Методика преподавания математитки и информатики
в высшей школе

Ю.В. Гончаренко

ОЧЕРКИ
ПО МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КИЕВ
"КИЙ"2019

22.16
Г 65
УДК 517.0

Гончаренко Ю.В. **Очерки по методике преподавания математики.** - Киев. Кий. 2019. - 34с.

Настоящая методическая разработка составлена для магистров высших учебных заведений, планирующих в будуйщем преподавать курс математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры. Надеемся, что эта публикация окажется полезной как студентам университетов специализирующимся в математике и информатике так и молодым преподавателяма этих дисциплин.

УТВЕРЖДЕНО
на заседании кафедры ОМ
факультета компьютерных наук
и кибернетики Киевского национального
университета им. Тараса Шевченко
от ,02.05.19, протокол N10.

Методическое пособие

ОЧЕРКИ
ПО МЕТОДИКЕ ПРЕПРДАВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Составители: Гончаренко Юрий Викторович
Рецензенты: Авраменко Людмила Григорьевна
Семенов Владимир Викторович

Чертежи и верстка выполнены при помощи пакета LaTeX 2_ε

Г $\frac{1805080000-04}{7161-00}$

ISBN 966–7161–48–4

Пдписано к печати 10.05.19. Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$. Типографская N1.
Печать офсетная. уч.-изд. л. 1.8 Тираж 10 экз.
"Копи Центр Київ-56, пр. Перемоги, 37, корпус 7. Заказ N
2019-112

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие составлено для студентов магистров, изучающих курс методики преподавания математики и информатики. этот нормативный курс необходим для получения права преподавания математики и информатики в высшей и средней школах.

Предлагаемый читателю сборник состоит из отдельных частей посвященных актуальным проблемам преподавания. На самом деле научить преподаватеь без практики преподаванеия это то же самое, что готовить дегустатора по этикеткам. К магистратуре студенты имеют огромный опыт пребывания "по другую сторону барикад"и превращают его впослеедствии в собственные педагогические приемы.

Преподавание математического анализа насчитывает уже 300 лет. За это время сложился стандартный набор педагогических приемов, задач и упражнений, позволяющий методы математического анализа сделать доступными даже школьникам старших классов. Однако с течением времени идеология преподавания математического анализа (да и другихт разделов математики) меняется также, как меняется сама математика. В первую очередь это связано с проникновением в математический анализ идей функционального анализа, которые позволяют с единых общих позиций рассматривать различные частные утверждения. Во второй части работы этому посвяжено несколько примеров. Хотя их количество может быть очень велико.

При работе над пособием автор использовал многолетний опыт преподавания высшей математики в КПИ и математического анализа в КНУ.

Автор выражает глубокую признательность коллективу кафедры вычислительной математики, многолетняя плодотворная работа которой в значительной степени стимулировала данную работу.

30.11.2018 *Гончаренко Ю.В.*

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ УМК (1989-1992 гг.)

Учебно-методические комплекты (УМК) представляют собой интеллектуальные продукты, базы знаний, сформированные на различных носителях и призванные:

а) повысить уровень преподавания за счет доступности и широты используемых средств;

б) содействовать высококачественной подготовке учителя к уроку, вплоть до разработки индивидуальных заданий учащимся

в) ориентировать высвобожденное личное время учителя на профессиональное самосовершенствование.

Интеллектуальные базы данных, использующие персональные компьютеры класса ЗВМ PC , позволяют осуществить ненасильственное внедрение всеобщей компьютеризации в учительскую среду, способствуют ради кальному снижению трудовых затрат на единицу времени, выступая сред. ством агитации за ЭЫМ в школе.

Разработчики комплекта исходили из следующего положения, принятого в качестве основного: *Никакие новые информационные технологии в обозримом будующем не смогут заменить личного общения учителя с учеником в рамках классно-урочной системы. Поэтому учебно-методические комплекты-это умножители интеллектуальной мощи учителя, а ЭВМ-одно из средств эффективной эксплуатации, содержащихся в них знаний .*

Учебно-методические комплекты являются динамическими системами формирующимися и совершенствующимися непрерывно. В руках профессионала это активно используемое многообразие методических приемов, накопленных в течении многовековой истории становления методик в сочетании с самой современной дидактикой.

Основная сервисная информация: а) методические Указания по применению учебно-методического комплекта на уроках и факультативных занятиях;

б) описание технических средств обучения (ТСО) и указания по эксплуатации материальных средств комплекта;

в) рекомендации по созданию организации пользователей УМК-М и координации сотрудничества по совершенствованию и накоплению знаний;

г) информация о взаимодействии с производителем УМК-М и элементами инфраструктуры народного образования;

д) правовой раздел;

е) обзор способов и возможностей тиражирования знаний, содержащихся в УМК-Ы;

ж) указание по работе с банками данных.

Замечание. Условное деление информации по отношению к учебному процессу не означает, что эта информация разделена физически. Так типовые учебные планы уроков,находяидеся в методическом разделе ядра УМК-Ы, содержат рекомендации по применению, имеющихся в наличии по данной теме, средств УМК-М (пункт а) сервисной информации). ции, возможностями ее тиражирования и использования в учебном процессе. При этом ключевая информация многократно дублируется на различных носителях, что позволяет легко маневрировать ею учителям разной подготовки в школах с разной степенью технической оснащенности.

Учебно-методический комплект использует стандартные полиграфические средства. Часть информации ядра УМК-М размещена на (в):

а) книгах (пример — сборник задач);

б) картотеках (пример — сборник задач, см. иллюстрацию);

в) плакатах (пример — решение некоторых задач);

г) материалах для размножения на свето-и электрокопировальной технике (пример -"бланковки")";

д) материалах для подготовки занятий (пример — учебные планы уроков на стандартных листах формата 2IOх297, содержатся в разъемныхпапках, печать некоторых рисунков многоцветная) и т. д.

Часть информации содержится на фотоматериалах:

а) слайды (пример — решение некоторых задач)

б) пленки для видеографа (то же)

в) материалы для размножения (пример — справочные разделы, размножаемые обычной контактной или проекционной фотопечатью с негативов, имеющихся в комплекте, что делает эту форму тиражирования знаний доступной любой школе)

"Бланковки"— промежуточное (рабочее) название одного из видов дидактических материалов. Представляют собой, отпечатанные на стандартном листе формата 2IOх297, условия задач (например,стереометрических);

многократно избыточное количество формул, используемых в решении; основной чертеж, в котором все дополнительные построения производятся в процессе решения

Следующая группа — фотоматериалы- используется со стандартными техническими средствами обучения (ТСО).

Потребление информации записанной на ПИД предполагает наличие компьютера. Все сервисные возможности УМК-М реализуются в полной мере только при наличии ЭВМ.

