m, v) \rightarrow a(u, v) \quad \forall v \in H.$$

◁ Фіксуємо $v \in H$ і розглянемо $f_v(u) = a(u, v)$. Із визначень маємо $f_v \in H^*$ і

$$f_v(u_m) = a(u_m, v) \rightarrow f_v(u) = a(u, v) \quad \forall v \in H. \quad \triangleright$$

В6.10. Білінійна форма $a(u, v)$ називається *коерцитивною* на H , якщо

$$\exists \alpha > 0 : \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H.$$

Із визначень випливає, що білінійна коерцитивна симетрична форма $a(u, v)$ визначає норму $\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}$ на H , еквівалентну нормі $\|v\|_H$.

Теорема 6.11 ($\exists 1$ розв'язку варіаційної рівності у гільбертовому просторі). *Нехай H є сепарабельним гільбертовим простором над \mathbf{R} , $a(u, v)$ є білінійною коерцитивною формою і $f \in H^*$. Тоді $\exists 1 u \in H$:*

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H. \quad (6.1)$$

Крім того, відображення $f \mapsto u$ є ліпшицевим, тобто, якщо $u, \tilde{u} \in H$ є розв'язками задачі (6.1), які відповідні $f, \tilde{f} \in H^*$, тоді

$$\|u - \tilde{u}\|_H \leq (1/\alpha) \|f - \tilde{f}\|_{H^*}. \quad (6.2)$$

◁ Доведемо спочатку нерівність (6.2). Нехай $u, \tilde{u} \in H$ є розв'язками задачі (6.1), яки відповідні $f, \tilde{f} \in H^*$, тобто

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H, \\ -a(\tilde{u}, \tilde{v}) &= -\langle \tilde{f}, \tilde{v} \rangle \quad \forall \tilde{v} \in H. \end{aligned}$$

Вибираючи $v = u - \tilde{u}$ у першому рівнянні, $\tilde{v} = u - \tilde{u}$ у другому рівнянні та складаючи ці рівняння, отримуємо

$$a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) = \langle f - \tilde{f}, u - \tilde{u} \rangle.$$

Враховуючи умову коерцитивності, маємо

$$\alpha \|u - \tilde{u}\|_H^2 \leq \|f - \tilde{f}\|_{H^*} \|u - \tilde{u}\|_H.$$

Звідки слідує (6.2) та єдиність розв'язку задачі (6.1) (якщо цей розв'язок існує).

За умовами теореми, простір H є сепарабельним та гільбертовим. Тому існують такі лінійно незалежні $\{w_i\}_{i=1}^\infty \subset H$, що простір

$$\tilde{H} = \left\{ v \in H : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \forall \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad \forall m \in \mathbf{N} \right\}$$

є щільним в H . Це твердження є фактично визначенням сепарабельності.

Фіксуємо ціле $m > 0$ та визначимо скінченновимірний лінійний простір

$$H_m = \left\{ v \in H : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

Розглянемо наступну задачу : знайти $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i^m w_i \in H_m$ таке, що

$$a(u_m, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_m. \quad (6.3)$$

Така задача (6.3) еквівалентна системі m рівнянь

$$a(u_m, w_j) = \langle f, w_j \rangle, \quad j = 1, \dots, m,$$

для m компонент α_i^m вектора $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i^m w_i$, тобто

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i^m a(w_i, w_j) = \langle f, w_j \rangle, \quad j = 1, \dots, m. \quad (6.4)$$

Припустимо, що існують $\beta_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, n$ такі, що

$$\sum_{i=1}^m \beta_i a(w_i, w_j) = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

тоді

$$\sum_{i,j=1}^m \beta_i a(w_i, w_j) \beta_j = 0,$$

тобто

$$a\left(\sum_{i=1}^m \beta_i w_i, \sum_{j=1}^m \beta_j w_j\right) = 0.$$

Таким чином, $\sum_{i=1}^m \beta_i w_i = 0$ і тому $\beta_i = 0$, $i = 1, \dots, m$, оскільки w_i , $i = 1, \dots, m$ є лінійно незалежними.

Отже, система рівнянь (6.4) має розв'язок та

$$\exists 1 u_m \in H_m : \quad a(u_m, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_m.$$

Крім того, вибираючи $v = u_m$, отримуємо

$$\alpha \|u_m\|_H^2 \leq a(u_m, u_m) = \langle f, u_m \rangle \leq \|f\|_{H^*} \|u_m\|_H$$

та для деякої сталої M маємо

$$\sup_m \|u_m\|_H \leq (1/\alpha) \|f\|_{H^*} \leq M.$$

Тому існують $u \in H$ і $\{u_{\tilde{m}}\}_{\tilde{m}=1}^{\infty} \subset \{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ (за теоремами 6.7 і 6.9) такі, що

$$a(u_{\tilde{m}}, v) \rightarrow a(u, v) \quad \forall v \in H_m \subset H$$

і тому

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_m \quad \forall m \in \mathbf{N}.$$

Залишається скористатися щільністю \tilde{H} в H . \triangleright

Теорема 6.12 (про еквівалентність варіаційної рівності і задачі мінімізації).

Нехай H є гільбертовим простором над \mathbf{R} , $a(u, v)$ є білінійною симетричною коерцитивною формою і $f \in H^*$. Тоді задача

$$\text{знайти } u \in H : \quad a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H \quad (6.1)$$

еквівалентна наступній задачі мінімізації

$$\text{знайти } u \in H : \quad E(v) \geq E(u) \quad \forall v \in H, \quad (6.5)$$

де

$$E(v) = \|v\|_a^2 - 2 \langle f, v \rangle = a(v, v) - 2 \langle f, v \rangle.$$

$\triangleleft (\Rightarrow)$ Нехай $u \in H$ розв'язок задачі (6.1). Тоді $\|u - v\|_a^2 \geq 0 \quad \forall v \in H$ і тому

$$\|u\|_a^2 + \|v\|_a^2 - 2a(u, v) \geq 0,$$

тобто

$$a(v, v) - 2 \langle f, v \rangle \geq -\|u\|_a^2.$$

Звідки слідує (6.5), оскільки $-\|u\|_a^2 = a(u, u) - 2 \langle f, u \rangle$ завдяки (6.1). $(\Rightarrow) \triangleright$

$\triangleleft (\Leftarrow)$ Нехай $u \in H$ розв'язок задачі (6.5). Тоді для $\alpha \geq 0$ і $v \in H$ маємо

$$E(u + \alpha v) \geq E(u),$$

тобто $\alpha = 0$ реалізує мінімум функції $\Psi(\alpha) = E(u + \alpha v)$ однієї змінної. Отже

$$\left. \frac{d\Psi(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \geq 0$$

де, наприклад,

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a(u + \alpha v, u + \alpha v) - a(u, u)}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a(u + \alpha v, u + \alpha v) - a(u + \alpha v, u) + a(u + \alpha v, u) - a(u, u)}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a(u + \alpha v, \alpha v) + a(u, \alpha v)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} a(u + \alpha v, v) + a(u, v) = 2a(u, v). \end{aligned}$$

Таким чином

$$2a(u, v) \geq 2 \langle f, v \rangle.$$

Розглядаючи аналогічно функцію $\tilde{\Psi}(\alpha) = E(u - \alpha v)$, отримуємо

$$2a(u, v) \leq 2 \langle f, v \rangle. \quad (\Leftarrow) \triangleright$$

Приклад 6.13 (задача Дірихле для рівняння Пуассона). Нехай Ω є областю в \mathbf{R}^n і $H = H_0^1(\Omega)$. Тоді

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx$$

є білінійною симетричною коерцитивною формою на $H_0^1(\Omega)$.

Таким чином, для $f \in L^2(\Omega)$ задача мінімізації

$$\text{знайти } u \in H_0^1(\Omega) : \quad E(v) \geq E(u) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

де

$$E(v) = \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla v) dx - 2 \int_{\Omega} f v dx,$$

еквівалентна задачі Дірихле для рівняння Пуассона

$$-\Delta u = f \quad \text{в } H^{-1}(\Omega),$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \quad \text{в } H^1(\Omega).$$

Аналогічне твердження відноситься до випадку $f \in H^{-1}(\Omega)$, якщо визначити

$$E(v) = \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla v) dx - 2 \langle f v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)}.$$

Приклад 6.14 (задача Дірихле для дивергентного рівняння). Нехай Ω є областю в \mathbf{R}^n , $H = H_0^1(\Omega)$ і симетрична матриця $A(x) \in L^\infty(\Omega)^{n \times n}$ така, що $\alpha \leq A(x) \leq \beta$ для майже всіх $x \in \Omega$ та деяких $\alpha, \beta > 0$. Тоді

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (A(x) \nabla u(x), \nabla v(x)) dx$$

є білінійною симетричною коерцитивною формою на $H_0^1(\Omega)$. Тут є суттєвим наступній відомий факт, що простір $L^\infty(\Omega)$ є алгеброю над $L^p(\Omega)$, тобто

$$a \in L^\infty(\Omega) \quad \text{та} \quad v \in L^p(\Omega) \quad \Rightarrow \quad av \in L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

(**Завдання для самостійної роботи:** Перевірити останнє твердження.)

Таким чином, для $f \in H^{-1}(\Omega)$ задача (6.1) еквівалентна задачі Дірихле для дивергентного рівняння

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f \quad \text{в } H^{-1}(\Omega),$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \quad \text{в } H^1(\Omega).$$

Приклад 6.15 (задача Дірихле для рівняння із перенесенням). Нехай Ω є областю, $H = H_0^1(\Omega)$ і вектор $B(x) \in L^\infty(\Omega)^n$ такий, що $\operatorname{div} B(x) = 0$. Тоді

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) dx + \int_{\Omega} (B(x) \cdot \nabla u(x)) v(x) dx$$

є білінійною коерцитивною формою на $H_0^1(\Omega)$, де

$$B(x) \cdot \nabla u(x) = B_1(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \dots + B_n(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}.$$

◁ Перевіримо коерцитивність $a(u, v)$. Маємо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (B(x) \cdot \nabla v(x)) v(x) dx &= \int_{\Omega} (B(x) v(x), \nabla v(x)) dx = \\ &= - \int_{\Omega} (\operatorname{div}(B(x) v(x))) v(x) dx = - \int_{\Omega} (B(x) \cdot \nabla v(x)) v(x) dx, \end{aligned}$$

оскільки $\operatorname{div}(B(x) v(x)) = \operatorname{div}(B(x)) v(x) + B(x) \cdot \nabla v(x)$, тобто

$$a(v, v) = \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla v) dx. \quad \triangleright$$

Таким чином, для $f \in H^{-1}(\Omega)$ задача (6.1) еквівалентна задачі Дірихле для рівняння із перенесенням

$$-\Delta u + B(x) \cdot \nabla u = f \quad \text{в } H^{-1}(\Omega),$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \quad \text{в } H^1(\Omega).$$

Аналогічне твердження відноситься до коерцитивної форми

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (A\nabla u, \nabla v) dx + \int_{\Omega} (B \cdot \nabla u) v dx,$$

якщо вектор $B(x) \in L^\infty(\Omega)^n$ такий, що $\operatorname{div} B(x) = 0$ та симетрична матриця $A \in L^\infty(\Omega)^{n \times n}$ така, що $\alpha \leq A(x) \leq \beta$ для майже всіх $x \in \Omega$ та деяких $\alpha, \beta > 0$.

7. Ряди Фур'є.

Лінійний простір H над \mathbf{C} (або \mathbf{R}) із деяким скалярним добутком $\varphi(\cdot, \cdot)$ називається *передгілбертовим простором* (H, φ) . Скалярний добуток є спряжено-білінійним функціоналом $\varphi : H \times H \rightarrow \mathbf{C}$ таким, що для $\forall a, b \in H$ цей функціонал задовольняє умовам

$$i) \quad \varphi(a, b) = \overline{\varphi(b, a)}; \quad ii) \quad \varphi(a, a) \geq 0;$$

$$iii) \quad \varphi(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = \theta.$$

Передгілбертів простір (H, φ) є нормованим простором $(H, \|\cdot\|_H)$, де

$$\|a\|_H = \sqrt{\varphi(a, a)} \quad \forall a \in H.$$

Повний передгілбертів простір (H, φ) називається *гілбертовим простором*.

Зазвичай позначають $\varphi(a, b) = \langle a, b \rangle_H$, $\varphi(a, b) = (a, b)_H$ або $\varphi(a, b) = (a, b)$.

Нормований простір $(L, \|\cdot\|_L)$ називається *сепарабельним*, якщо існують лінійно незалежні $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L$ (тобто $\{w_i\}_{i=1}^m$ лінійно незалежні для кожного $m \in \mathbf{N}$) такі, що лінійний простір

$$\tilde{L} = \left\{ v \in L : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{C}, \quad m \in \mathbf{N} \right\}$$

є щільним в L . Тобто $\forall v \in L, \forall \varepsilon > 0$ знайдуться $m \in \mathbf{N}$ і $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ такі, що

$$\left\| v - \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i \right\|_L < \varepsilon.$$

Якщо $\{w_i\}_{i=1}^m$ лінійно незалежні, тоді

$$\overline{\{w_i\}_{i=1}^m} = \text{Lin}\{w_1, \dots, w_m\} = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{C} \right\}$$

називається *лінійною оболонкою* елементів $\{w_i\}_{i=1}^m$. Таким чином $\tilde{L} = \cup_m \overline{\{w_i\}_{i=1}^m}$.

Система елементів $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ передгілбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ називається *ортонормованою*, якщо

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \text{для} \quad i \neq j \quad \text{та} \quad \|e_i\| = 1 \quad \text{для} \quad i, j = 1, 2, \dots$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що ортонормована система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є лінійно незалежною.)

Теорема 7.1 (Шмідт). Нехай система елементів $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ над \mathbb{C} є лінійно незалежною.

Тоді існує ортонормована система $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ така, що

$$e_m \in \overline{\{w_i\}_{i=1}^m} = \text{Lin}\{w_1, \dots, w_m\}$$

для кожного $m = 1, 2, \dots$, тобто $\overline{\{e_j\}_{j=1}^m} = \overline{\{w_i\}_{i=1}^m}$ для кожного $m = 1, 2, \dots$

◁ Визначимо $e_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$, де $\|w_1\| \neq 0$, оскільки система $\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ є лінійно незалежною. Нехай

$$g_2 = w_2 - \alpha_{21}e_1.$$

Виберемо $\alpha_{21} \in \mathbb{C}$ так, щоб

$$\langle g_2, e_1 \rangle = 0.$$

Тоді $\alpha_{21} = \langle w_2, e_1 \rangle$ визначено однозначно. Визначимо $e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} \in \overline{\{w_i\}_{i=1}^2}$, де $\|g_2\| \neq 0$, оскільки, якщо $g_2 = \theta$ тоді w_1, w_2 лінійно залежні.