Замечание I. В качестве базовой модели ЭВМ выбраны, хорошо освоенные нашей промышленностью, программно-совместимые ЭВМ класса IBM PC (модели "Искра СМ,"Нейрон"), поставляющиеся в стандартной конфигурации: системный блок, клавиатура, монохроматический дисплей, накопители на ГМД и ЖМД, блок питания, игольчатый принтер. Конфигурации, не содержащие "винчестер"и принтер, принципиально ограничивают возможности эксплуатации комплекта, т.к. ряд сервисных программ занимает объем, превышающий объем информации, записываемой на ГМД, а отсуствие принтера не позволяет использовать ЭВМ как средство опиративной полиграфии.

Замечание 2. Для успешной эксплуатации УМК-М достаточно одной ЭВМ. Однако формирование УМК- ФИЗИКА, УМК- ХИМИЯ и т.д. приведет к тому, что число пользователей компьютера возрастет. Поэтому количество персональных компьютеров определяется из отношения ЭВМ: пользователь кек I:5.

Замечание 3. В иерархии школьной компьютерной сети ЭВМ комплекта занимает высшее положение. Она функционирует и эффетивно используется вне зависимости от наличия в школе других вычислительных машин, т.к. призвана расширить возможности учителя по эксплуатации баз данных УМК и опосредованно через учителя влияет на учебный процесс.

Замечание 4. Современные классы учебные вычислительной техники (КУВТ) типа: "Ямаха УКНЦ, БК, "Агат"не имеют программного обеспечения поддержки уроков (за исключением уроков информатики, имеются в виду обучающие программы по "Бейсику"). Малая мощностьи отсуствие сервисных средств не позволяют создать эти программы в школе. Достаточно мощная ЭВМ комплекта решит эту проблему.

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЙ СИНЕРГИЗМ И ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

В медицине синергизм (от греческого совместно действующий) - это вариант реакции организма на комбинированное воздействие двух или нескольких лекарственных препаратов, характеризуемое тем, что комплексное воздействие превышает действие каждого компонента в отдельности.

Преподавание математики в высшей технической школе не испытывает затруднений как с мотивацией изучения предмета так и его применения в смежных дисциплинах. К наиболее "продвинутым"потребителям математики следует отнести: физику, где в равной мере используются все разделы курса высшей математики; теоретическую механику; сопротивление материалов; теоретические основы электротехники и теория цепей; специальные курсы в разных вариантах изучающие теорию сплошных сред (теория упругости, аэро и гидромеханика и др.); теорию конечных автоматов, теорию алгоритмов и множество аналогичных курсов, использующих дискретную математику; теорию автоматического регулирования и т.д.

Квалифицированное чтение вышеуказанных предметов и особенно проведение практических занятий по ним является лучшим практимумом по математике. Анализ программ технических дисциплин показывает, что предъявляемые ими требования к курсу высшей математики значительно превышают возможности в рамках отводимых на нее часов. Поэтому каждый преподаватель излагает некоторые разделы математики в рамках своей дисциплины, что нецелесообразно и в итоге приводит к снижению количества часов отводимых на фундаментаклньую математическую подготовку и как следствие дальнейшее увеличение доли "чистой"мтематики в технических курсах и т.д.. Это типичный пример системы с отрицательной обратной связью. И все же математизация прикладных дисциплин позволяет говорить о непрерывной математической подготовке.

Однако, перечисленные предметы читаются во втором и дальнейших семестрах либо вообще на старших курсах. В первом семестре первокурсник изучает курс высшей математики безотносительно к остальным дисциплинам. С другой стороны существует ряд специальностей относящихся к филологии, социологии, экономике с объемом преподавания примерно 140 часов (1л.+1п в течении 2-х семестров), где мотивация преподавания математики ослаблена, а синергизм остальных дисциплин неощутим.

В поиске возможностей "подкрепить"курс математики дисциплинами, изучаемыми всеми студентами с первого семестра, привел автора к английскому языку. В результате было составлено методическое пособие - "ENGLISH READER (MATHEMATICS)"(Авраменко Л.Г., Гончаренко Ю.В. НТУУ "КПИ". 1998. 100с.) предназначенное для студентов 1 курсов естественнонаучных факультетов ВУЗов, студентов, специализирующихся на техническом переводе и всех, кто делает первые шаги в переводе своих работ по математике на английский язык. Он содержит оригинальные, неадаптированные тексты по математике, заимствованные из Британской энциклопедии (теория множеств, математический анализ, дифференциальные уравнения). Подбор текстов осуществлен так, чтобы полностью соответствовать материалу по математике, изучаемому студентами ВТУЗов в 1-2 семестрах. Это позволяет работать над текстами параллельно с чтением соответствующего материала по математике.

Идея скомпоновать подобное пособие появилась давно. Однако, большинство оригинальных математических текстов не устраивает преподавателей английского языка, т.к. "содержит много формул и мало слов". Структура статей в Британике такова, что соответствующие формулы вначале описываются словами, а затем приводятся в конечном виде. Это тем более важно для тех, кто специализируется на синхронном переводе научных конференций, или готовится к собственным докладам за рубежом. Более того, как все энциклопедические статьи, статьи Британики носят описательный характер и содержат богатые исторические сведения.

В пособие вошли разделы, принадлежащие перу разных авторов, что существенно разнообразит язык и словарный запас, даже в рамках одной темы.

Работая над пособием, мы отказались от составления математического словаря в конце книги. Поскольку, чтобы быть полезным, специализированный словарь должен значительно превосходить по объему данную работу.

Мы рекомендуем:

1. Англо-русский словарь математических терминов. М., Мир, 1994, 414 с.

2. A.J.Lohwater Russian-English dictionary of the mathematical sciences AMS,1990, 342с.

Ссылки приведены на второе издание. Оба словаря следует рассматривать как единое целое. Они появились в результате реализации совместного проекта Национальной академии наук США и АН СССР, начатого в 1958 г. Англо-русская часть словаря готовилась в Математическом институте АН СССР, а русско-английская в США. Существуют и другие словари, но они существенно уступают указанным компетентностью авторов.

При работе над пособием составители не удержались от комментариев, вынесенных в подстрочные замечания. Они коснулись в основном математических идиом, опущенных в основном тексте формул и исторических сведений о "творцах высшей математики". Тексты всех подстрочных замечаний принадлежат составителям. Их перевод на английский язык будет полезным упражнением для читателя.

Мы приносим глубокую благодарность коллективу Британской энциклопедии за возможность осуществить настоящее издание.

ПОСОБИЯ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ЭМПИРИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА СОСТАВЛЕНИЯ

Зачисление абитуриентов в высшие учебные заведения по результатам ЗНО поставило перед преподавателями высшей математики новые задачи. Незнание студентами арифметики рациональных чисел, отсутствие навыков элементарных преобразований является обыденной практикой, а не исключением. Более того, большинство студентов первого курса испытывают трудности в понимании прочитанного и не только по математике и физике, но даже по гуманитарным предметам. Вместе с тем, требования к курсу высшей математики со стороны смежных технических дисциплин, таких как физика, сопротивление материалов, электротехника и т.д., не изменились. Эти факторы повлекли за собой новые правила при составлении учебных пособий для студентов. Автор апробировал их на "Справочном пособии по решению задач курса высшей математики. Неопределенный интеграл"(Киев, 2011, Допомога, 92 с.). Второй год использования пособия на практических занятиях подтвердил целесообразность выработанных принципов. Приведем их.