Далі використовується індукція. Нехай e_1, \dots, e_{k-1} вже вибрані. Розглянемо

$$g_k = w_k - \alpha_{k1}e_1 - \alpha_{k2}e_2 - \dots - \alpha_{k,k-1}e_{k-1}$$

і виберемо $\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{k,k-1} \in \mathbb{C}$ так, щоб

$$\langle g_k, e_1 \rangle = 0, \quad \langle g_k, e_2 \rangle = 0, \quad \dots, \quad \langle g_k, e_{k-1} \rangle = 0.$$

Тоді $\alpha_{k1} = \langle w_k, e_1 \rangle, \dots, \alpha_{k,k-1} = \langle w_k, e_{k-1} \rangle$ визначені однозначно. Таким чином $e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|} \in \overline{\{w_i\}_{i=1}^k}$, де $g_k \neq \theta$, оскільки w_1, w_2, \dots, w_k лінійно незалежні. ▷

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що система $\{e^{nx2\pi\sqrt{-1}} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \subset L^2(0, 1)$ є ортонормованою.)

В7.2. Нехай система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є ортонормованою і $h \in H$. Тоді числа

$$\phi_k = \langle h, e_k \rangle$$

називаються коефіцієнтами Фур'є елементу $h \in H$ по системі $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k, \quad \text{де} \quad \phi_k = \langle h, e_k \rangle,$$

називається *рядом Фур'є* елементу $h \in H$ по системі $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 7.3. *Нехай система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ передгілбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є ортонормованою і $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ є коефіцієнтами Фур'є елементу $h \in H$. Тоді ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2$ є збіжним і*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 \leq \|h\|_H^2. \quad (7.1)$$

◁ Для $m \in \mathbf{N}$ безпосередньо перевіряється, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^m \phi_k e_k \right\|_H^2 = \|h\|_H^2 - \sum_{k=1}^m |\phi_k|^2 \quad (7.2)$$

і тому

$$\sum_{k=1}^m |\phi_k|^2 \leq \|h\|_H^2. \quad \triangleright$$

Нерівність (7.1) називається *нерівністю Бесселя*.

Із рівності (7.2) для кожного $m \in \mathbf{N}$ відразу випливає, що

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \phi_k e_k \rightarrow h \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty \quad \left(\text{тобто} \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k \right) \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 = \|h\|_H^2. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Ця рівність називається *рівністю Парсеваля-Стеклова*. Якщо рівність (7.3) виконується для кожного $h \in H$, тоді ортонормована система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ називається *замкненою в сенсі Стеклова*.

Теорема 7.4 (про мінімальність коефіцієнтів Фур'є) *Нехай система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ передгілбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є ортонормованою і $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ є коефіцієнтами Фур'є елементу $h \in H$. Тоді для кожного $m \in \mathbf{N}$ маємо*

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \left\| h - \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k \right\|_H^2 = \left\| h - \sum_{k=1}^m \phi_k e_k \right\|_H^2.$$

◁ Для $m \in \mathbf{N}$ безпосередньо перевіряється, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k \right\|_H^2 = \|h\|_H^2 - \sum_{k=1}^m |\phi_k|^2 + \sum_{k=1}^m |\phi_k - \alpha_k|^2.$$

і тому мінімум правої частини досягається при $\alpha_k = \phi_k$ для $k = 1, \dots, m$. \triangleright

Теорема 7.5. *Нехай система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ передгільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ є ортонормованою і щільною в H . Тоді для кожного $h \in H$ маємо*

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k.$$

◁ Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ є щільною в H . Тобто $\forall h \in H, \forall \varepsilon > 0$ знайдуться $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ і $\alpha_1, \dots, \alpha_{N_\varepsilon}$ такі, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \alpha_k e_k \right\|_H^2 < \varepsilon.$$

Звідки та із мінімальності коефіцієнтів Фур'є $\phi_k = \langle h, e_k \rangle$ випливає, що

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \phi_k e_k \right\|_H^2 < \varepsilon.$$

Крім того, для $m \geq N_\varepsilon$ із рівності (7.2) маємо

$$0 \leq \left\| h - \sum_{k=1}^m \phi_k e_k \right\|_H^2 = \|h\|_H^2 - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |\phi_k|^2 - \sum_{k=N_\varepsilon+1}^m |\phi_k|^2 < \varepsilon - \sum_{k=N_\varepsilon+1}^m |\phi_k|^2 < \varepsilon.$$

Таким чином

$$\sum_{k=1}^m \phi_k e_k \rightarrow h \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty \quad (\text{тобто} \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k) \quad \triangleright$$

Теорема 7.6 (Фур'є). *Нехай $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ така, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ збігається. Тоді для кожної ортонормованої системи $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ гільбертового простору $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ збігається і є рядом Фур'є деякого $h \in H$, тобто*

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \quad \text{де} \quad \alpha_k = \langle h, e_k \rangle.$$

◁ Для $m, p \in \mathbf{N}$ із рівності

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{m+p} \alpha_k e_k \right\|_H^2 = \sum_{k=m+1}^{m+p} |\alpha_k|^2$$

випливає, що послідовність $s_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k$ є фундаментальною. Простір H є повним і тому $\exists 1 h \in H : h = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.

Крім того, для $k \in \mathbf{N}$ із неперервності скалярного добутку випливає, що

$$\langle h, e_k \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle s_m, e_k \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i, e_k \right\rangle = \alpha_k. \quad \triangleright$$

Теорема 7.7 (про щільність у гільбертовому просторі). *Нехай H є гільбертовим простором. Тоді ортонормована система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ щільна в H*

$$\Leftrightarrow h \in H : \langle h, e_k \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad h = \theta.$$

$\triangleleft (\Rightarrow)$ Нехай система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ щільна в H , тоді для $\forall h \in H$ виконана рівність Парсеваля-Стеклова (7.3) і тому $\langle h, e_k \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \|h\|_H = 0. \quad (\Rightarrow) \triangleright$

$\triangleleft (\Leftarrow)$ Нехай $h \in H$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k, \quad \text{де} \quad \phi_k = \langle h, e_k \rangle,$$

є рядом Фур'є для h . Із нерівності Бесселя (7.1) випливає, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2$ є збіжним. Тоді із теореми 7.6 отримуємо, що $\exists h_0 \in H$:

$$h_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k, \quad \text{де} \quad \phi_k = \langle h_0, e_k \rangle.$$

Таким чином $\langle h - h_0, e_k \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}$ і тому $h = h_0$, тобто кожен $h \in H$ може бути наближений лінійною комбінацією

$$\sum_{k=1}^m \phi_k e_k$$

елементів системи $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Це означає, що $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ щільна в H . $(\Leftarrow) \triangleright$

В7.8. Система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$ нормованого простору L називається *базисом*, якщо для кожного $l \in L$ знайдуться $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$:

$$l = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

Теорема 7.9. *У кожному сепарабельному передгільбертовому просторі H існує ортонормований базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$.*

\triangleleft Ця теорема випливає із визначень та теорем 7.1 і 7.5. \triangleright

Теорема 7.10 (про еквівалентність). *Кожен сепарабельний гільбертів простір H над \mathbf{C} (відповідно над \mathbf{R}) є еквівалентним гільбертовому простору*

$$l^2(\mathbf{C}) = \{ \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty, \quad \alpha_k \in \mathbf{C}, \quad k = 1, \dots, n, \dots \}$$

(відповідно $l^2(\mathbf{R})$).

◁ В H існує ортонормований базис $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ через теорему 7.9. Визначимо відображення $\varphi : H \rightarrow l^2(\mathbf{C})$ співвідношенням

$$h \mapsto \{\phi_k\}_{k=1}^\infty, \quad \text{де} \quad \phi_k = \langle h, e_k \rangle.$$

Із теореми 7.3 випливає, що це відображення визначене (тобто $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbf{C})$), а із теореми 7.6 маємо, що відображення φ є лінійним та взаємно однозначним.

Крім того, якщо $h \mapsto \varphi(h) = \{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ і $l \mapsto \varphi(l) = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$, тоді із неперервності скалярного добутку випливає, що

$$\begin{aligned} \langle h, l \rangle_H &= \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \sum_{k=1}^m \phi_k e_k, \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \rangle_H = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \phi_k \bar{\alpha}_k = \sum_{k=1}^\infty \phi_k \bar{\alpha}_k = \langle \varphi(h), \varphi(l) \rangle_{l^2}, \\ \|h\|_H^2 &= \sum_{k=1}^\infty |\phi_k|^2 = \|\varphi(h)\|_{l^2}^2, \quad \|l\|_H^2 = \sum_{k=1}^\infty |\alpha_k|^2 = \|\varphi(l)\|_{l^2}^2, \end{aligned}$$

тобто відображення φ зберігає скалярний добуток і норми. ▷

Із теореми 7.10 безпосередньо випливає наступна теорема.

Теорема 7.11 (про еквівалентність гільбертових просторів). *Сепарабельні гільбертові простори H_1 і H_2 над \mathbf{C} (відповідно над \mathbf{R}) є еквівалентними.* ◁ ▷

Із наведених теорем випливає, що якщо $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ визначає ортонормовану систему у сепарабельному передгільбертовому просторі $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$, тоді поповнення цього простору $(\bar{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ можна визначити рівністю

$$\bar{H} = \left\{ h = \sum_{k=1}^\infty \phi_k e_k : \{\phi_k\}_{k=1}^\infty \in l^2(\mathbf{C}) \right\}$$

і

$$\langle h, l \rangle_H = \sum_{k=1}^\infty \phi_k \bar{\alpha}_k$$

для $h = \sum_{k=1}^\infty \phi_k e_k$ і $l = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k e_k$.

Наприклад, при $i = \sqrt{-1}$ система $\{e^{x m 2\pi i} : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \subset C^0[0, 1]$ є ортонормованою (щодо $L^2(0, 1)$ -добутку) у сепарабельному просторі $C^0[0, 1]$ і

$$\overline{C^0[0, 1]} = L^2(0, 1) = \left\{ h(x) = \sum_{m=-\infty}^\infty \phi_m e^{x m 2\pi i} : \sum_{m=-\infty}^\infty |\phi_m|^2 < \infty \right\},$$

$$\langle h, l \rangle_{L^2(0,1)} = \sum_{m=-\infty}^\infty \phi_m \bar{\alpha}_m, \quad \|h\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{m=-\infty}^\infty |\phi_m|^2$$

для $h = \sum_{m=-\infty}^\infty \phi_m e^{x m 2\pi i}$ і $l = \sum_{m=-\infty}^\infty \alpha_m e^{x m 2\pi i}$ (де $e^{\varrho i} = \cos \varrho + i \sin \varrho$, $\varrho \in [0, 2\pi]$).

Аналогічно, ця система $\{e^{x m 2\pi i} : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \subset C^\infty[0, 1]$ є ортонормованою в $C^\infty[0, 1]$ (щодо $L^2(0, 1)$ -добутку) і тому

$$\overline{C^\infty[0, 1]} = L^2(0, 1) = \left\{ h(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m e^{x m 2\pi i} : \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi_m|^2 < \infty \right\}.$$

Більш того, простір *тригонометричних поліномів*

$$\text{Trig}[0, 1] = \left\{ h \in C^\infty[0, 1] : h(x) = \sum_{m=-M}^M \phi_m e^{x m 2\pi i}, \quad \phi_m \in \mathbf{C}, \quad M \in \mathbf{N} \right\}$$

є щільним в $L^2(0, 1)$ (оскільки $\overline{C^\infty[0, 1]} = L^2(0, 1)$). Таким чином, отримуємо

$$\overline{\text{Trig}[0, 1]} = L^2(0, 1) = \left\{ h(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m e^{x m 2\pi i} : \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi_m|^2 < \infty \right\}.$$

Приклад 7.12. Використовуючи визначення, маємо

$$\begin{aligned} \cos(\varrho + \varphi) + i \sin(\varrho + \varphi) &= e^{\varrho i + \varphi i} = e^{\varrho i} \cdot e^{\varphi i} = (\cos \varrho + i \sin \varrho)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= (\cos \varrho \cos \varphi - \sin \varrho \sin \varphi) + i(\sin \varrho \cos \varphi + \cos \varrho \sin \varphi), \end{aligned}$$

тобто перевірено, наприклад, що $\sin(\varrho + \varphi) = \sin \varrho \cos \varphi + \cos \varrho \sin \varphi$.

Для $x \in \mathbf{R}^n$ і $m \in \mathbf{Z}^n$ визначимо

$$e^{(x, m) 2\pi i} = e^{(x_1 m_1 + \dots + x_n m_n) 2\pi i} = e^{x_1 m_1 2\pi i} \cdot \dots \cdot e^{x_n m_n 2\pi i},$$

$$\text{Trig}[0, 1]^n = \left\{ h \in C^\infty[0, 1]^n : h(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n : |m| \leq M} \phi_m e^{(x, m) 2\pi i}, \quad \phi_m \in \mathbf{C}, \quad M \in \mathbf{N} \right\}.$$

Безпосередньо перевіряється, що система $\{e^{(x, m) 2\pi i} : m \in \mathbf{Z}^n\} \subset \text{Trig}[0, 1]^n$ є ортонормованою в $\text{Trig}[0, 1]^n$ (щодо $L^2((0, 1)^n)$ -добутку) і тому

$$\overline{\text{Trig}[0, 1]^n} = L^2((0, 1)^n) = \left\{ h(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \phi_m e^{(x, m) 2\pi i} : \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} |\phi_m|^2 < \infty \right\}.$$

Для кожного $k = 1, \dots, n$ функція $h(x) \in \text{Trig}[0, 1]^n$ задовольняє умовам

$$h(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_k + 1, \dots, x_n),$$

які називаються умовами *1-періодичності* і можуть бути записані у наступному вигляді $h(x) = h(x + m) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \forall m \in \mathbf{Z}^n$. Крім того, для кожного $l = 1, \dots$ і $k = 1, \dots, n$ функція $h(x) \in \text{Trig}[0, 1]^n$ задовольняє умовам

$$\frac{\partial^l h(x)}{\partial x_k^l} \Big|_{x_k=0} = \frac{\partial^l h(x)}{\partial x_k^l} \Big|_{x_k=1},$$

які називаються умовами 1-періодичності для нормальних похідних.

Розглянемо лінійний простір $\text{Trig}[0, 1]^n$ над \mathbf{C} як передгільбертів із скалярним добутком

$$(u, v)_{H^1((0,1)^n)} = \int_{(0,1)^n} u(x) \overline{v(x)} dx + \int_{(0,1)^n} (\nabla u(x), \nabla \overline{v(x)}) dx.$$

Для $u(x) = \sum_{\{m \in \mathbf{Z}^n : |m| \leq M\}} \phi_m e^{(x,m)2\pi i} \in \text{Trig}[0, 1]^n$, маємо

$$\|u\|_{H^1((0,1)^n)}^2 = (u, u)_{H^1((0,1)^n)} = \sum_{\{m \in \mathbf{Z}^n : |m| \leq M\}} (1 + |2\pi m|^2) |\phi_m|^2,$$

оскільки

$$\nabla u(x) = \sum_{\{m \in \mathbf{Z}^n : |m| \leq M\}} (2\pi m i) \phi_m e^{(x,m)2\pi i}.$$

В7.13. Поповнення нормованого простору $(\text{Trig}[0, 1]^n, \|\cdot\|_{H^1((0,1)^n)})$ позначається

$$(H_{per}^1((0, 1)^n), \|\cdot\|_{H^1((0,1)^n)})$$

і називається простором *Соболева першого порядку* інтегрованих у ступені 2 (класів еквівалентних) 1-періодичних функцій на $(0, 1)^n$.

За визначенням $H_{per}^1((0, 1)^n) \subset H^1((0, 1)^n)$, але $H_{per}^1((0, 1)^n) \neq H^1((0, 1)^n)$, оскільки функції із $H_{per}^1((0, 1)^n)$ зберігають в певному сенсі умови 1-періодичності.

Безпосередньо перевіряється також, що

$$H_{per}^1((0, 1)^n) = \left\{ u(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \phi_m e^{(x,m)2\pi i} : \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} (1 + |2\pi m|^2) |\phi_m|^2 < \infty \right\}.$$

Для $s \in \mathbf{R}$ і $u(x) = \sum_{\{m \in \mathbf{Z}^n : |m| \leq M\}} \phi_m e^{(x,m)2\pi i} \in \text{Trig}[0, 1]^n$, визначені також норми

$$\|u\|_{H^s((0,1)^n)}^2 = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} (1 + |2\pi m|^2)^s |\phi_m|^2.$$

В7.14. Поповнення нормованого простору $(\text{Trig}[0, 1]^n, \|\cdot\|_{H^s((0,1)^n)})$ позначається

$$(H_{per}^s((0, 1)^n), \|\cdot\|_{H^s((0,1)^n)})$$

і називається простором *Соболева s-го порядку* інтегрованих у ступені 2 (класів еквівалентних) 1-періодичних функцій на $(0, 1)^n$.

Таким чином, для фіксованого $s \in \mathbf{R}$ за визначенням

$$H_{per}^s((0, 1)^n) = \left\{ u(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i} : \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} (1 + |2\pi m|^2)^s |\alpha_m|^2 < \infty \right\}$$

є сепарабельним гільбертовим простором функцій вигляду $u(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i}$ (де ряд збігається у нормі $\|\cdot\|_{H^s((0,1)^n)}$ і коефіцієнти $\alpha_m \in \mathbf{C}$ для $m \in \mathbf{Z}^n$ такі, що $\sum_{m \in \mathbf{Z}^n} (1 + |2\pi m|^2)^s |\alpha_m|^2 < \infty$) із скалярним добутком

$$\langle h, l \rangle_{H_{per}^s((0,1)^n)} = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} (1 + |2\pi m|^2)^s \alpha_m \bar{\beta}_m$$

для $h(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i}$ і $l(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \beta_m e^{(x, m) 2\pi i}$. Зокрема, маємо

$$H_{per}^0((0, 1)^n) = L^2((0, 1)^n) \quad \text{і} \quad H_{per}^s((0, 1)^n) \subset H_{per}^{s'}((0, 1)^n) \quad \text{при} \quad s > s'.$$

Для $s \neq 0$ система $\{e^{(x, m) 2\pi i}, m \in \mathbf{Z}^n\}$ неортонормована в $H_{per}^s((0, 1)^n)$, але

$$e_m(x) = (1 + |2\pi m|^2)^{-s/2} e^{(x, m) 2\pi i} \quad \text{для} \quad m \in \mathbf{Z}^n$$

є ортонормованою системою в $H_{per}^s((0, 1)^n)$, оскільки $\langle e_m, e_m \rangle_{H_{per}^s((0,1)^n)} = 1$. Ряд Фур'є функції $u(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i} \in H_{per}^s((0, 1)^n)$ за цією системою має вигляд

$$u(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \phi_m e_m = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \phi_m (1 + |2\pi m|^2)^{-s/2} e^{(x, m) 2\pi i}$$

де

$$\phi_m = \langle u, e_m \rangle_{H_{per}^s((0,1)^n)} = (1 + |2\pi m|^2)^{s/2} \alpha_m \quad \text{для} \quad m \in \mathbf{Z}^n$$

є коефіцієнтами Фур'є, які належать $l^2(\mathbf{Z}^n, \mathbf{C})$ відповідно до теореми 7.10.

Тому, для кожного $s \in \mathbf{R}$ система $\{e^{(x, m) 2\pi i}, m \in \mathbf{Z}^n\}$ є базисом у просторі $H_{per}^s((0, 1)^n)$ із коефіцієнтами розкладання $\{\alpha_m\}_{m \in \mathbf{Z}^n}$ для $u = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i}$, яки визначаються через коефіцієнти Фур'є $\{\phi_m\}_{m \in \mathbf{Z}^n}$ рівностями

$$\alpha_m = (1 + |2\pi m|^2)^{-s/2} \phi_m \quad \text{та} \quad \alpha_m = \langle u, e^{(x, m) 2\pi i} \rangle_{L^2((0,1)^n)} \quad \text{для} \quad m \in \mathbf{Z}^n.$$

Для кожного $s \in \mathbf{R}$ із теореми 3.15 випливає, що

$$H_{per}^s((0,1)^n) = \mathbf{C} \oplus H_{pe*}^s((0,1)^n),$$

де $H_{pe*}^s((0,1)^n) = \mathbf{C}^\perp = \{v(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \alpha_m e^{(x, m) 2\pi i} \in H_{per}^s((0, 1)^n) : \alpha_0 = 0\}$.

Для $Z_*^n = Z^n \setminus \{0\}$, фіксованого $s \in \mathbf{R}$ і $u(x) = \sum_{m \in Z_*^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} \in H_{per}^s((0,1)^n)$ визначені норми

$$\|u\|_{H_{per}^s((0,1)^n)}^2 = \sum_{m \in Z_*^n} (1 + |2\pi m|^2)^s |\alpha_m|^2$$

та

$$\|u\|_{*s}^2 = \|u\|_{H_{pe*}^s((0,1)^n)}^2 = \sum_{m \in Z_*^n} |m|^{2s} |\alpha_m|^2.$$

Теорема 7.15 (про еквівалентність Пуанкаре норм Соболева для 1-періодичних функцій). Для фіксованого $s \in \mathbf{R}$ норми $\|\cdot\|_{*s}$ і $\|\cdot\|_{H_{per}^s((0,1)^n)}$ на просторі $H_{per}^s((0,1)^n)$ є еквівалентними, тобто знайдуться постійні $\alpha, \beta > 0$ такі, що

$$\alpha \|u\|_{*s} \leq \|u\|_{H_{per}^s((0,1)^n)} \leq \beta \|u\|_{*s} \tag{7.4}$$

для кожного $u \in H_{per}^s((0,1)^n)$.

◁ Наприклад, для $s > 0$ і кожного $m \in \mathbf{Z}_*^n$ маємо нерівності

$$|m|^{2s} \leq (1 + |2\pi m|^2)^s \leq (1 + 4\pi^2)^s |m|^{2s}.$$

Тому для $u = \sum_{m \in Z_*^n} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} \in H_{pe*}^s((0,1)^n)$ отримуємо

$$\|u\|_{*s}^2 = \sum_{m \in Z_*^n} |m|^{2s} |\alpha_m|^2 \leq \sum_{m \in Z_*^n} (1 + |2\pi m|^2)^s |\alpha_m|^2 \leq (1 + 4\pi^2)^s \sum_{m \in Z_*^n} |m|^{2s} |\alpha_m|^2,$$

де ряди є збіжними за визначенням. Аналогічно розглядається випадок $s \leq 0$. ▷

Приклад 7.16. Нехай $n = 1$ і $u = \chi_{[1/4, 3/4]}(x)$ є характеристичною функцією відрізка $[1/4, 3/4] \subset [0, 1]$. Обчислимо коефіцієнти розвинення цієї функції у ряд $u = \alpha_0 + \sum_{m \in Z_*} \alpha_m e^{x m 2\pi i}$. За визначенням $\alpha_0 = 1/2$ і при $m \neq 0$ маємо

$$\alpha_m = \langle u, e^{2\pi i m x} \rangle_{L^2(0,1)} = \int_{1/4}^{3/4} e^{-2\pi i m x} dx = \frac{-1}{2\pi i m} e^{-2\pi i m x} \Big|_{1/4}^{3/4}.$$

Тому $\alpha_m = 0$ при $m = 2l$, $\alpha_m = -(2\pi m)^{-1}$ при $m = 4l + 1$ і $\alpha_m = (2\pi m)^{-1}$ при $m = 4l + 3$ для $l \in \mathbf{Z}_*$. Таким чином,

$$u = \frac{1}{2} - \sum_{m \in Z_*: m=1 \bmod 4} (2\pi m)^{-1} e^{x m 2\pi i} + \sum_{m \in Z_*: m=3 \bmod 4} (2\pi m)^{-1} e^{x m 2\pi i}$$

i

$$u \in H_{per}^s(0, 1) \quad \text{при} \quad s < \frac{1}{2},$$

оскільки

$$\sum_{m \in Z_*: m=1 \pmod{2}} \frac{|m|^{2s}}{|2\pi m|^2} = \sum_{m \in Z_*: m=1 \pmod{2}} \frac{(2\pi)^{-2}}{|m|^{2-2s}} < \infty \quad \text{лише при} \quad s < \frac{1}{2}.$$

Теорема 7.17 (Соболева про вкладення для 1-періодичних функцій ($n = 1$)).

Нехай $n = 1$ і $u \in H_{per}^s(0, 1)$ при $\frac{1}{2} < s$. Тоді

$$u \in C^0[0, 1],$$

тобто $H_{per}^s(0, 1) \subset C^0[0, 1]$ у сенсі, що існує постійна C така, що для кожного $u \in H_{per}^s(0, 1)$ існує (єдиний) представник \tilde{u} класу u такий, що

$$\|\tilde{u}\|_{C^0[0,1]} \leq C \|u\|_{H_{per}^s(0,1)} \quad (\text{неперервність вкладення}).$$

◁ Можна вважати, що $u = \sum \alpha_m e^{x m 2\pi i} \in H_{pe*}^s(0, 1)$ при $\frac{1}{2} < s$. Тоді

$$|u|^2 = \left| \sum \alpha_m |m|^s |m|^{-s} e^{x m 2\pi i} \right|^2 \leq \left| \sum \alpha_m^2 |m|^{2s} \right| \left| \sum |m|^{-2s} \right| = c \|u\|_{*s}^2,$$

оскільки $c = \sum |m|^{-2s} < \infty$ при $\frac{1}{2} < s$. Таким чином, отримуємо

$$\|u\|_{C^0[0,1]} = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| \leq C \|u\|_{H_{per}^s(0,1)}$$

принаймні, якщо $u \in \text{Trig}[0, 1]$. Із цієї нерівності випливає, що послідовність

$$s_k = \sum_{m \in Z_0: |m| \leq k} \alpha_m e^{x m 2\pi i}$$

є фундаментальною в $C^0[0, 1]$, оскільки ця послідовність є фундаментальною в $H_{per}^s(0, 1)$. Тому існує єдине $\tilde{u} \in C^0[0, 1]$ таке, що $\|\tilde{u} - s_k\|_{C^0[0,1]} \rightarrow 0$, оскільки $(C^0[0, 1], \|\cdot\|_{C^0[0,1]})$ є повним. Крім того, неперервна функція $\tilde{u} \in C^0[0, 1]$ є представником класу $u \in H_{pe*}^s(0, 1)$, оскільки цей клас однозначно визначається коефіцієнтами $\{\alpha_m\}_{m \in Z_*}$ у відповідності із теоремою 7.6. ▷

Приклад 7.18. Нехай $n = 2$ і $u = \chi_{[1/4, 3/4]^2}(x_1, x_2)$ є характеристичною функцією квадрату $[1/4, 3/4]^2 \subset [0, 1]^2$. Обчислимо коефіцієнти розвинення цієї функції у ряд $u = \alpha_0 + \sum_{m \in \mathbb{Z}_*^2} \alpha_m e^{(x, m)2\pi i}$. За визначенням $\alpha_0 = 1/4$ і

$$\alpha_{(m_1, 0)} = \langle u, e^{2\pi i m_1 x_1} \rangle_{L^2(0,1)^2} = \frac{1}{2} \int_{1/4}^{3/4} e^{-2\pi i m_1 x_1} dx_1 = \frac{-1}{4\pi i m_1} e^{-2\pi i m_1 x_1} \Big|_{1/4}^{3/4},$$

$$\alpha_{(0, m_2)} = \langle u, e^{2\pi i m_2 x_2} \rangle_{L^2(0,1)^2} = \frac{1}{2} \int_{1/4}^{3/4} e^{-2\pi i m_2 x_2} dx_2 = \frac{-1}{4\pi i m_2} e^{-2\pi i m_2 x_2} \Big|_{1/4}^{3/4},$$

$$\alpha_{(m_1, m_2)} = 4 \alpha_{(m_1, 0)} \alpha_{(0, m_2)} = \frac{1}{4\pi m_1 \pi m_2} e^{-2\pi i m_1 x_1} \Big|_{1/4}^{3/4} e^{-2\pi i m_2 x_2} \Big|_{1/4}^{3/4}$$

при $m_1 \neq 0$ і $m_2 \neq 0$. Таким чином, як в прикладі 7.16, отримуємо

$$u \in H_{per}^s((0, 1)^2) \quad \text{при} \quad s < \frac{1}{2}.$$

(Завдання для самостійної роботи: Нехай $\varepsilon > 0$, $x \in (0, 1)^n$,

$$r = \left(\left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 + \dots + \left(x_n - \frac{1}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$u(x) = r^{-\varepsilon} - 2^\varepsilon$ при $r^{-\varepsilon} \geq 2^\varepsilon$ та $u(x) = 0$ при $r^{-\varepsilon} < 2^\varepsilon$. Перевірити, що

$$u \in H_{per}^s((0, 1)^2) \quad \text{при} \quad s < \frac{n}{2} - \varepsilon.)$$

Теорема 7.19 (Соболева про вкладення для 1-періодичних функцій). Нехай

$$s > \frac{n}{2}.$$

Тоді для цілого l виконані неперервні вкладення

$$H_{per}^s((0, 1)^n) \subset C^0([0, 1]^n) \quad \text{та} \quad H_{per}^{s+l}((0, 1)^n) \subset C^l([0, 1]^n) \quad \text{при} \quad l \geq 0. \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема вкладення для області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ формулюється наступним чином.