1. Содержательная сторона материала не должна упрощаться.

2. Упрощению подлежат примеры, иллюстрирующие материал, и способ их изложения, но не сам материал.

3. Решенные примеры, по возможности, должны содержать минимальное количество аналитических преобразований. Где это возможно, следует ограничиться арифметикой целых чисел.

4. Используемый словарный запас должен быть минимально достаточным. Не используйте синонимов. Их изобилие делает изложение литературно привлекательным, но заставляет задумываться над общностью смысла в процессе восприятия.

5. Избегайте способов изложения, содержащих: "легко видеть "очевидно, что "проверьте самостоятельно". Для нынешнего студента все непонятно, элементарные преобразования даются с трудом, а самостоятельно никто ничего сделать не сможет и не будет.

6. Проводимые выкладки должны содержать последовательно все преобразования, вплоть до подсчета дискриминанта при решении квадратного уравнения.

7. Всюду, где возможно, используйте графическую интерпретацию.

Составлять учебные пособия, следуя указанным принципам, сложно, поскольку это противоречит культурной традиции, но если в результате материал максимально усваивается, это оправдывает средства.

СПРАВОЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА КАК НЕОБХОДИМАЯ СОСТАВНАЯ ЧАСТЬ НЕПРЕРЫВНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ

Повсеместное сокращение часов на преподавание математики в высшей школе требует разработки учебных пособий нового типа для компенсации этого недостатка. Подзабытый ныне тезис о непрерывном математическом образовании никто не отменял. И лучшей формой закрепления математических знаний является применение математики в преподавании специальных дисциплин. Однако, математическая литература, используемая в процессе обучения, возвращается студентами в библиотеку. В результате, в последующие годы студент, в лучшем случае, использует свой конспект. Авторы решили снабдить студентов и преподавателей естественнонаучных дисциплин единым кратким справочником по курсу высшей математики (КСКВМ), который является дайджестом курса. Это, на наш взгляд, наиболее влияющая на качество образования учебная литература.

Над разработкой КСКВМ авторы работают десять лет. Первоначально он предназначался для использования во время практических занятий. Но в дальнейшем оказалось, что его применение в качестве единого стандарта общения студентов и преподавателей естественнонаучных дисциплин не менее важно.

В своей работе мы реализовали следующие принципы: содержание пособия должно в точности соответствовать содержанию курса и быть лишь немного "избыточным"(авторы ориентировались на программу [1]). Пособие должно обеспечивать: прямой доступ к материалу в течение одного практического занятия (без перелистывания страниц); легкий поиск по содержанию и предметному указателю; должно быть доступно студенту на родном языке и языке преподавания; иметь компактный размер и разумную цену. Таким же требованиям должен соответствовать и электронный вариант КСКВМ.

В результате мы пришли к выводу, что краткий справочник должен иметь формат А6, седьмой кегль и состоять из отдельных брошюр, сшитых на скобу, что обеспечивает минимальную цену продукта. Предполагается, что краткий справочник будет разделен на следующие брошюры:

- функции одной вещественной переменной (введение в математический анализ, производные, интегралы, ряды, дифференциальные уравнения);

- аналитическая геометрия (системы координат, векторная алгебра, прямая, плоскость, кривые второго порядка, алгебраические и трансцендентные кривые, поверхности второго порядка);

- линейная алгебра;
- функции нескольких вещественных переменных;
- теория функций комплексной переменной, интегральные преобразования, операционное исчисление;
- математическая физика;
- теория вероятностей и математическая статистика.

В настоящее время реализованы первые две брошюры (версии 9.2 и 2.5 соответственно). Нумерация версий отражает процесс работы над КСКВМ. Первая цифра меняется в случае, если вносимые изменения меняют содержание, вторая цифра меняется, если вносимые изменения меняют предметный указатель. Такой способ нумерации понятен студентам, привыкшим к существующим нормам нумерации продуктов программного обеспечения. Это тем более естественно, что параллельно с полиграфической распространяется и электронная, легко обновляемая, версия справочника.

1. "Программа курса высшей математики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений"(510 учебных часов), соответствует приказу Минвуза СССР №340 от 1 апреля 1981г., Приложение 1 п. 1. М., Высшая школа, 1984г., 46 с.

ОТ ЭЛЕКТРОННОГО СПРАВОЧНИКА К ЭЛЕКТРОННОМУ УЧЕБНИКУ

Общие идеи и результаты разработки учебно-методического комплекса по курсу высшей математики докладывались на XI международной конференции имени академика М.Кравчука. Обе части краткого справочника по курсу высшей математики издаются ежегодно и хорошо известны студентам и преподавателям КПИ и других ВУЗов.

Растущая стоимость полиграфических услуг заставила авторов подготовить электронную версию справочника в виде единого документа (без деления на части, как в бумажном исполнении) и разместить его на сайте кафедры вычислительной математики факультета кибернетики КНУ им. Т. Шевченко для бесплатной загрузки. Оказалось, что заложенные в электронной версии средства навигации удобны, а работа со справочником с экрана комфортна. Авторы решили воспользоваться полученным опытом и составить электронный конспект лекций. Далее перечислены проблемы, с которыми авторы столкнулись в процессе работы.

1. Электронный учебник и тексты лекций в виде файлов для просмотра и печати не одно и то же.

2. Методика интерактивного обучения математике полностью отсутствует.

3. Стоимость лицензионного программного обеспечения по подготовке электронных учебников перекрывает все мыслимые доходы от его внедрения.

4. Отсутствие действенных законов об охране интеллектуальной собственности.

5. В руках авторов появились мощные средства воздействия на психику: цвет, звук, видео, анимация, трехмерная графика и другие. Рекомендаций и работ психологов по применению указанных возможностей в электронном учебнике математики нет.

6. Для эффективного использования продолжительность видео и аудио должна быть соизмерима с количеством лекционных и семинарских часов. При одной лекции и одном практическом занятии в неделю это 72 часа в семестр. Подготовка видео- и аудиоконтента требует студийных условий. Затраты на это соизмеримы с затратами на кинофильм или компьютерную игру.

Выводы. Разработка электронного учебника - дело крупных творческих коллективов, в которых математики, как в кинофильмах, только авторы идеи.

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ. АВТОРСКОЕ ПРАВО (2008 г.)