Теорема 7.20 (Соболева про вкладення). Нехай область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ та ціле s таке, що

$$s > \frac{n}{p}.$$

Тоді для цілого l виконані неперервні вкладення

$$W^{s,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega}) \quad i \quad W^{s+l,p}(\Omega) \subset C^l(\bar{\Omega}) \quad при \quad l \geq 0.$$

Зокрема $H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ при $n = 2, 3$ і $H^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ при $n = 1$. $\triangleleft \triangleright$

Теорема 7.21 (\exists 1 слабкого розв'язку 1-періодичної задачі для рівняння Пуассона). Нехай $s \in \mathbf{R}$ і $f \in H_{pe*}^s((0, 1)^n)$. Тоді \exists 1 розв'язок задачі:

$$\text{знайти } u \in H_{pe*}^{s+2}((0, 1)^n) : \quad -\Delta u = f \quad в \quad H_{pe*}^s((0, 1)^n). \quad (7.5)$$

\triangleleft Дійсно, якщо $f = \sum_m \alpha_m e^{(x,m)2\pi i} \in H_{pe*}^s((0, 1)^n)$, тоді

$$u = (2\pi)^{-2} \sum_m |m|^{-2} \alpha_m e^{(x,m)2\pi i}$$

визначає розв'язок $u \in H_{pe*}^{s+2}((0, 1)^n)$ задачі (7.5). \triangleright

Відображення $f \mapsto u$, яке зіставляє кожному $f \in H_{pe*}^s((0, 1)^n)$ єдиний розв'язок $u \in H_{pe*}^{s+2}((0, 1)^n)$ задачі (7.5), позначається через $(-\Delta)^{-1}$ і називається зворотним оператором до оператора Лапласа. Таким чином, $u = (-\Delta)^{-1}f$ та

$$(-\Delta)^{-1} : H_{pe*}^s((0, 1)^n) \rightarrow H_{pe*}^{s+2}((0, 1)^n)$$

є неперервним лінійним взаємно однозначним відображенням.

Із теореми (Соболева) 7.19 і теореми 7.21 отримуємо наступне твердження.

Теорема 7.22 (про класичний розв'язок 1-періодичної задачі для рівняння Пуассона). Нехай $s \in \mathbf{R}$ таке, що

$$s > \frac{n}{2},$$

$f \in H_{pe*}^s((0, 1)^n)$ та $u \in H_{pe*}^{s+2}((0, 1)^n)$ є розв'язком задачі (7.5). Тоді

$$f \in C^0([0, 1]^n) \quad i \quad u \in C^2([0, 1]^n). \quad \triangleleft \triangleright$$

8. Формула інтегрування частинами.

У формулу інтегрування частинами на області Ω входить інтеграл по межі $\partial\Omega$. Тому перш ніж привести цю формулу слід визначити інтеграл по межі. Для цього корисно нагадати і уточнити умови на межу областей що розглядаються.

В8.1. Область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ має *ліпшицеву межу* $\partial\Omega$, якщо $\partial\Omega$ є компактною і для кожного $x \in \partial\Omega$ існує відкрита множина $U \subset \mathbf{R}^n$, $x \in U$ і взаємно однозначне відображення $\psi : B = \{y \in \mathbf{R}^n : |y| < 1\} \rightarrow U$ такі, що

$$\psi \in \text{Lip}(\overline{B}), \quad \psi^{-1} \in \text{Lip}(\overline{U}),$$

$$\psi(B_+) = U \cap \Omega, \quad \psi(B_-) = U \cap (\mathbf{R} \setminus \overline{\Omega}), \quad \psi(B_0) = U \cap \partial\Omega,$$

де $B_+ = \{y \in B : y_n > 0\}$, $B_- = \{y \in B : y_n < 0\}$ і $B_0 = \{y \in B : y_n = 0\}$.

Через компактність $\partial\Omega$, це визначення еквівалентне наступному.

В8.2. Область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ має *ліпшицеву межу*, якщо існують ціле $K > 0$, відкриті кулі $\Omega_k = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < \varrho_k\}$ радіусу $\varrho_k > 0$ при $k = 1, \dots, K$ і взаємно однозначні відображення $\psi_k : B \rightarrow \Omega_k$, $k = 1, \dots, K$ такі, що

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{k=1}^K \Omega_k, \quad \psi_k \in \text{Lip}(\overline{B}), \quad \psi_k^{-1} \in \text{Lip}(\overline{\Omega_k}),$$

$\psi_k(B_+) = \Omega_k \cap \Omega$, $\psi_k(B_-) = \Omega_k \cap (\mathbf{R} \setminus \overline{\Omega})$, $\psi_k(B_0) = \Omega_k \cap \partial\Omega$ для $k = 1, \dots, K$.

Теорема 8.3 (про локальні координати). *Існують функції $\omega_k(x') \in \text{Lip}(\overline{\Omega'_k})$ для $k = 1, \dots, K$ такі, що*

$$\Omega_k \cap \partial\Omega = \{x = (x', x_n) : x_n = \omega_k(x'), \quad x' \in \Omega'_k\}$$

$\Omega_k \subset \{x = (x', x_n) : \omega_k(x') - \varrho_k < x_n < \omega_k(x') + \varrho_k, \quad x' \in \Omega'_k\}$ при $k = 1, \dots, K$

де $\Omega'_k = \{x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1} : |x'| < \varrho_k\}$, ϱ_k і Ω_k визначені в В8.2. $\triangleleft \triangleright$

Теорема 8.4 (про розбиття одиниці). *Існують функції $\varphi_k(x) \in C_0^\infty(\Omega_k)$, $k = 0, 1, \dots, K$, які визначені на $\bigcup_{k=0}^K \Omega_k$ і такі, що*

$$\sum_{k=0}^K \varphi_k(x) = 1 \quad \text{і} \quad 0 \leq \varphi_k(x) \leq 1 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega,$$

де $\Omega_0 = \Omega$ і Ω_k , $k = 1, \dots, K$ визначені в В8.2. (Таким чином $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{k=0}^K \Omega_k$). $\triangleleft \triangleright$

Використовуючи теореми 8.3 і 8.4 інтеграл від функції $f \in C^0(\partial\Omega)$ по межі $\partial\Omega$ можна визначити рівністю

$$\int_{\partial\Omega} f(x) ds = \sum_{k=1}^K \int_{\partial\Omega} f(x) \varphi_k(x) ds =$$

$$= \sum_{k=1}^K \int_{\Omega'_k} f(x', \omega_k(x')) \varphi_k(x', \omega_k(x')) \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \omega_k(x')}{\partial x'_i} \right)^2 \right)^{1/2} dx',$$

де інтеграли по Ω'_k визначені, оскільки обчислюються по кулі (яка є областю) $\Omega'_k = \{ x' \in \mathbf{R}^{n-1} : |x'| < \varrho_k \}$ і відомо, що $\nabla_{x'} \omega_k(x') \in L^\infty(\Omega'_k)$ при $k = 1, \dots, K$. Відомо і безпосередньо перевіряється також, що це визначення інтеграла по межі не залежить від вибору локальних координат і розбиття одиниці.

На лінійному просторі $C^0(\partial\Omega)$ можна задати норми

$$\|f\|_{L^p(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |f(x)|^p ds \right)^{1/p} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty,$$

$\|f\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(\partial\Omega)}$ для $f \in C^0(\partial\Omega)$ і визначити банахів простір $L^p(\partial\Omega)$ як поповнення $C^0(\partial\Omega)$ по відповідній нормі $\|f\|_{L^p(\partial\Omega)}$.

Розглянемо $u \in C^1(\overline{\Omega})^n$ і $v \in C^1(\overline{\Omega})$, тоді виконана наступна формула інтегрування частинами Стокса (Гауса-Остроградського-Гріна-Рімана)

$$\int_{\Omega} (u, \nabla v) dx + \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) v dx = \int_{\partial\Omega} (\nu, u) v ds, \quad (8.1)$$

де $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ є нормаллю до $\partial\Omega$ і, наприклад, $(u, \nabla v) = u_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \dots + u_n \frac{\partial v}{\partial x_n}$.

Зокрема, якщо $u = \nabla w$ для $w \in C^2(\overline{\Omega})$, тоді

$$\int_{\Omega} (\nabla w, \nabla v) dx + \int_{\Omega} (\Delta w) v dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right) v ds. \quad (8.2)$$

Наприклад, для $n = 1$, $u \in C^1[0, 1]$ і $v \in C^1[0, 1]$, отримуємо

$$\int_0^1 u v'_x dx + \int_0^1 u'_x v dx = u(1) v(1) - u(0) v(0) \quad \text{і} \quad \int_0^1 u'_x dx = u(1) - u(0).$$

Безпосередньо із визначень випливає, що для $u \in C^1(\overline{\Omega})^n$, $w \in C^2(\overline{\Omega})$ та $v \in H_0^1(\Omega)$ формули (8.1) і (8.2) мають вигляд

$$\int_{\Omega} (u, \nabla v) dx + \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) v dx = 0, \quad \int_{\Omega} (\nabla w, \nabla v) dx + \int_{\Omega} (\Delta w) v dx = 0.$$

Розглянемо для $u, v \in H^1(\Omega)$ білінійну форму

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx.$$

Ця форма не є коерцитивною ($\exists \alpha > 0 : a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}$) при $v = 1$.

Із теореми 3.15 випливає, що

$$H^1(\Omega) = \mathbf{R} \oplus H_*^1(\Omega),$$

де

$$H_*^1(\Omega) = \mathbf{R}^\perp = \{v \in H^1(\Omega) : \langle v, l \rangle_{H^1(\Omega)} = 0 \forall l \in \mathbf{R}\} = \{v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v dx = 0\},$$

оскільки $\langle v, l \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla l) dx + \int_{\Omega} v l dx = l \left(\int_{\Omega} v dx \right) \quad \forall l \in \mathbf{R}$.

Аналогічно, із теореми 3.15 випливає, що

$$L^2(\Omega) = \mathbf{R} \oplus L_*^2(\Omega),$$

де $L_*^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} v dx = 0\}$.

Теорема 8.5 (нерівність Пуанкаре). *Нехай $u \in H_*^1(\Omega)$. Тоді існує постійна $C = C(\Omega)$ така, що*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}. \quad \triangleleft \triangleright$$

Доведення цієї нерівності аналогічно доведенню нерівності Фрідрікса (§ 5).

Із нерівності Пуанкаре випливає, що норми $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ і $\|\cdot\|_{H_*^1(\Omega)} = \|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)^n}$ є еквівалентними на $H_*^1(\Omega)$, тобто $H_*^1(\Omega)$ можна розглядати із скалярним добутком

$$(u, v)_{H_*^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) dx$$

і білінійна форма $a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx$ є коерцитивною на $H_*^1(\Omega)$.

Таким чином, для $f \in L^2_*(\Omega)$ із теореми 6.11 випливає наступне твердження.

Теорема 8.6 (\exists 1 слабкого розв'язку задачі Неймана для рівняння Пуассона).

Нехай $f \in L^2_*(\Omega)$. Тоді \exists 1 розв'язок задачі

$$\text{знайти } u \in H^1_*(\Omega) : \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H^1_*(\Omega),$$

яка еквівалентна задачі

$$\text{знайти } u \in H^1_*(\Omega) : \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (8.3)$$

Якщо $u \in C^2(\bar{\Omega})$, тоді задача (8.3) еквівалентна задачі: знайти $u \in H^1_*(\Omega)$:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{на } \partial\Omega, \end{aligned}$$

яка називається однорідною задачею Неймана для рівняння Пуассона.

◁ Використовуючи (8.2) і (8.3), отримуємо

$$0 = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx - \int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} (-\Delta u - f) v dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) v ds \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Звідки при $v \in C_0^\infty(\Omega)$ маємо $-\Delta u = f$. Таким чином, при $v = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ виводимо, що

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 ds. \quad \triangleright$$

Нехай функція $a(x) \in L^\infty(\partial\Omega)$ така, що $\beta \geq a(x) \geq \alpha > 0$ для деяких $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$. Розглянемо для $u, v \in H^1(\Omega)$ білінійну форму

$$b(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx + \int_{\partial\Omega} a u v ds.$$

Буде доведено, що ця форма визначена і є коерцитивною на $H^1(\Omega)$.

Таким чином, для $f \in L^2(\Omega)$ із теореми 6.11 випливає наступне твердження.

Теорема 8.7 (\exists 1 слабкого розв'язку змішаної задачі для рівняння Пуассона).

Нехай $f \in L^2(\Omega)$. Тоді \exists 1 розв'язок задачі

$$\text{знайти } u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx + \int_{\partial\Omega} a u v ds = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (8.4)$$

Якщо $u \in C^2(\overline{\Omega})$, тоді задача (8.4) еквівалентна задачі: знайти $u \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + a u &= 0 && \text{на } \partial\Omega, \end{aligned}$$

яка називається однорідною змішаною задачею для рівняння Пуассона.

◁ Використовуючи (8.2) і (8.4), отримуємо

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx - \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} a u v ds = \\ &= \int_{\Omega} (-\Delta u - f) v dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + a u \right) v ds \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Звідки $-\Delta u = f$ при $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Таким чином, при $v = \frac{\partial u}{\partial \nu} + a u$ маємо

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + a u \right)^2 ds. \quad \triangleright$$

За визначенням

$$H_{per}^1((0, 1)^n) = \mathbf{C} \oplus H_{pe*}^1((0, 1)^n) \quad \text{і} \quad L^2((0, 1)^n) = \mathbf{C} \oplus L_*^2((0, 1)^n),$$

де, наприклад, маємо

$$H_{pe*}^1((0, 1)^n) = \left\{ u(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \phi_m e^{(x, m) 2\pi i} \in H_{per}^1((0, 1)^n) : \phi_0 = 0 \right\}.$$

Теорема 8.8 (нерівність Пуанкаре для 1-періодичних функцій). Для 1-періодичної функції $u \in H_{pe*}^1((0, 1)^n)$ виконана нерівність

$$\|u\|_{L^2((0, 1)^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^2((0, 1)^n)}.$$

◁ Для $u = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \phi_m e^{(x, m) 2\pi i} \Big|_{\phi_0=0} \in H_{pe*}^1((0, 1)^n)$ маємо

$$\|u\|_{L^2((0, 1)^n)} = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} |\phi_m|^2 \Big|_{\phi_0=0} \quad \text{і} \quad \|\nabla u\|_{L^2((0, 1)^n)} = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} |2\pi m|^2 |\phi_m|^2 \Big|_{\phi_0=0},$$

тобто нерівність Пуанкаре для 1-періодичних функцій випливає із очевидної нерівності

$$|\phi_m|^2 \leq |2\pi m|^2 |\phi_m|^2 \quad \text{для} \quad m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}. \quad \triangleright$$

Із нерівності Пуанкаре випливає, що норми $\|\cdot\|_{H_{pe*}^1((0,1)^n)} = \|\nabla(\cdot)\|_{L^2((0,1)^n)}$ та $\|\cdot\|_{H_{per}^1((0,1)^n)}$ є еквівалентними на $H_{pe*}^1(\Omega)$, тобто $H_{pe*}^1(\Omega)$ можна розглядати із скалярним добутком

$$(u, v)_{H_{pe*}^1((0,1)^n)} = \int_{(0,1)^n} (\nabla u(x), \nabla \overline{v(x)}) dx.$$

Таким чином, для $f \in L_*^2((0,1)^n)$ із теореми Рісса випливає наступне твердження.