Дистанционным будем называть обучение без преподавателя, но под его руководством. Это отличает дистанционное обучение от самообразования, где преподаватель отсуствует вообще. В последнее время в высших учебных заведениях как на дрожжах возникают разнообразные подразделения, декларирующие дистанционное обучение студентов. На вопрос, чем отличается это обучение от заочного руководители этих подразделений утверждают, что это обучение с использованием интернет. Не будем обсуждать порядочность, честность и бескорыстие руководства. Рассмотрим две проблемы, затрагивающие преподавателя "обучаещего"посредством интернет: **деньги** т.е. оплату труда и возникающие в результате этого труда авторские права.

Подавляющее большинство студентов имеет diul-up доступ к интернет. О передаче каких либо мультимедийных файлов на скорости 56 кбит/сек не может быть и речи. Поэтому общение со студентами происходит в виде текстовых сообщений. При лекции по математике продолжительностью 1,5 часа студент успевает законспектировать примерно 6-12 стр. Однако набрать этот же объем в TEXe или WORDe ни один преподаватель не сможет в режиме реального времени. Преподаватель не машинистка и в его штатные обязанности не входит работа учебно вспомогательного персонала. Но интерактивное обучение предполагает вопросы и ответы. Даже если вопросы сформулированы заранее, ответы на них в реальном масштабе времени невозможны. При этом квалификация машинописных возможностей спрашивающего так же важна, как и отвечающего. На эти аргументы автору неоднократно приходилось слышать, что мы снабдим каждого преподавателя достаточным количеством наборщиков высокой квалификации и т.д. Где же тогда экономия средств, если над одним ответом студенту будет работать штат специалистов? Из каких номативов будет осуществлятся расчет часов?

Предположим, что вся эти трудности технические. В каждом студенческом доме появились широкополосные каналы, web-камеры и другие средства для телеконференций. Однако такая телеконференция может быть записана студентом или кем либо и воспроизведена перед числом лиц более четырех т.е. выпущена в свет. Кому принадлежат авторские права на контент? Ведь при удачной телеконференции ее воспроизведение можно приравнять к просмотру документального фильма. как будет осуществляться защитеа авторских прав? Перечисленные вопросы не надуманные. Особый интерес к такой деятельности проявляют руководители комерческих учебных заведений желающие подменить обучение просмотром с целью экономии денег.

ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ И СТОИМОСТЬ МУЛЬТИМЕДИЙНОГО КОНТЕНТА

Дистанционным будем называть обучение без преподавателя, но под его руководством. В последнее время в высших учебных заведениях возникают разнообразные подразделения, декларирующие дистанционное обучение студентов с использованием Интернета. Из огромного количества проблем, затрагивающих преподавателя, "обучающего"посредством Интернета, на прошедших в 2008 г. "Понтрягинских чтениях-XIX"были поставлены вопросы:

— Из каких нормативов будет осуществляться расчет часов?

— Кому принадлежат авторские права на контент?

— Как будет осуществляться защита авторских прав?

— Из каких нормативов и кем будет осуществляться оплата за использование авторских прав?

Увы, ответы на них находятся вне профессиональной компетенции автора.

В процессе формирования интерактивного учебно-методического комплекса по высшей математике, предназначенного для студентов ВТУЗов, мы столкнулись с еще одним препятствием — СТОИМОСТЬЮ мультимедийного контента.

Мы исходили из того, что в электронном учебнике продолжительность видео и аудио должна быть соизмерима с количеством семинарских и лекционных часов. При одной лекции и одном практическом занятии в неделю это — 72 часа в семестр. При этом потребители, т.е. студенты, вправе ожидать, что по своему качеству мультимедийный контент не будет уступать программам телестудии. Попытка осуществить запись на вебкамеру в "домашних"условиях показала, что с появлением новых выразительных средств задача интерактивного обучения приобретает качественно новый характер. Даже над самыми простыми телевизионными сюжетами работают сценарист, режиссер, ведущий, оператор, звукооператор, осветитель, гример, костюмер, специалист по нелинейному монтажу и т.д. (почитайте и "подсчитайте"внимательно титры в конце передачи). Добавьте сюда специалистов по компьютерной анимации, директора программы и, наконец, стоимость аренды студии и оборудования и вы поймете, каково количество и качество продукции одиночек. Возможно и хороших профессионалов в своей отрасли — математике.

АВТОР ЭЛЕКТРОННЫХ УЧЕБНИКОВ КАК СЦЕНАРИСТ ВОСПРИЯТИЯ

Количество электронных книг, распространяемых в США, Японии и некоторых других странах к концу 2010 г. превысило количество проданных бумажных книг. Повторение этого успеха в других странах вопрос ближайшего времени. Возникает вопрос, а что может предложить математическое сообщество (преподаватели) потенциальному потребителю (студенту).

Заметим, что уже простая подготовка математических текстов существенно отличается от учебников по истории, философии и др., то есть тех предметов, в которых основной контент вербальный, передаваемый фонетическим письмом в виде последовательного файла. Для этих дисциплин слово, выбитое на каменных скрижалях или появившееся на бумаге из лазерного принтера, примерно одинаково понятно. В текстах, содержащих иероглифическое письмо и множественные перекрестные связи, особую роль играет организация материала на видимых доступных поверхностях (экранах).

Компьютер, как средство отображения и управления информацией, позволяет задействовать новые выразительные средства, недоступные бумажным изданиям. При подготовке справочного пособия по решению задач (раздел "Интегрирование") авторы использовали мультимедийные возможности вычислительной техники. Это видеосъемка и последующий видеомонтаж. Использование графического планшета и звукозапись коментариев. Работая над пособием авторы столкнулись с кругом вопросов, неявно присущих труду преподавателя, но не возникающих при подготовке полиграфических изданий.

Многообразие изобразительных средств потребовало написания сценария изложения к каждому примеру. В отличие от произведений искусства, которые могут понравится или нет, учебная литература должна провести студента от постановки задачи до понимания ее решения с "гарантированным" успехом. Таким образом, авторы столкнулись с проблемой написания и реализации сценария, который был назван сценарием восприятия. Распространение печатных изданий в цифровой форме не приведет к изменению восприятия материала. Готовтесь стать сценаристами, но вряд ли плоды трудов ваших будут называть книгой.

АВТОР ЭЛЕКТРОННЫХ УЧЕБНИКОВ КАК СЦЕНАРИСТ ВОСПРИЯТИЯ

Количество электронных книг, распространяемых в США, Японии и некоторых других странах к концу 2010 г. превысило количество проданных бумажных книг. Повторение этого успеха в других странах вопрос ближайшего времени. Возникает вопрос, а что может предложить математическое сообщество (преподаватели) потенциальному потребителю (студенту).

Заметим, что уже простая подготовка математических текстов существенно отличается от учебников по истории, философии и др., то есть тех предметов, в которых основной контент вербальный, передаваемый фонетическим письмом в виде последовательного файла. Для этих дисциплин слово, выбитое на каменных скрижалях или появившееся на бумаге из лазерного принтера, примерно одинаково понятно. В текстах, содержащих иероглифическое письмо и множественные перекрестные связи, особую роль играет организация материала на видимых доступных поверхностях (экранах).

Компьютер, как средство отображения и управления информацией, позволяет задействовать новые выразительные средства, недоступные бумажным изданиям. При подготовке справочного пособия по решению задач (раздел "Интегрирование") авторы использовали мультимедийные возможности вычислительной техники. Это видеосъемка и последующий видеомонтаж. Использование графического планшета и звукозапись коментариев. Работая над пособием авторы столкнулись с кругом вопросов, неявно присущих труду преподавателя, но не возникающих при подготовке полиграфических изданий.

Многообразие изобразительных средств потребовало написания сценария изложения к каждому примеру. В отличие от произведений искусства, которые могут понравится или нет, учебная литература должна провести студента от постановки задачи до понимания ее решения с "гарантированным" успехом. Таким образом, авторы столкнулись с проблемой написания и реализации сценария, который был назван сценарием восприятия. Распространение печатных изданий в цифровой форме не приведет к изменению восприятия материала. Готовтесь стать сценаристами, но вряд ли плоды трудов ваших будут называть книгой.

ПОНЯТИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В 50-х - 70-х годах прошлого столетия были подготовлены и изданы многочисленные учебники и менее многочисленные сборники задач по функциональному анализу. Язык и методология функционального анализа стали стандартными в современной математике.

Однако, использование идей функционального анализа в курсах высшей математики для ВТУЗов сдерживается чрезвычайной инерционностью всей системы преподавания, начиная с учебных планов и кончая учебниками, задачниками и, в конце концов, преподавателями. Между тем, своевременное введение многих общих понятий функционального анализа делают изложение проще, а доказательства прозрачнее.

По нашему мнению, к таким понятиям относится понятие метрики и метрического пространства. В конце советского периода были предприняты попытки модернизации учебников и разработки учебно-методических комплексов для математических специальностей университетов и пединсти-тутов [1], [2]. Однако, в них введение метрического пространства отнесено ко второму и третьему семестрам обучения. Между тем, в аксиоматике геометрии Гильберта - Кон-Фоссена первоначальными понятиями являются понятия точки, прямой, плоскости и расстояния, которое превращает плоскость (пространство) в метрическое пространство. В школьных учебниках геометрии под редакцией Колмогорова А.Н. понятие расстояния подробно разбиралось, то есть не являлось новым для студентов.

По нашему убеждению, введение понятия расстояния сразу после элементов теории множеств и отношений позволяет ввести и оперировать такими топологическими понятиями, как окрестность, открытые и замкнутые множества, внутренняя и граничная точки, граница множества. А после введения понятия бесконечно малой числовой последовательности дать единое определение предела последовательности элементов в метрическом пространстве, которое, по нашему опыту, оказывается проще для понимания, чем определение предела числовой последовательности. Такой подход оправдан уже тем, что метрика на земной поверхности отличается от евклидовой. А, например, слушатели факультета довузовской подготовки КПИ в процессе обучения строят множества точек $|x|+|y|=1$, $|x+y|+|x-y|=2$, являющиеся единичными сферами в разных метриках.

Литература

1. Дороговцев А.Я. Математический анализ. - Киев: "Вища школа 1985, 528 стр.

2. Зорич В.А. Математический анализ. Т1. - М.: "Наука 1981, 544 стр.

МЕТРИЧЕСКИКЕ ПРОСТРАНСТВА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. ТРИ ПРИМЕРА

На ВВМШ авторами неоднократно обсуждалось введение метрики в первом семестре сразу после элементов теории множеств и отношений.

Для студентов первого семестра первого курса (даже математических специальностей) очень сложно воспринимать абстрактные понятия безотносительно к повседневному опыту.

I. Так на вопрос как измеряется расстояние между двумя точками все отвечают - как длинна отрезка прямой с концами в этих точках. Всякая попытка указать другие метрики в конечномерных пространствах отторгается непониманим - зачем это надо. А замечание, что это понадобится в дальнейшем напоминает родительские увещевания третьекласснику - учись хорошо и через пятнадцать лет человеком станешь.

II. В тоже время предложение измерить расстояние между Москвой и Нью Йоркм по прямой (через литосферу, мантию и т.д.) сразу взламывает стену неприятия. После напоминания о способе измерения расстояний на поверхности Земли черезвычайно полезно указать, что круг на поверхности Земли это сферический сегмент и определив число π как отношение длины окружнсти к ее диаметру показать, что на земном шаре что это число может принимать любые значания от 0 до 3.1415... не включая последнее. Действительно. Для круга, образованного параллелью, с центром в северном полюсе диаметром является часть мередиана, проходящего через северный полюс и лежащего в этом круге. С приближением круга к южному полюсу длина круга стремится к нудю, а длина мередиана к $2\pi R$, где R — радиус Земли.

Здесь же можно привести пример расстояния между пауком сидящим на полу комнаты и мухой, находяжейся на потолке.

III. Множество в котором расстояние между любыми двумя различными элементами равно единице называется метрическим пространством изолированных точек. Примером такого расстояни служит множество абонентов мобильного оператора телефонной связи, если принять за единицу время установления связи между любыми двумя из них. В таком случае полезно указать круги радиусов 0,5 и 1,5.

Как еще один пример дискретной метрики необходимо упомянуть Метрику Хеминга. И заключить рассказ о приминении метрики, общей теорией относительности, теорией суперструн и т.д. Напомнив что, метрика окружающего мира является основным предметом изучения, прочно вошедшим в современную субкультуру.

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. ОПЫТ РЕАЛИЗАЦИИ

На ВВМШ в 2014 г. автором обсуждалось введение метрики в первом семестре сразу после элементов теории множеств и отношений. Особую роль в этом играли примеры метрик, заданных на множествах, не являющихся векторными пространствами Были предложены три примера: расстояние на поверхности Земли, дискретная метрика в множестве пользователей мобильного оператора и метрика Хемминга в множестве двоичных слов фиксированной длины. Первые два примера не вызвали вопросов. Сама метрика Хемминга также усваивается хорошо. А вот обещанные автором в 2014 г. 15 минут на изложение оказались явной недооценкой.

Напомним.

В множестве n-значных двоичных чисел Хемминг определил расстояние между двумя числами как количество позиций, в которых у чисел стоят различные символы (например, $\rho(1010; 1110) = 1$). Такой способ измерения расстояний играет важную роль в теории кодов с исправлением ошибок. Поэтому автор рассказала о контроле четности, который позволяет за счет добавления еще одного разряда к сообщению сделать заключение о безошибочной передаче сообщения или наличии единичной ошибки в нем. И о геометрической интерпретации этой процедуры — областях Дирихле. На этом, собственно, 15 минут и закончились.

Попытка рассказать о кодах с исправлением ошибок столкнулась со следующими недостатками школьных программ:

1. Первокурсники не знают, что такое мантисса и характеристика десятичного логарифма. Отсюда чисто механическое восприятие порядка числа (применение в физике) и арифметики с плавающей запятой (типы переменных в информатике).