Теорема 8.9 ($\exists 1$ слабкого розв'язку 1-періодичної задачі для рівняння Пуассона). *Нехай $f \in L_*^2((0,1)^n)$. Тоді $\exists 1$ розв'язок задачі: знайти $u \in H_{pe*}^1((0,1)^n)$:*

$$\int_{(0,1)^n} (\nabla u(x), \nabla \overline{v(x)}) dx = \int_{(0,1)^n} f(x) \overline{v(x)} dx \quad \forall v \in H_{pe*}^1((0,1)^n),$$

яка еквівалентна задачі: знайти $u \in H_{pe*}^1((0,1)^n)$:

$$\int_{(0,1)^n} (\nabla u(x), \nabla \overline{v(x)}) dx = \int_{(0,1)^n} f(x) \overline{v(x)} dx \quad \forall v \in H_{per}^1((0,1)^n). \quad (8.5)$$

(Завдання для самостійної роботи: Перевірити, що для $u \in C^2([0,1]^n)$ задача (8.5) еквівалентна задачі: знайти $u \in H_{pe*}^1((0,1)^n)$:

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad (0,1)^n,$$

$$u(x)|_{x_k=0} = u(x)|_{x_k=1} \quad \text{і} \quad \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right|_{x_k=0} = \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right|_{x_k=1} \quad \text{при} \quad k = 1, \dots, n,$$

яка називається *1-періодичною задачею для рівняння Пуассона.*)

9. Теорема вкладення. Теорема про компактність.

Прикладом теорема про компактність є наступне твердження.

Теорема 9.1 (Релліха-Кондрашова про компактність). *Нехай $C > 0$ і послідовність $\{v_s\}_{s=1}^\infty \subset H^1(\Omega)$ така, що*

$$\|v_s\|_{H^1(\Omega)} \leq C \quad \forall s.$$

Тоді $\exists v \in H^1(\Omega)$ і підпослідовність $\{v_{\tilde{s}}\}_{\tilde{s}=1}^\infty \subset \{v_s\}_{s=1}^\infty$ такі, що

$$v_{\tilde{s}} \rightharpoonup v \quad \text{в } H^1(\Omega),$$

$$v_{\tilde{s}} \rightarrow v \quad \text{в } L^2(\Omega). \quad \triangleleft \triangleright$$

Розглянемо функцію $u \in C^1[0, 1]$. Із формули Стокса отримуємо

$$u(0) = - \int_0^x u'_\tau(\tau) d\tau + u(x). \quad (9.1)$$

Використовуючи нерівність $(\alpha + \beta)^2 \leq 2\alpha^2 + 2\beta^2$, маємо

$$u^2(0) \leq 2 \left(\int_0^x u'_\tau(\tau) d\tau \right)^2 + 2u^2(x).$$

Із нерівності Гельдера випливає, що

$$\left| \int_0^x u'_\tau(\tau) d\tau \right| \leq \left(\int_0^x (u'_\tau(\tau))^2 d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^x 1 d\tau \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 (u'_\tau(\tau))^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Таким чином, інтегруючи передостанню нерівність, отримуємо

$$u^2(0) \leq 2 \int_0^1 (u'_\tau(\tau))^2 d\tau + 2 \int_0^1 u^2(\tau) d\tau = 2 \|u\|_{H^1(0,1)}^2,$$

тобто

$$|u(0)| \leq \sqrt{2} \|u\|_{H^1(0,1)}.$$

Ця нерівність означає, що оператор обчислення значення функції

$$u \mapsto u(0) = u|_{x=0}$$

є обмеженим як оператор із $C^1[0, 1]$ в $L^2(0) = \mathbf{R}$. Цей оператор називається *оператором сліду* і є визначеним як оператор із $H^1(0, 1)$ в $L^2(0)$ через теорему про продовження операторів по неперервності. Такий оператор позначається

$$\text{Tr}|_{x=0} : H^1(0, 1) \rightarrow L^2(0).$$

Необхідно підкреслити, що для $u \in L^2(0, 1)$ визначення оператора сліду не має сенсу і що $H^1(0, 1) = \{v \in L^2(0, 1) : v'_x \in L^2(0, 1)\}$.

Аналогічно із (9.1) випливає, що для кожного $\alpha \in [0, 1]$ оператор сліду

$$u \mapsto u(\alpha) = u|_{x=\alpha}$$

є визначеним як оператор із $H^1(0, 1)$ в $L^2(\alpha)$. Цій оператор позначається $\text{Tr}|_{x=\alpha}$.

Крім того, із (9.1) маємо, що для $u \in H^1(0, 1)$ та $\alpha, \beta, \sigma \in [0, 1]$ таких, що $0 \leq \alpha + \sigma \leq 1$ і $0 \leq \beta - \sigma \leq 1$ виконані нерівності

$$|u(\alpha + \sigma) - u(\alpha)|^2 \leq \int_{\alpha}^{\alpha + \sigma} (u'_\tau(\tau))^2 d\tau, \quad |u(\beta) - u(\beta - \sigma)|^2 \leq \int_{\beta - \sigma}^{\beta} (u'_\tau(\tau))^2 d\tau. \quad (9.2)$$

Для інтеграла Лебега по області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ виконано наступне твердження.

Теорема 9.2 (про абсолютну неперервність інтеграла Лебега). *Нехай $f \in L^1(\Omega)$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке що*

$$\left| \int_{\omega} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \text{mes}(\omega) = \int_{\omega} dx < \delta$$

для кожного вимірного $\omega \subset \Omega$. $\triangleleft \triangleright$

Із цієї теореми і нерівностей (9.2) відразу випливає наступне твердження.

Теорема 9.3 (вкладення $H^1(0, 1) \subset C^0[0, 1]$). *Нехай $v \in H^1(0, 1)$. Тоді*

$$v \in C^0[0, 1],$$

тобто $H^1(0, 1) \subset C^0[0, 1]$ у сенсі, що існує постійна C така, що для кожного $v \in H^1(0, 1)$ існує (єдиний) представник \tilde{v} класу v такий, що

$$\|\tilde{v}\|_{C^0[0,1]} \leq C \|v\|_{H^1(0,1)} \quad (\text{неперервність вкладення}).$$

Теорема вкладення для області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ формулюється таким чином.

Теорема 9.4 (Соболева про вкладення). *Нехай $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ є областю, $1 \leq p < \infty$ і ціле m таке, що*

$$m > \frac{n}{p}.$$

Тоді для цілого l виконані неперервні вкладення

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}) \quad \text{і} \quad W^{m+l,p}(\Omega) \subset C^l(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad l \geq 0.$$

Зокрема $H^2(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ при $n = 2, 3$ і $H^1(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ при $n = 1$. $\triangleleft \triangleright$

Насправді, вкладення $W^{m,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ в цій теоремі є не тільки неперервним, але і компактним в наступному сенсі.

Теорема 9.5 (Соболева про компактність). *Нехай виконані умови теореми 9.4, $C > 0$ і послідовність $\{v_s\}_{s=1}^{\infty} \subset W^{m,p}(\Omega)$ така, що*

$$\|v_s\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C \quad \forall s.$$

Тоді $\exists v \in W^{m,p}(\Omega)$ і підпослідовність $\{v_{\tilde{s}}\}_{\tilde{s}=1}^{\infty} \subset \{v_s\}_{s=1}^{\infty}$ такі, що

$$v_{\tilde{s}} \rightharpoonup v \quad \text{в} \quad W^{m,p}(\Omega),$$

$$v_{\tilde{s}} \rightarrow v \quad \text{в} \quad C^0(\overline{\Omega}). \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 9.6 (про регулярність розв'язків задачі Дірихле для рівняння Пуассона). *Нехай ціле $m \geq 0$, $\partial\Omega$ має клас C^{m+2} , $f \in H^{-1}(\Omega)$ і $u \in H_0^1(\Omega)$ розв'язок задачі*

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega), \quad (9.3)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega).$$

Тоді

$$f \in W^{m,p}(\Omega) \quad \Rightarrow \quad u \in W^{m+2,p}(\Omega) \quad (\partial_e W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)). \quad \triangleleft \triangleright$$

Із цієї теореми і теореми Соболева відразу випливає наступне твердження.

Теорема 9.7 (про класичний розв'язок задачі Дірихле для рівняння Пуассона). *Нехай ціле m таке, що*

$$m > \frac{n}{p},$$

$\partial\Omega$ має клас C^{m+2} , $f \in W^{m,p}(\Omega)$ та $u \in H_0^1(\Omega)$ розв'язок задачі (9.3). Тоді

$$f \in C^0(\bar{\Omega}) \quad i \quad u \in C^2(\bar{\Omega}). \quad \triangleleft \triangleright$$

Відзначимо, що при виконанні умов цієї теореми виконані строгі вкладення

$$C^m(\bar{\Omega}) \subset W^{m,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega}).$$

Повернемося до (9.1). Із цієї формули маємо

$$\int_0^1 u^2(\tau) d\tau \leq 2 \int_0^1 (u'_\tau(\tau))^2 d\tau + 2 u^2(0)$$

і

$$\|u\|_{H^1(0,1)}^2 \leq 3 \int_0^1 (u'_\tau(\tau))^2 d\tau + 2 u^2(0) \leq 3 \int_0^1 (u'_\tau(\tau))^2 d\tau + 3 u^2(0) + 3 u^2(1).$$

Ця нерівність означає, що білінійна форма

$$b(u, v) = \int_0^1 u'_\tau(\tau) v'_\tau(\tau) d\tau + \int_{\partial[0,1]} u(s) v(s) ds$$

є коерцитивною на $H^1(0, 1)$ (дійсно, $(1/3)\|v\|_{H^1(0,1)}^2 \leq b(v, v)$). Отже, білінійна форма (8.4) також є коерцитивною на $H^1(0, 1)$, оскільки

$$\alpha \int_{\partial[0,1]} u(s)^2 ds \leq \int_{\partial[0,1]} a(s) u(s)^2 ds,$$

де $a(s) \geq \alpha > 0$ для деякого $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

У загальному випадку коерцитивність білінійної форми в (8.4) слідує з наступних двох теорем.

Теорема 9.8 (про оператор сліду). *Нехай $v \in C^1(\bar{\Omega})$. Тоді існує постійна $C = C(\Omega)$ така, що*

$$\int_{\partial\Omega} |v|^2 ds = \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad \triangleleft \triangleright$$

Ця теорема означає, що оператор обчислення значення функції

$$v \mapsto v|_{\partial\Omega}$$

є обмеженим як оператор із $C^1(\bar{\Omega})$ в $L^2(\partial\Omega)$. Цей оператор називається *оператором сліду* і є визначеним як оператор із $H^1(\Omega)$ в $L^2(\partial\Omega)$ через теорему про продовження операторів по неперервності. Такий оператор позначається

$$\text{Tr}|_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega).$$

Зокрема, $\text{Tr}|_{\partial\Omega}(H_0^1(\Omega)) = \theta \in L^2(\partial\Omega)$.

Теорема 9.9 (про еквівалентність норм на $H^1(\Omega)$). *Нехай $v \in H^1(\Omega)$. Тоді існують постійні α, β такі, що*

$$\alpha \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\partial\Omega} |v|^2 ds \right)^{1/2} \leq \beta \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad \triangleleft \triangleright$$

Нагадаємо, що за визначенням

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} |v|^2 dx.$$

В9.10. Визначимо $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ як образ оператора сліду :

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \text{Tr}|_{\partial\Omega}(H^1(\Omega)) = \{ v \in L^2(\partial\Omega) : \exists \tilde{v} \in H^1(\Omega) : v = \text{Tr}|_{\partial\Omega}(\tilde{v}) \}.$$

Нехай $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Розглянемо задачу : знайти $u \in H^1(\Omega)$:

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega), \quad (9.4)$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^{1/2}(\partial\Omega).$$

За визначенням існує $\tilde{\varphi} \in H^1(\Omega)$ таке, що $\varphi = \tilde{\varphi}|_{\partial\Omega}$. Таким чином, задачу (9.4) можна переписати у вигляді : знайти $u \in H^1(\Omega)$:

$$-\Delta(u - \tilde{\varphi}) = f + \text{div}(\nabla \tilde{\varphi}) \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega), \quad (9.5)$$

$$(u - \tilde{\varphi}) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Вже відомо (§ 5), що $\exists 1$ розв'язок $(u - \tilde{\varphi}) \in H_0^1(\Omega)$ цієї задачі. Однак, може статися, що такий розв'язок буде залежним від вибору продовження $\tilde{\varphi} \in H^1(\Omega)$ такого, що $\varphi = \tilde{\varphi}|_{\partial\Omega}$. Нехай $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \in H^1(\Omega)$ є такими, що $\varphi = \tilde{\varphi}_1|_{\partial\Omega} = \tilde{\varphi}_2|_{\partial\Omega}$ та u_1, u_2 є відповідними цим продовженням розв'язки задачі (9.5). Тоді маємо, що $\tilde{u} = u_1 - u_2 \in H^1(\Omega)$ є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{u} &= 0 \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega), \\ \tilde{u} &= 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^{1/2}(\partial\Omega) \end{aligned}$$

і тому $u_1 = u_2$.

Таким чином доведено, що $\exists 1$ розв'язок $u \in H^1(\Omega)$ задачі (9.4) і безпосередньо перевіряється, що такий розв'язок задовольняє нерівності

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - \tilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + C \|\tilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega)} \quad (9.6)$$

для деякої постійної $C > 0$.

Інфімум по всіх $\tilde{\varphi} \in H^1(\Omega) : \varphi = \tilde{\varphi}|_{\partial\Omega}$ можна вибрати в якості норми функції $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega) :$

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{\tilde{\varphi} \in H^1(\Omega) : \varphi = \tilde{\varphi}|_{\partial\Omega}} \|\tilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Відомо, що нормований простір $(H^{1/2}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)})$ є банаховим, а спряжений простір до $H^{1/2}(\partial\Omega)$ позначається через $H^{-1/2}(\partial\Omega) = H^{1/2}(\partial\Omega)^*$.

Із визначень та (9.6) випливає, що розв'язок $u \in H^1(\Omega)$ задачі (9.4) задовольняє нерівності

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C (\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)})$$

для деякої постійної $C > 0$. Таку нерівність називають *априорною оцінкою* для розв'язків неоднорідної задачі Діріхле для рівняння Пуассона.

Аналогічно, можна розглянути неоднорідну задачу Неймана: знайти $u \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^{-1/2}(\partial\Omega). \end{aligned}$$

10. Основні задачі

Задача Дірихле для рівняння Пуассона: знайти $u = u(x)$:

$$-\Delta u = f \quad \text{в } \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega,$$

де $f(x)$ задана функція на Ω та $\varphi(x)$ задана функція на $\partial\Omega$.

Задача Дірихле для загального дивергентного рівняння: знайти $u = u(x)$:

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + B(x) \cdot \nabla u + \operatorname{div}(b(x)u) + c(x)u = f \quad \text{в } \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega,$$

де $A(x) = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ задана матриця-функція на Ω , $B(x), b(x)$ – вектор-функції на Ω , $c(x)$ – функція на Ω , $f(x)$ – функція на Ω та $\varphi(x)$ – функція на $\partial\Omega$.

У координатному запису це рівняння має вигляд

$$-\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + \sum_{i=1}^n B_i(x)\partial_i u + \sum_{i=1}^n \partial_i(b_i(x)u) + c(x)u = f \quad \text{в } \Omega,$$

де $B(x) = (B_1(x), \dots, B_n(x))$, $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$ та $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Початково-краєва задача (Коші-Дірихле) для рівняння теплопровідності:

знайти $u = u(x, t)$:

$$u'_t - \Delta u = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega,$$

де $f(x, t)$ задана функція на $\Omega \times (0, T)$, $\varphi(x, t)$ – функція на $\partial\Omega \times (0, T)$ і $u_0(x)$ – функція на Ω . Якщо в цієї задачі замінити оператора Лапласа на загального дивергентного оператора, тоді отримаємо початково-краєву задачу для рівняння Колмогорова-Фоккера-Планка.

Початково-краєва задача для рівняння Шредінгера: знайти $u = u(x, t)$:

$$i u'_t - \Delta u + c(x)u = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega,$$

де $f(x, t)$ задана функція на $\Omega \times (0, T)$, $\varphi(x, t)$ задана функція на $\partial\Omega \times (0, T)$ та $u_0(x)$ – функція на Ω .

Початково-краєва задача для N -електронних рівняння Шредінгера: знайти $u = (u_1(x^1, \dots, x^N, t), \dots, u_N(x^1, \dots, x^N, t))$:

$$i(u_1)_t' - \Delta_1 u_1 + c^{11}(x^1, \dots, x^N)u_1 + \dots + c^{1N}(x^1, \dots, x^N)u_N = f_1 \quad \text{в } \Omega^N \times (0, T),$$

...

$$i(u_N)_t' - \Delta_N u_N + c^{N1}(x^1, \dots, x^N)u_1 + \dots + c^{NN}(x^1, \dots, x^N)u_N = f_N \quad \text{в } \Omega^N \times (0, T),$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega^N \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega^N,$$

де $f = (f_1(x^1, \dots, x^N, t), \dots, f_N(x^1, \dots, x^N, t))$ – вектор-функція на $\Omega^N \times (0, T)$ і $u_0(x^1, \dots, x^N) = (u_1^0(x^1, \dots, x^N), \dots, u_N^0(x^1, \dots, x^N))$ – вектор-функція на Ω^N .

Початково-краєва задача для хвильового рівняння: знайти $u = u(x, t)$:

$$u''_{tt} - \Delta u = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega, \quad u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в } \Omega,$$

де $f(x, t)$ – функція на $\Omega \times (0, T)$, $\varphi(x, t)$ – функція на $\partial\Omega \times (0, T)$ і $u_0(x), u_1(x)$ – функції на Ω .

Задача Дірихле для (системи) рівнянь Ламе (лінійної теорії пружності): знайти $u = (u_1(x), \dots, u_n(x))$:

$$-\mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} u) = f \quad \text{в } \Omega,$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega,$$

де $f(x)$ задана вектор-функція на Ω і $\varphi(x)$ – вектор-функція на $\partial\Omega$.

Початково-краєва задача для еволюційних рівнянь Ламе (теорії пружності): знайти $u = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$:

$$u''_{tt} - \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} u) = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega, \quad u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в } \Omega,$$

де $f(x, t)$ задана вектор-функція на $\Omega \times (0, T)$, $\varphi(x, t)$ – вектор-функція на $\partial\Omega \times (0, T)$ і $u_0(x), u_1(x)$ – вектор-функції на Ω . Ця задача для неоднорідних матеріалів має наступний вигляд:

$$u''_{tt} - \operatorname{div}(\mu(x)\nabla u) + \nabla((\mu(x) + \lambda(x))\operatorname{div} u) = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega, \quad u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в } \Omega,$$

де $\mu(x), \lambda(x)$ задані функції на Ω .

Початково-краєва задача для еволюційних *рівнянь Максвелла*: знайти

$$E = (E_1(x, t), \dots, E_n(x, t)), B = (B_1(x, t), \dots, B_n(x, t)):$$

$$E'_t - \operatorname{rot} B = F \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$B'_t + \operatorname{rot} E = G \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{div} B = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$[B, \nu] = \varphi_b, \quad (E, \nu) = \varphi_e \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T),$$

$$E|_{t=0} = E_0 \quad \text{в } \Omega, \quad B|_{t=0} = B_0 \quad \text{в } \Omega,$$

де $F(x, t), G(x, t)$ задані вектор-функції на $\Omega \times (0, T)$, $\varphi_b(x, t)$ – вектор-функція на $\partial\Omega \times (0, T)$, $\varphi_e(x, t)$ – функція на $\partial\Omega \times (0, T)$, $E_0(x), B_0(x)$ – вектор-функції на Ω , $[\cdot, \nu]$ і (\cdot, ν) позначають векторний і скалярний добуток вектор-функції на зовнішню нормаль ν до межі $\partial\Omega$. Крім того, наприклад, для $n = 3$ оператор ротора визначається рівністю

$$\operatorname{rot} E = (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2, \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3, \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1).$$

Початково-краєва задача для еволюційних *рівнянь Нав'є-Стокса* (в'язкої нес-тискуваної рідини): знайти $(u, p) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t), p(x, t))$:

$$u'_t - \mu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega,$$

де $f(x, t)$ задана вектор-функція на $\Omega \times (0, T)$, $u_0(x)$ – вектор-функція на Ω та параметр μ називається *коефіцієнтом в'язкості*. Наприклад, для $n = 3$ у координатному записі рівняння Нав'є-Стокса мають вигляд

$$(u_1)'_t - \mu \Delta u_1 + u_1 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 u_1 + u_3 \partial_3 u_1 + \partial_1 p = f_1 \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$(u_2)'_t - \mu \Delta u_2 + u_1 \partial_1 u_2 + u_2 \partial_2 u_2 + u_3 \partial_3 u_2 + \partial_2 p = f_2 \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$(u_3)'_t - \mu \Delta u_3 + u_1 \partial_1 u_3 + u_2 \partial_2 u_3 + u_3 \partial_3 u_3 + \partial_3 p = f_3 \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T).$$

Коли коефіцієнт в'язкості є рівним нулю (або є "дуже маленьким"), тоді розглядається початково-краєва задача для *рівнянь Ейлера* (ідеальної нестискуваної рідини): знайти $(u, p) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t), p(x, t))$:

$$u'_t + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$(u, \nu) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega,$$

де $f(x, t)$ задана вектор-функція на $\Omega \times (0, T)$ і $u_0(x)$ – вектор-функція на Ω .

Рівняння гідродинаміки (газодинаміки - нев'язкої нестискуваної рідини) :
знайти $(\rho, u, E) = (\rho(x, t), u_1(x, t), \dots, u_n(x, t), E(x, t))$:

$$\rho'_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0,$$

$$(\rho u)'_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = f,$$

$$(\rho E)'_t + \operatorname{div}(\rho E u) + \operatorname{div}(p u) = 0,$$

де $p = p(\rho, E)$ визначає *рівняння стану* та $u \otimes u = \{u_i u_j\}_{i,j=1}^n$.

11. Початково-краєві задачі для еволюційних рівнянь

Розглянемо для $n = 1$ та $\Omega = \mathbf{R}$ початково-краєву задачу для хвильового рівняння: знайти $u = u(x, t)$:

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, \infty),$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

де $u_0(x), u_1(x)$ є заданими функціями на Ω , наприклад, із $H^2(\Omega), H^1(\Omega)$ та стала a визначає "швидкість" розповсюдження хвиль.

Розв'язок цієї задачі представляється наступною формулою Даламбера

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\tau) d\tau.$$

Цю формулу можна переписати у вигляді

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{U(x + at) - U(x - at)}{2a},$$

де $U'_x = u_1(x)$. Зокрема при $u_1 = 0$ ці формули моделюють розповсюдження двох хвиль: $(1/2)u_0(x + at)$ і $(1/2)u_0(x - at)$, що мають швидкості a і $-a$.

Нехай фіксовані банахів рефлексивний простір B та число $T > 0$. Розглянемо множину неперервних відображень

$$v : [0, T] \rightarrow B.$$

Ця множина позначається через $C^0([0, T]; B)$ і є банаховим простором із нормою

$$\|v\|_{C^0([0, T]; B)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|_B.$$

Для $v \in C^0([0, T]; B)$ можна задати також норми

$$\|v\|_{L^p((0, T); B)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_B^p dt \right)^{1/p} \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|v\|_{L^\infty((0, T); B)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|v\|_{L^p((0, T); B)}.$$

Визначимо банахів простір $L^p((0, T); B)$ при $1 \leq p < \infty$ як поповнення $C^0([0, T]; B)$ по відповідній нормі та позначимо

$$L^\infty((0, T); B) = \{v \in L^1((0, T); B) : \|v\|_{L^\infty((0, T); B)} < \infty\}.$$

Аналогічно, можна визначити банахів простір $W^{1,p}((0, T); B)$ при $1 \leq p < \infty$ як поповнення $C^1([0, T]; B)$ по відповідній нормі та встановити, що

$$W^{1,p}((0, T); B) = \{v \in L^p((0, T); B) : v'_t \in L^p((0, T); B)\} \quad \text{при} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Для області Ω із \mathbf{R}^n розглянемо початково-краєву задачу для рівняння теплопровідності: знайти $u = u(x, t)$:

$$u'_t - \Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T), \quad (11.1)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Припустимо, що розв'язок цієї задачі існує та є достатньо регулярним, наприклад, $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$. Помножимо перше рівняння в (11.1) на $v \in C_0^\infty(\Omega)$, проінтегруємо результат по Ω та частинами. Тоді отримаємо рівність

$$\int_{\Omega} u'_t v \, dx + \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

яка називається *інтегральною тотожністю* для задачі (11.1).

Фіксуємо $f \in L^2((0, T); H^{-1}(\Omega))$ і $u_0 \in L^2(\Omega)$ та перепишемо інтегральну тотожність у такої узагальненої формі

$$\langle u'_t, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} + \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) \, dx = \langle f, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)}, \quad (11.2)$$

яка співпадає із початковою тотожністю, якщо u'_t та f є регулярними.

В11.1. Слабким (узагальненим) розв'язком задачі (11.1) називається елемент

$$u \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty((0, T); L^2(\Omega))$$

такий, що $u'_t \in L^2((0, T); H^{-1}(\Omega))$, $u|_{t=0} = u_0$ в $L^2(\Omega)$ і виконана інтегральна тотожність (11.2) для будь-якої функції $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та майже всіх $t \in (0, T)$.

Припустимо, що слабкий розв'язок цієї задачі існує. Тоді, використовуючи узагальнену формулу інтегрування частинами, тотожність (11.2) для $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та майже всіх $t \in (0, T)$ можна переписати у наступній формі

$$\langle u'_t, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} - \langle \Delta u, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} = \langle f, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)}, \quad (11.2')$$

яка еквівалентна рівності

$$u'_t - \Delta u = f \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega) \quad (11.1')$$

для майже всіх $t \in (0, T)$. Крім того, за визначенням $u|_{t=0} = u_0$ в $L^2(\Omega)$ та

$$u = 0 \quad \text{в} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega) \quad (11.1')$$

для майже всіх $t \in (0, T)$, оскільки $u \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$.

Таким чином, задача (11.1') є деяким розширенням задачі (11.1). За визначенням, ці задачі співпадають, якщо розв'язки є достатньо регулярними.

Теорема 11.2 (Соболева про вкладення на відрізку). *Нехай H є гільбертовим простором, $u \in W^{1,2}((0, T); H)$. Тоді $u \in C^0([0, T]; H)$.* $\triangleleft \triangleright$

Теорема 11.3 (Ліонса про вкладення на відрізку). *Нехай $u \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$ і $u'_t \in L^2((0, T); H^{-1}(\Omega))$. Тоді $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, для $v \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega))$*

$$\int_0^T \langle u'_t, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} dt + \int_0^T \int_\Omega u v'_t dx dt = \int_\Omega u(T)v(T) dx - \int_\Omega u(0)v(0) dx,$$

$$\left(\int_\Omega u^2 dx \right)'_t = 2 \langle u'_t, u \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (0, T). \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 11.4 (про існування слабого розв'язку початково-краєвої задачі для рівняння теплопровідності). *Нехай $f \in L^2((0, T); H^{-1}(\Omega))$ та $u_0 \in L^2(\Omega)$. Тоді існує єдиний слабкий розв'язок $u \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$ задачі (11.1),*

$$u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$$

та для майже всіх $t \in (0, T)$ виконана енергетична рівність

$$\int_\Omega \frac{u^2}{2} dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u|^2 dx d\tau = \int_0^t \langle f, u \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} d\tau + \int_\Omega \frac{u_0^2}{2} dx.$$

◁ Простір $H_0^1(\Omega)$ є сепарабельним. Тому знайдуться лінійно незалежні елементи $\{w_i\}_{i=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ такі, що множина

$$\widetilde{H} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \forall \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad \forall m \in \mathbf{N} \right\}$$

є щільною в $H_0^1(\Omega)$. Множина \widetilde{H} є щільною також в $L^2(\Omega)$, оскільки за визначенням $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ щільно $L^2(\Omega)$. За теоремою Шмідта можна вважати, що система $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ є ортонормованою в $L^2(\Omega)$ і ортогональною в $H_0^1(\Omega)$.