2. Первокурсники не в состоянии вычислить сколько десятичных чисел необходимо для десятичной записи числа 2^n и наоборот: сколько знаков содержится в двоичной записи десятичного числа.

Рассказ о кодах Хемминга занимает пару, на которой излагается тема — логарифмические функции и их приложения. Если Вы не обладаете запасной лекцией, то остановитесь на контроле четности.

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. ПРОИЗВОДНАЯ ФРЕШЕ

О ходе работ по разработке учебно-методического комплекса по высшей математике неоднократно сообщалось на Воронежских конференциях. Мы отмечали, что раннее введение некоторых понятий функционального анализа существенно упрощает изложение.

По сути, математический анализ развился из задач линейной аппроксимации. Так, если для функции $y = f(x)$ в точке x_0 найдется такая линейная функция $y = f(x_0) + k(x - x_0)$, что при $x \to x_0$

$$f(x) - f(x_0) - k(x - x_0) = o(x - x_0),$$

то эта линейная функция называется касательной, число k является значением производной в точке x_0, функция $k(x - x_0)$ называется дифференциалом и т.д.

В векторном анализе и немного раньше, в разделах, посвященных замене переменных в кратных интегралах, изучаются отображения (в общем случае, нелинейные) $F : R^n \to R^n$, т.е. $\bar{y} = F(\bar{x})$, $\bar{x}, \bar{y} \in R^n$. Совершенно аналогично, если в точке $\bar{x}_0$ найдется такой линейный оператор A, что при $\bar{x} \to \bar{x}_0$

$$||F(\bar{x}) - F(\bar{x}_0) - A(\bar{x} - \bar{x}_0)|| = o(||\bar{x} - \bar{x}_0||),$$

то матрица A является значением производной Фреше в точке $\bar{x}_0$. Мы убедились на практике, что эта прямая аналогия легко воспринимается студентами, особенно, если для начала ограничиться случаем R^2. Там же устанавливается и вид матрицы A — это матрица Якоби, указывается геометрический смысл определителя этой матрицы и т.д.

Далее, в ТФКП рассматривается то же равенство

$$|f(z) - f(z_0) - c(z - z_0)| = o(|z - z_0|), \qquad (*)$$

где $z = x + iy$, $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$, а $c = a + ib$ называется значением производной в точке z_0.

Но по сути, f - это отображение $f : R^2 \to R^2$. Если оно дифференцируемо по Фреше, то $du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$ и $dv = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$. Чтобы дифференцируемое по Фреше отображение f имело вид $(*)$, требуется, чтобы $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = b$. Что дает условия Коши-Римана.

Математика — единая наука и единство методов изложения существенно облегчает восприятие.

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. СХОДИМОСТЬ ПО НОРМЕ

Об использовании методов и языка функционального анализа в курсе высшей математики автор неоднократно докладывал на данной и других конференциях. И если в разделе "математический анализ функций одной действительной перменной" преимущества современного математического языка не столь очевидны, то в разделе "функции многих переменных" использование идей функционального анализа позволяет не только сделать изложение более понятным, но и избежать ошибок, продиктованных интуицией, воспитанной на одномерном случае.

Пример 1

На числовой оси $\mathbb{R}$ длина большего отрезка всегда больше длины меньшего. На числовой плоскости $\mathbb{R}^2$ введем норму вектора $\|(x;y)\| = \sqrt{x^2+100y^2}$. В указанной норме $\|(1;0)\| = \sqrt{1^2+100\cdot 0^2} = 1$. Часто при решении задач производится замена переменных. Рассмотрим поворот системы координат на сорок пять градусов $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$, где x', y' — новые координаты; x, y — исходные координаты. Поворот системы координат не изменяет расстояний, т.е. является изометрией. Точка $(1;0)$ в исходной системе координат имеет координаты $(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2})$ в повернутой системе координат. В новой системе координат расстояние вычисляется по формуле

$\|(x';y')\|_0 = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'))^2+100(\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'))^2}$ (здесь $\|.\|_0$ обозначает ту же норму, но выраженную через новые координаты). Как и следовало ожидать, после подстановки убеждаемся, что $\|(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2})\|_0 = 1$.

Вектор $(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{\sqrt{2}}{2};0)+(0;-\frac{\sqrt{2}}{2})$ является суммой двух взаимно перпендикулярных векторов. Интуиция подсказывает, что катет всегда меньше гипотенузы. Вычислим

$$\|(\frac{\sqrt{2}}{2};0)\|_0 = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-0))^2+100(\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+0))^2} = \sqrt{25,25} > 5.$$

Катет больше гипотенузы более чем в пять раз! Таким образом, уменьшение по абсолютной величине одной из координат не всегда приводит к уменьшению длины вектора. А ведь этот факт в каждом учебнике используется при доказательстве равносильности сходимости по норме и покоординатной сходимости для конечномерных пространств. Действительно, рассмотрим доказательство этого утверждения в $\mathbb{R}^2$ для введенной выше нормы $\|.\|$.

Сходимость $(x_n; y_n)) \to (a; b)$ при $n \to \infty$ по норме означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n; y_n) - (a; b)\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - a)^2 + 100(y_n - b)^2} = 0.$$

Справедлива оценка $\sqrt{(x_n - a)^2 + 100(y_n - b)^2} \geq \sqrt{(x_n - a)^2 + 0} = |x_n - a|$. Отсюда, переходя к пределу в неравенстве, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$.

Доказательство верное, но возникает вопрос. Когда уменьшение абсолютной величины координат вектора влечет за собой уменьшение его нормы?

Теорема. Уменьшение абсолютной величины координат вектора в конечномерном пространстве влечет за собой неуменьшение его нормы тогда и только тогда, когда норма зависит лишь от абсолютных величин координат вектора (доказательство содержится в [1, стр. 199]).

Теперь понятно, что пример удалось построить потому, что в повернутой системе координат норма $\|.\|_0$ не являлась функцией от модулей координат вектора.

А как же равносильность сходимости по норме и покоординатной сходимости в случае произвольных норм? Она имеет место, но доказательство вытекает из эквивалентности всех норм в конечномерном пространстве, т.е. компактности единичного шара в конечномерном случае.

Пример 2

В бесконечномерном случае покоординатная сходимость не влечет за собой сходимость по норме.

Действительно, пусть l_1 - пространство суммируемых последовательностей, снабженное нормой $\|\bar{a}\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Рассмотрим последовательность векторов

$$\bar{a}_1 = (1; 0; 0; 0; \ldots), \quad \bar{a}_2 = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0; \ldots), \quad \bar{a}_3 = (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0; \ldots), \ldots$$

Числовые последовательности первых, вторых, третьих и т.д. координат векторов $\bar{a}_n$ все стремятся к нулю, в то же время последовательность $\bar{a}_n$ к нулю сходиться не может, поскольку при всех n $\|\bar{a}_n\| = 1$, а значит, все векторы $\bar{a}_n$ лежат на единичной сфере.