Фіксуємо ціле $m > 0$ та визначимо скінченновимірний простір

$$H_m = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

Розглянемо наступну задачу: знайти $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) w_i$ таке, що

$$\langle u'_m, w_j \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} + \int_{\Omega} (\nabla u_m, \nabla w_j) dx = \langle f(t), w_j \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)}, \quad t \in (0, T), \quad j = 1, \dots, m,$$

$$u_m|_{t=0} = \text{Pr}_{H_m}(u_0), \tag{11.3}$$

де Pr_{H_m} позначає проєкцію із $L^2(\Omega)$ в H_m , для якої $\text{Pr}_{H_m}(u_0) \rightarrow u_0$ в $L^2(\Omega)$ при $m \rightarrow \infty$ за визначенням щільності. Дійсно, $u_0 = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i^0 w_i$ є рядом Фур'є по системі $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ для $u_0 \in L^2(\Omega)$ і тому $\text{Pr}_{H_m}(u_0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^0 w_i$.

Задача (11.3) є задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь щодо функцій $\alpha_{1m}(t), \dots, \alpha_{mm}(t)$:

$$\alpha'_{jm}(t) + \left(\int_{\Omega} (\nabla w_j, \nabla w_j) dx \right) \alpha_{jm}(t) = \langle f(t), w_j \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)}, \quad t \in (0, T), \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\alpha_{jm}(0) = \alpha_j^0, \quad j = 1, \dots, m, \tag{11.3'}$$

де враховано, що $u_0 = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i^0 w_i$. Перевіряється, що задача (11.3') має єдиний розв'язок із $W^{1,2}(0, T)$, оскільки $\langle f(t), w_j \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)}$ при $j = 1, \dots, m$ є квадратично інтегрованою, що випливає із нерівностей

$$|\langle f(t), w_j \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)}| \leq \|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)} = C_j \|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

для майже всіх $t \in (0, T)$ і сталої C_j та

$$\int_0^T |\langle f(t), w_j \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)}|^2 dt \leq C_j^2 \int_0^T \|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt < \infty.$$

Помножимо рівняння задачі (11.3') на $\alpha_{jm}(t)$ та підсумуємо по $j = 1, \dots, m$.

Тоді отримаємо

$$\langle u'_m(t), u_m(t) \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} + \int_{\Omega} (\nabla u_m(t), \nabla u_m(t)) dx = \langle f(t), u_m(t) \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)}.$$

Із цієї рівності та теореми Ліонса випливає, що

$$\begin{aligned} (\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2)'_t + 2 \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)^n}^2 &= 2 \langle f(t), u_m(t) \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} \leq \\ &\leq 2 \|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Інтегруючи цю нерівність по $t \in (0, s)$, маємо

$$\|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^s \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)^n}^2 dt \leq \|\text{Pr}_{H_m}(u_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^s \|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt.$$

Таким чином, для деякої постійної $M > 0$ виконані нерівності

$$\|u_m\|_{L^\infty((0, T); L^2(\Omega))} + \|\nabla u_m\|_{L^2((0, T); L^2(\Omega)^n)} \leq M$$

та існують $u \in L^\infty((0, T); L^2(\Omega)) \cap L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$ і підпоследовність

$$u_{\tilde{m}} \in L^\infty((0, T); L^2(\Omega)) \cap L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$$

такі, що

$$u_{\tilde{m}} \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L^2((0, T); H_0^1(\Omega)), \quad (11.4)$$

$$u_{\tilde{m}} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{в} \quad L^\infty((0, T); L^2(\Omega)), \quad (11.5)$$

де за визначенням $u_{\tilde{m}} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ в $L^\infty((0, T); L^2(\Omega))$, якщо $u_{\tilde{m}}, u \in L^\infty((0, T); L^2(\Omega))$ і

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_m(t, x) \psi(t, x) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} u(t, x) \psi(t, x) dx dt \quad \text{для} \quad \psi \in L^1((0, T); L^2(\Omega)).$$

Фіксуємо таке $v \in H_0^1(\Omega)$, що $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$. Тоді $v = v_1 + v_2$, де $v_1 \in H_m$ та $\|v_1\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$ за визначенням. Таким чином, із (11.3) випливає, що

$$\langle u'_m, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} = \langle u'_m, v_1 \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} = \langle f, v_1 \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} - \int_{\Omega} (\nabla u_m, \nabla v_1) dx$$

і тому

$$\|(u_m)'_t\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} |\langle u'_m, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)}| \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Із цієї рівності отримуємо, що $(u_m)'_t \in L^2((0, T); H^{-1}(\Omega))$. Дійсно,

$$\|(u_m)'_t\|_{L^2((0, T); H^{-1}(\Omega))}^2 \leq 2 \int_0^T \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt + 2 \int_0^T \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq 4M.$$

Таким чином, додатково до (11.4) і (11.5) можна вважати, що

$$(u_{\tilde{m}})'_t \rightharpoonup u'_t \quad \text{в} \quad L^2((0, T); H^{-1}(\Omega)).$$

Зокрема, $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ за теоремою Ліюнга.

Помножимо рівняння (11.3) на функцію $\varphi \in C^1[0, T]$ таку, що $\varphi(T) = 0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0, T]$ та частинами. Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u_m(t) \varphi'(t) w_j dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla u_m(t), \varphi(t) \nabla w_j) dx dt &= \quad (11.6) \\ &= \int_{\Omega} u_m(0) \varphi(0) w_j dx + \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Співвідношень (11.4) і (11.5) достатньо, щоб перейти до границі в (11.6) та отримати, що

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u(t) \varphi'(t) v dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla u(t), \varphi(t) \nabla v) dx dt &= \quad (11.7) \\ &= \int_{\Omega} u_0 \varphi(0) v dx + \int_0^T \langle f(t), v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

для будь-якого $v \in \tilde{H}$ і тому для будь-якого $v \in H_0^1(\Omega)$.

Із (11.7) при $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$ випливає інтегральна тотожність (11.2).

Помножимо тотожність (11.2) на функцію $\varphi \in C^1[0, T]$ таку, що $\varphi(T) = 0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0, T]$ та частинами. Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u(t) \varphi'(t) v \, dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla u(t), \varphi(t) \nabla v) \, dx dt &= \\ &= \int_{\Omega} u|_{t=0} \varphi(0) v \, dx + \int_0^T \langle f(t), v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} \varphi(t) \, dt \end{aligned} \quad (11.8)$$

для будь-якого $v \in H_0^1(\Omega)$. Порівнюючи (11.7) і (11.8) при $\varphi(0) = 1$, отримуємо

$$\int_{\Omega} u|_{t=0} v \, dx = \int_{\Omega} u_0 v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Отже, виконана рівність $u|_{t=0} = u_0$ в $L^2(\Omega)$.

Із (11.2) при $v = u_{\tilde{m}}(t) \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega))$ маємо

$$\int_0^t \langle u'_t, u_{\tilde{m}} \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} \, d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla u_{\tilde{m}}) \, dx \, d\tau = \int_0^t \langle f, u_{\tilde{m}} \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} \, d\tau$$

для майже всіх $t \in (0, T)$. Обчислюючи границю, із теореми Ліонса маємо рівність

$$\int_0^t \left(\int_{\Omega} \frac{u^2}{2} \, dx \right)'_{\tau} \, d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \, d\tau = \int_0^t \langle f, u \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} \, d\tau,$$

яка еквівалентна енергетичній рівності та із якої одразу випливає єдиність слабого розв'язку задачі (11.2). \triangleright

Для області Ω із \mathbf{R}^n розглянемо початково-краєву задачу для хвильового рівняння: знайти $u = u(x, t)$:

$$u''_{tt} - \Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T), \quad (11.9)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u'_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Припустимо, що розв'язок цієї задачі існує та є достатньо регулярним. Помножимо перше рівняння в (11.9) на $v \in C_0^\infty(\Omega)$, проінтегруємо результат по Ω та частинами. Тоді отримаємо відповідну інтегральну тотожність для задачі (11.9).

Фіксуємо $f \in L^2((0, T); L^2(\Omega))$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ і $u_1 \in L^2(\Omega)$ та перепишемо отриману інтегральну тотожність у такої узагальненої формі

$$\langle u''_{tt}, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} + \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx = \langle f, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)}. \quad (11.10)$$

В11.5. Слабким (узагальненим) розв'язком задачі (11.9) називається елемент

$$u \in L^\infty((0, T); H_0^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}((0, T); L^2(\Omega))$$

такий, що $u''_{tt} \in L^2((0, T); H^{-1}(\Omega))$, $u|_{t=0} = u_0$ в $H_0^1(\Omega)$, $u'_t|_{t=0} = u_1$ в $L^2(\Omega)$ і виконана інтегральна тотожність (11.10) для $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та майже всіх $t \in (0, T)$.

Використовуючи узагальнену формулу інтегрування частинами, тотожність (11.10) для $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та майже всіх $t \in (0, T)$ можна переписати у наступній формі

$$\langle u''_{tt}, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} - \langle \Delta u, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} = \langle f, v \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)}, \quad (11.10')$$

яка еквівалентна рівності

$$u''_{tt} - \Delta u = f \quad \text{в} \quad H^{-1}(\Omega) \quad (11.9')$$

Крім того, за визначенням $u|_{t=0} = u_0$ в $H_0^1(\Omega)$, $u'_t|_{t=0} = u_1$ в $L^2(\Omega)$ та

$$u = 0 \quad \text{в} \quad \partial\Omega \quad \text{в} \quad H^1(\Omega) \quad (11.9')$$

для майже всіх $t \in (0, T)$, оскільки $u \in L^\infty((0, T); H_0^1(\Omega))$.

Теорема 11.6 (про існування слабкого розв'язку початково-краєвої задачі для хвильового рівняння). *Нехай $f \in L^2((0, T); L^2(\Omega))$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ і $u_1 \in L^2(\Omega)$. Тоді існує єдиний слабкий розв'язок $u \in L^\infty((0, T); H_0^1(\Omega))$ задачі (11.9),*

$$u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \quad u'_t \in C^0([0, T]; H^{-1}(\Omega)),$$

та для майже всіх $t \in (0, T)$ виконана енергетична рівність

$$\int_{\Omega} (u'_t)^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 2 \int_0^t \int_{\Omega} f u'_t dx d\tau + \int_{\Omega} u_1^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx.$$

◁ Доведення цієї теореми повторює доведення теореми 11.4. ▷

12. Початково-краєва задача для рівнянь Нав'є-Стокса

Для області Ω із \mathbf{R}^n визначимо лінійний простір

$$D(\Omega) = \{v \in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0\}$$

та позначимо через $V(\Omega)$ і $H(\Omega)$ поповнення цього простору по нормах $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^n}$ і $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)^n}$, відповідно. Відомо і безпосередньо перевіряється, що

$$V(\Omega) = \{v \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0\}, \quad H(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0\}.$$

Розглянемо для $n = 2, 3, 4$ початково-краєву задачу для рівнянь Нав'є-Стокса: знайти $(u, p) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t), p(x, t))$:

$$u'_t - \mu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (12.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega.$$

Помножимо скалярно рівняння (12.1) на вектор-функцію $v \in D(\Omega)$, проінтегруємо отриману рівність по Ω та частинами. Тоді

$$\int_{\Omega} (u'_t, v) dx + \mu \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla u, v) dx = \int_{\Omega} (f, v) dx. \quad (12.2)$$

Слабким розв'язком рівнянь Нав'є-Стокса називається елемент

$$u \in L^2((0, T); V(\Omega))$$

такий, що $u'_t \in L^1((0, T); V(\Omega)^*)$, $u|_{t=0} = u_0$ в $H(\Omega)$ і виконана інтегральна тотожність (12.2) для будь-якої вектор-функції $v \in D(\Omega)$ і майже всіх $t \in (0, T)$.

Теорема 12.1 (Соболева про вкладення $L^q(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$). *Нехай $u \in H_0^1(\Omega)$. Тоді існують постійні $C_1 = C_1(q, \Omega)$ і $C_2 = C_2(\Omega)$ такі, що*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{при } n = 2 \quad \text{і} \quad 1 \leq q < \infty;$$

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{при } n = 3;$$

$$\|u\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{при } n \geq 3. \quad \triangleleft \triangleright$$

Із формули Стокса і нерівності Гельдера випливає, що

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (u \cdot \nabla u, v) dx \right| &= \left| \int_{\Omega} (u \cdot \nabla v, u) dx \right| \leq \int_{\Omega} |(u \cdot \nabla v, u)| dx \leq \\ &\leq \|u\|_{L^4(\Omega)^n}^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}} \leq C_2 \|u\|_{V(\Omega)}^2 \|v\|_{V(\Omega)}, \end{aligned}$$

і

$$\|u \cdot \nabla u\|_{V(\Omega)^*} = \sup_{\|v\|_{V(\Omega)}=1} \left| \int_{\Omega} (u \cdot \nabla u, v) dx \right| \leq C_2 \|u\|_{V(\Omega)}^2$$

Тому всі інтеграли в (12.2) є визначеними.