Выводы

Если в курсе функций многих переменных лектор ограничивается только нормами вида $\|\bar{x}\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, где $\bar{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $p \geq 1$ или нормой $\|\bar{x}\|_\infty = \max\limits_{k=\overline{1,n}} |x_k|$, то о приведенных фактах не следует даже упоминать. Однако, в случае применения разнообразных замен переменных или перенормировок для корректности изложения пример 1 следует иметь в виду.

1. Ланкастер П. Теория матриц. — Москва: Наука, 1978, 280 с.

ПРИМЕРЫ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Проичиной появления настоящей работы послужили два обстоятельства:

I. Прекрасная книга Г.М. Фихтенгольца — "Курс дифференциального и интегрального исчисления"используется в преподавании более полувека. Но мало кто помнит учебник того же автора — Основы математического анализа , содержащую примерно тот же материал что и "Курс"только без многочисленных примеров. Поэтому результаты поиска содержательных, современных примеров приложений математического анализа к практике постоянно освещаются автором на различных конференциях.

II. Адресованная студентам статья В.А. Князева, В.С. Черкасского "Дискретное преобразование Фурье – Как это делается"из которой невозможно понять не как это делается, ни почему так делается.

Пример

Преобразование Фурье F лежит в основе курса теории (обработки) сигналов. Сигнал трактуется как числовая функция времени $y = f(t)$. При этом как известно студентам второго курса $F : L_2(-\infty;\infty) \to L_2(-\infty;\infty)$. Первый культурный шок студента — что означает, откуда берется и как задается на практиктике сигнал от "бесконечного времени". Он не преодолевается даже предположением, что сигнал можно задать на полуоси $[0;\infty)$, продолжив его на всю ось четным образом, т.е. от сотворения мира до его конца. Более того оказывается, что из сигнала выделяют какой либо отрезок например $[-l;l]$ и работают с ним предполагая, что функция имеет период $T = 2l$ и для периодичности $y(-l) = y(l)$. Поскольку на практике сигнал анализируется цифровым устройством, измеряющим его значения через равные промежутки времени $\Delta t = \frac{2l}{n}$, то для анализа доступен вектор $\bar{y} = (y_0; y_1; y_3, ..., y_n)$ содержащий результат n измерений и состоящий из $n + 1$ чиса в котором из соображений периодичности функции полагают $y_0 = y_n$.

Для дифференцируемой (для простоты) на отрезке $[-l;l]$ функции, справедливо разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \sin\frac{m\pi x}{l}), \qquad (1)$$

$$a_o = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\;\; a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\;\; b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\;\; n \in \mathbb{N}.$$

Далее воспользуемся формулой трапеций для нахождения коэффициента

$$a_0 = \frac{1}{l}\Delta t\Big(\frac{y_0+y_1}{2} + \frac{y_1+y_2}{2} + \frac{y_2+y_3}{2} + ... + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Big).$$

Учитывая, что $y_0 = y_n$ и $\frac{2l}{\Delta t} = n$ получаем

$$a_0 = \frac{1}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k.$$

Аналогично

$$a_m = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cos\frac{m\pi k\Delta t}{l} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cos mk\frac{2\pi}{n}.$$

и

$$b_m = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \sin\frac{m\pi k\Delta}{l} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \sin mk\frac{2\pi}{n}.$$

Выводы

Для приближенного вычисления коэффициентов a_0, a_m, b_m требуется только вектор значений наблюдаемого сигнала в точках $t_k = -l + k\Delta t \quad k = \overline{0, n}$, которые в теории обработки сигналов называются отсчетами. Эти коэффициенты зависят от числа произведенных наблдений и наблюдаемых значений и не зависят от промежутка времени на котором они произведены. Это не удивительно. Если в формуле (1) переменную t заменить переменной ωt период функции изменится в ω раз а коэффициенты Фурье останутся прежними, т.е. коэффициенты Фурье зависят от формы сигнала а не от длительности промежутка $[-l; l]$ на который этот сигнал "растянут"по оси t.

Для вычисление коэффициентов a_m, b_m требуются значения тригонометрических функций в n точках которые можно вычислить заранее и запомнить в виде массива. Эффективная процедура вычисления коэффициентов Фурье называется быстрым преобразованием Фурье (БПФ) и в силу алгоритмических особенностей требует чтобы число отсчетов составляло степень 2.

При вычислении коэффициента a_n значения тригонометрической функции $\cos nk\frac{2\pi}{n} = 1$ при всех k. Коєффициенты a_{n-1} и b_{n-1} последние содержащие полезную информацию. Это приводит к частоте Найквиста необходимой дискретизации сигнала.

Список литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т3. — Москва: Наука, 1969, 656 с.

2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т1. — Москва: Наука, 1968, 442 с.

3. Князев Б.А., Черкасский В.С. Дискретное преобразование Фурье - как это делается. Вестник НГУ, 2008, № 4, Учебно-методическое обеспечение преподавания физики.

ТЕОРЕМА БИРКГОФА-ТАРСКОГО В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

По требованию IT специальностей в первом семестре ВТУЗов часто читаются разделы дискретной математики либо в виде отдельного курса, либо в виде отдельных лекций в рамках общего курса. В них понятия множества, отношения (порядка и эквивалентности), отображения являются центральными. В связи с этим целесообразно рассмотреть следующие вопросы.

Определение. Бинарное отношение ($<$) на множестве A, удовлетворяющее условиям: **1)** $a < b$ исключает $a = b$; **2)** $a < b$ и $b < c \Rightarrow a < c$ (*транзитивность*), назывется *строгим порядком.*

Определение. Пусть множество A частично упорядочено и $E \subset A$. Элемент $b \in A$, обладающий тем свойством, что для любого $a \in E \;\; a \leq b$, называется *мажорантой* или *верхней границей* множества E, а само множество —*ограниченным сверху*. Всякий элемент $b \in A$, такой, что $b \leq a$ для любого $a \in E$, называется *минорантой* или *нижней границей* множества E, а множество — *ограниченным снизу*. Множество E называется *ограниченным*, если оно ограниченно сверху и снизу.

Определение. Пусть множество A частично упорядочено и $E \subset A$. *Наибольшим* элементом подмножества E множества A называется такой элемент $a \in E$, что для всех $x \in E \;\; a \geq x$. Соответственно *наименьшим* элементом подмножества E называется такой элемент $b \in E$, что $\forall x \in E \;\; b \leq x$. Наименьшая верхняя граница непустого множества $E \subset A$ называется его *верхней гранью* или *супремумом* и обозначается $\sup E$. Наибольшая нижняя граница непустого множества $E \subset A$ называется его *нижней гранью* или *инфимумом* и обозначается $\inf E$.