Теорема 12.2 (про існування слабкого розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса). *Нехай $f \in L^2((0, T); L^2(\Omega)^n)$ і $u_0 \in H(\Omega)$. Тоді слабкий розв'язок $u \in L^2((0, T); V(\Omega))$ рівнянь Нав'є-Стокса існує,*

$$u \in L^\infty((0, T); H(\Omega))$$

та для майже всіх $t \in (0, T)$ виконана енергетична нерівність

$$\int_{\Omega} \frac{|u|^2}{2} dx + \mu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx d\tau \leq \int_{\Omega} \frac{|u_0|^2}{2} dx + \int_0^t \int_{\Omega} (f, u) dx d\tau.$$

◁ Простір $V(\Omega)$ є сепарабельним. Тому знайдуться такі лінійно незалежні $\{w_i\}_{i=1}^\infty \subset V(\Omega)$, що множина

$$\widetilde{V} = \left\{ v \in V(\Omega) : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \forall \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad \forall m \in \mathbf{N} \right\}$$

є щільною в $V(\Omega)$. Фіксуємо ціле $m > 0$ і визначимо скінченновимірний простір

$$V_m = \left\{ v \in V(\Omega) : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

Розглянемо наступну задачу: знайти таке $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) w_i$, що

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u'_m, w_j) dx + \mu \int_{\Omega} (\nabla u_m, \nabla w_j) dx + \int_{\Omega} (u_m \cdot \nabla u_m, w_j) dx &= \int_{\Omega} (f(t), w_j) dx, \\ t \in (0, T), \quad j = 1, \dots, m, \quad u_m|_{t=0} &= \text{Pr}_{V_m}(u_0). \end{aligned} \tag{12.3}$$

Задача (12.3) є задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь щодо функцій $\alpha_{1m}(t), \dots, \alpha_{mm}(t)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega} (w_i, w_j) dx \right) \alpha'_{im}(t) + \mu \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega} (\nabla w_i, \nabla w_j) dx \right) \alpha_{im}(t) + \\ & + \sum_{i,l=1}^m \left(\int_{\Omega} (w_i \cdot \nabla w_l, w_j) dx \right) \alpha_{im}(t) \alpha_{lm}(t) = \int_{\Omega} (f(t), w_j) dx \quad t \in (0, T), \quad j = 1, \dots, m, \\ & u_m|_{t=0} = \text{Pr}_{V_m}(u_0). \end{aligned}$$

Така задача має єдиний розв'язок при $t \in (0, T^*)$ для деякого T^* . Помножимо рівняння цієї задачі на $\alpha_{jm}(t)$ і підсумуємо по $j = 1, \dots, m$, тоді отримуємо

$$\int_{\Omega} (u'_m(t), u_m(t)) dx + \mu \int_{\Omega} (\nabla u_m(t), \nabla u_m(t)) dx = \int_{\Omega} (f(t), u_m(t)) dx. \quad (12.4)$$

Із цієї рівності випливає, що

$$\begin{aligned} & (\|u_m(t)\|_{H(\Omega)}^2)'_t + 2\mu \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 = 2 \int_{\Omega} (f(t), u_m(t)) dx \leq \\ & \leq 2 \|f(t)\|_{L^2(\Omega)^n} \|u_m(t)\|_{H(\Omega)} \leq \mu \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 + C \|f(t)\|_{L^2(\Omega)^n}^2. \end{aligned}$$

Інтегруючи цю нерівність по $t \in (0, s)$, маємо

$$\|u_m(s)\|_{H(\Omega)}^2 + \mu \int_0^s \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 dt \leq \|\text{Pr}_{V_m}(u_0)\|_{H(\Omega)}^2 + C \int_0^s \|f(t)\|_{L^2(\Omega)^n}^2 dt,$$

тобто для деякої постійної $M > 0$ виконана нерівність

$$\|u_m\|_{L^\infty((0,T);H(\Omega))} + \|\nabla u_m\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega)^{n \times n})} \leq M.$$

Таким чином, можна вважати, що $T^* = T$ (у відповідності із § 1) та існують $u \in L^\infty((0, T); H(\Omega)) \cap L^2((0, T); V(\Omega))$ і підпоследовність $u_{\tilde{m}} \in L^2((0, T); V(\Omega))$ такі, що

$$u_{\tilde{m}} \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L^2((0, T); V(\Omega)) \quad \text{і} \quad u_{\tilde{m}} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{в} \quad L^\infty((0, T); H(\Omega)). \quad (12.5)$$

Із додаткових оцінок можна також отримати, що

$$u_{\tilde{m}} \rightarrow u \quad \text{в} \quad L^2((0, T); H(\Omega)). \quad (12.6)$$

Помножимо рівняння (12.3) на функцію $\varphi \in C^1[0, T]$ таку, що $\varphi(T) = 0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0, T]$ та частинами. Тоді

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u_m(t), \varphi'(t)w_j) dxdt + \mu \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla u_m(t), \varphi(t)\nabla w_j) dxdt + \quad (12.7)$$

$$+ \int_0^T \int_{\Omega} (u_m(t) \cdot \nabla u_m(t), \varphi(t)w_j) dxdt = \int_{\Omega} (u_m(0), \varphi(0)w_j) dx + \int_0^T \int_{\Omega} (f(t), \varphi(t)w_j) dxdt,$$

Співвідношень (12.5) і (12.6) достатньо, щоб перейти до границі в (12.7) та отримати, що

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u(t), \varphi'(t)v) dxdt + \mu \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla u(t), \varphi(t)\nabla v) dxdt + \quad (12.8)$$

$$+ \int_0^T \int_{\Omega} (u(t) \cdot \nabla u(t), \varphi(t)v) dxdt = \int_{\Omega} (u_0, \varphi(0)v) dx + \int_0^T \int_{\Omega} (f(t), \varphi(t)v) dxdt,$$

для будь-якого $v \in \widetilde{V}$ і тому для будь-якого $v \in V(\Omega)$.

Із (12.8) при $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$ маємо, що виконана інтегральна тотожність (12.2).

Із тотожності (12.2) отримуємо також, що

$$\int_{\Omega} (u'_t, v) dx = \int_{\Omega} (f, v) dx - \mu \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx - \int_{\Omega} (u \cdot \nabla u, v) dx.$$

Із цієї рівності маємо $u'_t \in L^1((0, T); V(\Omega)^*)$. Дійсно, наприклад, із формули Стокса та нерівності Гельдера випливає, що

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (u \cdot \nabla u, v) dx \right| &= \left| \int_{\Omega} (u \cdot \nabla v, u) dx \right| \leq \int_{\Omega} |(u \cdot \nabla v, u)| dx \leq \\ &\leq \|u\|_{L^4(\Omega)^n}^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}} \leq C_2 \|u\|_{V(\Omega)}^2 \|v\|_{V(\Omega)}. \end{aligned}$$

Тому

$$\|u \cdot \nabla u\|_{V(\Omega)^*} = \sup_{\|v\|_{V(\Omega)}=1} \left| \int_{\Omega} (u \cdot \nabla u, v) dx \right| \leq C_2 \|u\|_{V(\Omega)}^2$$

і інтегруючи цю нерівність, маємо

$$\|u \cdot \nabla u\|_{L^1((0, T); V(\Omega)^*)} = \int_0^T \|u \cdot \nabla u\|_{V(\Omega)^*} dt \leq C_2 \int_0^T \|u\|_{V(\Omega)}^2 dt < \infty.$$

Крім того, відомо, що із $u \in L^\infty((0, T); H(\Omega))$ і $u'_t \in L^1((0, T); V(\Omega)^*)$ випливає, що u слабо неперервна як функція із $[0, T]$ в H (тобто для кожного $v \in H$ функція $t \mapsto \int_\Omega (u(t), v) dx$ є неперервною)

Помножимо тотожність (12.2) на функцію $\varphi \in C^1[0, T]$ таку, що $\varphi(T) = 0$, проінтегруємо отриману рівність по $[0, T]$ та частинами. Тоді

$$\int_0^T \int_\Omega (u(t), \varphi'(t)v) dx dt + \mu \int_0^T \int_\Omega (\nabla u(t), \varphi(t)\nabla v) dx dt + \quad (12.9)$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega (u(t) \cdot \nabla u(t), \varphi(t)v) dx dt = \int_\Omega (u|_{t=0}, \varphi(0)v) dx + \int_0^T \int_\Omega (f(t), \varphi(t)v) dx dt$$

для будь-якого $v \in V(\Omega)$. Порівнюючи (12.8) і (12.9) при $\varphi(0) = 1$, отримуємо

$$\int_\Omega (u|_{t=0}, v) dx = \int_\Omega (u_0, v) dx \quad \forall v \in V(\Omega).$$

Таким чином, виконана рівність $u|_{t=0} = u_0$ в $H(\Omega)$.

Інтегруючи (12.4), знаходимо, що

$$\|u_m(t)\|_{H(\Omega)}^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 ds = \|\text{Pr}_{V_m}(u_0)\|_{H(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \int_\Omega (f(s), u_m(s)) dx ds.$$

Помножимо це рівняння на функцію $\varphi \in C_0^\infty((0, T))$ таку, що $\varphi \geq 0$ і проінтегруємо отриману рівність по $(0, T)$. Тоді

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\|u_m(t)\|_{H(\Omega)}^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 ds \right) \varphi(t) dt = \\ & = \int_0^T \left(\|\text{Pr}_{V_m}(u_0)\|_{H(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \int_\Omega (f(s), u_m(s)) dx ds \right) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Використовуючи (12.5), перейдемо до нижньої границі в цій рівності. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\|u(t)\|_{H(\Omega)}^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 ds \right) \varphi(t) dt \leq \\ & \leq \int_0^T \left(\|u_0\|_{H(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \int_\Omega (f(s), u(s)) dx ds \right) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Ця нерівність еквівалентна енергетичній нерівності. \triangleright

В останньому переході до границі було використано наступне твердження.

Теорема 12.3. *Нехай $(L, \|\cdot\|_L)$ є нормованим простором та $x_k \rightharpoonup x$. Тоді*

$$\|x\|_L \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_L. \quad \triangleleft \triangleright$$

Лема 12.4 (Соболева про вкладення $L^4(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ при $n = 2, 3$). *Нехай $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ є областю та $u \in H_0^1(\Omega)$. Тоді*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \quad \text{при} \quad n = 2;$$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{3/4} \quad \text{при} \quad n = 3. \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 12.5 (про регулярність слабкого розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса при $n = 2, 3$). *Нехай $u \in L^2((0, T); V(\Omega)) \cap L^\infty((0, T); H(\Omega))$ є слабким розв'язком рівнянь Нав'є-Стокса. Тоді*

$$u'_t \in L^2((0, T); V(\Omega)^*), \quad u \in L^4((0, T); L^4(\Omega)) \cap C^0([0, T]; H(\Omega)) \quad \text{при} \quad n = 2;$$

$$u'_t \in L^{4/3}((0, T); V(\Omega)^*), \quad u \in L^{8/3}((0, T); L^4(\Omega)) \quad \text{при} \quad n = 3. \quad \triangleleft \triangleright$$

Теорема 12.6 (про єдиність слабкого розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса при $n = 2, 3$). *Нехай $\{u\} \subset L^2((0, T); V(\Omega)) \cap L^\infty((0, T); H(\Omega))$ є слабкими розв'язками рівнянь Нав'є-Стокса. Тоді*

$$\text{слабкий розв'язок є єдиним} \quad \text{при} \quad n = 2;$$

якщо $\{u\} \subset L^8((0, T); L^4(\Omega))$, тоді слабкий розв'язок є єдиним при $n = 3$.

\triangleleft ($n = 2$) Припустимо, що u_1 і u_2 є розв'язками задачі (12.2). Тоді різниця $u = u_1 - u_2$ задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned} & (\|u(t)\|_{H(\Omega)}^2)'_t + 2\mu \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 = -2 \int_{\Omega} (u(t) \cdot \nabla u_2(t), u(t)) \, dx \leq \\ & \leq 2 \|u\|_{L^4(\Omega)^n}^2 \|\nabla u_2\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}} \leq 2^{3/2} \|u\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}} \|\nabla u_2\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}} \leq \\ & \leq 2\mu \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 + \frac{1}{\mu} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \|\nabla u_2(t)\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 \end{aligned}$$

через лему 12.2. Таким чином, маємо

$$\left(\|u(t)\|_{H(\Omega)}^2\right)' \leq \frac{1}{\mu} \|u(t)\|_{H(\Omega)}^2 \|\nabla u_2(t)\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2$$

або

$$\left(\exp\left(-\frac{1}{\mu} \int_0^t \|\nabla u_2(s)\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 ds\right) \cdot \|u(t)\|_{H(\Omega)}^2\right)' \leq 0,$$

тобто $\|u(t)\|_{H(\Omega)}^2 \leq 0$ при $t \in [0, T]$. ($n = 2$) \triangleright

\triangleleft ($n = 3$) Припустимо, що u_1 і u_2 є розв'язками задачі (12.2). Тоді різниця $u = u_1 - u_2$ задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned} \left(\|u(t)\|_{H(\Omega)}^2\right)' + 2\mu \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 &= 2 \int_{\Omega} (u(t) \cdot \nabla u(t), u_2(t)) dx \leq \\ &\leq 2\|u\|_{L^4(\Omega)^n} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}} \|u_2\|_{L^4(\Omega)^n} \leq 2^{3/2} \|u\|_{H(\Omega)}^{1/4} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^{7/4} \|u_2\|_{L^4(\Omega)^n} \leq \\ &\leq 2\mu \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 + C \|u(t)\|_{H(\Omega)}^2 \|u_2(t)\|_{L^4(\Omega)^n}^8 \end{aligned}$$

через лему 12.2 (і нерівність $ab \leq \frac{1}{p}(\varepsilon a)^p + \frac{1}{q}(\frac{b}{\varepsilon})^q$, виконану при $a, b, \varepsilon > 0$ і $p, q \geq 1$ таких, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Таким чином, маємо

$$\left(\exp\left(-\frac{1}{\mu} \int_0^t \|u_2(s)\|_{L^4(\Omega)^n}^8 ds\right) \cdot \|u(t)\|_{H(\Omega)}^2\right)' \leq 0,$$

оскільки функція $t \mapsto \|u_2(t)\|_{L^4(\Omega)^n}^8$ є інтегрованою. ($n = 3$) \triangleright

Теорема 12.7 (Фурсікова А.В. про щільну єдиність слабкого розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса при $n = 3$). *Нехай $n = 3$ і $u_0 \in V(\Omega)$. Тоді існує множина $F = \{f\} \subset L^2((0, T); H(\Omega))$, яка щільна в*

$$L^q((0, T); V(\Omega)^*) \quad \text{для фіксованого } q \text{ при } 1 \leq q < \frac{4}{3},$$

та слабкий розв'язок задачі Дірихле для рівнянь Нав'є-Стокса, відповідний u_0 і фіксованому $f \in F$, є єдиним. $\triangleleft \triangleright$

Рекомендована література

1. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1988. 512с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1989. 624 с.
3. Ладыженская О. А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* – М.: Наука, 1970. 288 с.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.* – М.: Наука, 1965. 520 с.
5. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики.* – М.:Наука, 1989. 384с.
6. Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса.* – М.: Мир, 1981. 408 с.
7. Шубин М.А. *Лекции об уравнениях математической физики.* – М.: МЦНМО, 2003. 303 с.

Додаткова література

1. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. *Численные методы и программное обеспечение.* – М.: Мир, 2002. 348 с.
2. Мазья В.Г. *Пространства С.Л. Соболева.* – Л.: Наука, 1985. 416 с.
3. Эванс Л.К., Гариепи Р.Ф. *Теория меры и тонкие свойства функций.* – Н.: Научная книга, 2002. 216 с.