Числовая ось является линейно упорядоченным множеством. Поэтому понятия минимального (максимального) и наименьшего (наибольшего) элементов неразличимы. Весьма поучительно проиллюстрировать эти понятия на R^2 с отношением частичного порядка $\bar{x} \leq \bar{y} \Leftrightarrow x_1 \leq y_1$ и $x_2 \leq y_2$. Указать, что точные нижние (верхние) грани могут "далеко отстоять"от ограниченных множеств. На примерах Q и Q^2 показать, что точные грани ограниченных множеств существуют не всегда (даже для случая линейно упорядоченного множества Q).

Определение. Частично упорядоченное множество A называется *полной структурой*, если всякое его непустое подмножество имеет инфимум и супремум.

Определение. Пусть A и B — частично упорядоченные множества. Отображение $F : A \to B$ называется *изотонным* , если для любых $x_1, x_2 \in A$ из отношения $x_1 \leq x_2$, следует отношение $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Теорема Биркгофа-Тарского (*Birkhoff, Tarski*)**.** Для всякого изотонного отображения F полной структуры A в себя найдется, по меньшей мере, один такой элемент $a \in A$, что $F(a) = a$ (a называется неподвижной точкой F).

Доказательство. Рассмотрим множество $E = \{x \in A | x \leq F(x)\}$. Множество E не пусто. Действительно, обозначив через $v = \inf A$ получаем $v \leq F(v)$, т.е. $v \in E$.

Теперь обозначим через $a = \sup E$. Покажем, что a является неподвижной точкой отображения F. Для всех $x \in E$ из неравенства $x \leq a$ следует неравенство $F(x) \leq F(a)$. В силу определения множества E для всех $x \in E$ $x \leq F(x) \leq F(a)$. Таким образом, $F(a)$ является верхней границей множества E и $a \leq F(a) \quad (*)$.

Вновь воспользуемся изотонностью отображения F.Из неравенства $a \leq F(a)$ следует неравенство $F(a) \leq F(F(a))$. То есть $F(a) \in E$. Но $a = \sup E$, а значит $F(a) \leq a \quad (**)$. Из двух противоположных нестрогих неравенств вытекает равенство $F(a) = a$. Что и требовалось доказать.

Весь материал может быть изложен за 45 мин. Вместе с тем, идеи, заключенные в доказательстве, часто используются в дальнейшем (например, в принадлежащем Коши доказательстве теоремы Больцано-Коши о нулях непрерывной функции). Являясь самой поздней из теорем о неподвижной точке, теорема Биркгофа-Тарского может оказаться первой фундаментальной теоремой о свойствах отображений в курсе высшей математики.

Список литературы

1. Tarski A. A lattise theoretical fixpoint theorem and its application, Pacific J. Math. 5 (1955), 285-309.

ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО

В курсе математики для экономистов обязательно присутствуют задачи линейного программирования, излагаемые в виде алгоритмов решения без должного обоснования. Как правило, ограничиваются геометрической иллюстрацией на плоскости задачи поиска экстремальных значений линейных функционалов на выпуклых множествах. Теорема Крейна-Мильмана (1940 г.), лежащая в основе методов линейного программирования, в своей общей формулировке для выпуклых множеств в линейных топологических пространствах выходит за все мыслимые рамки курса высшей математики для ВТУЗов. Однако, изложение конечномерного варианта этой теоремы вполне возможно уже во втором, третьем семестрах после знакомства с основами линейной алгебры.

Определение 1. *Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ — разные точки. Множество $\{(1-\lambda)\bar{a} + \lambda\bar{b} \mid \lambda \in (0;1)\}$ называется открытым интервалом.*

Определение 2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество. Точка $\bar{x} \in A$ называется крайней точкой множества A, если она не содержится ни в одном интервале, принадлежащем A.*

Определение 3. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклой оболочкой множества M, если оно состоит из всех конечных сумм вида $\sum\limits_k \lambda_k \bar{x}_k$, где $\bar{x}_k$ — произвольные элементы из M, $\lambda_k \in [0;1]$ и $\sum\limits_k \lambda_k = 1$.*

Теорема Крейна-Мильмана. *Всякое выпуклое ограниченное замкнутое множество являеся выпуклой оболочкой своих крайних точек.*

Доказательство проведем индукцией по размерности пространства. Пусть $n = 1$. Всякое выпуклое множество на прямой является отрезком. Его концы — крайние точки. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ у всякого ограниченного замкнутого выпуклого множества крайние точки существуют и само множество является выпуклой оболочкой своих крайних точек. Пусть теперь выпуклое ограниченное замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}^n$. Покажем, что у него есть крайние точки. Для любой гиперплоскости $L(\bar{x}) = 0$ в $\mathbb{R}^n$ в силу замкнутости и ограниченности множества A существует точка $\bar{x}_0 \in A$, наиболее от нее удаленная. Проведем через нее гиперплоскость $L(\bar{x} - \bar{x}_0) = 0$, параллельную исходной. Пересечение множества A и гиперплоскости $L(\bar{x} - \bar{x}_0) = 0$ будет выпуклым множеством размерности $n-1$, по предположению индукции у него существует крайняя точка $\bar{y}$. Покажем, что она крайняя и для множества A. От противного. Пусть это не так. Тогда $\bar{y} = (1-\lambda)\bar{a} + \lambda\bar{b}$. Поскольку точка $\bar{x}_0$ наиболее удалена от гиперплоскости, то множество A лежит по одну сторону от гиперплоскости и $L(\bar{a}-\bar{x}_0)$ и $L(\bar{b}-\bar{x}_0)$ одного знака. Например, положительные. Тогда $L(\bar{y}-\bar{x}_0)=(1-\lambda)L(\bar{a}-\bar{x}_0)+\lambda L(\bar{b}-\bar{x}_0)>0$, что противоречит тому, что $L(\bar{y}-\bar{x}_0)=0$. Итак, в n-мерных пространствах у выпуклого ограниченного замкнутого множества есть крайние точки. Рассмотрим выпуклую оболочку всех крайних точек множества A. Покажем, что она совпадает с A. От противного. Выберем в A точку, не входящую в выпуклую оболочку крайних точек. Проведем через нее гиперплоскость, не пересекающую выпуклую оболочку точек. Выпуклая оболочка крайних точек будет лежать по одну сторону от гиперплоскости. По другую сторону от выпуклой оболочки выберем точку множества A, наиболее удаленную от гиперплоскости. Ее пересечение с множеством A будет выпуклым замкнутым ограниченным множеством размерности $n-1$, а значит содержащим крайнюю точку, что противоречит предположению.

Следствие. *Пусть $A\subset\mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество, тогда линейная функция достигает на A своего наибольшего (наименьшего) значения по меньшей мере в одной крайней точке.*

Каждый шаг доказательства хорошо иллюстрируется рисунком на плоскости, что делает их интуитивно очевидными. Изложение теоремы занимает полупару.

Литература

Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1960. — 1071 с.