Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2017, №1(124) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.9
MSC 70S05, 90C26

DYNAMIC SYSTEMS FOR FINDING BEST APPROXIMATION PAIRS RELATIVE TO TWO SMOOTH CURVES IN EUCLIDEAN SPACE

S. S. Zub[1], N. I. Lyashko[2], V. V. Semenov[1]

[1]Taras Shevchenko Kiev National University, Kiev, Ukraine, E-mail: stah@univ.kiev.ua, volodya.semenov@gmail.com
[2]Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine, E-mail: dept165@insyg.kiev.ua

ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ ДЛЯ ПОШУКУ НАЙБЛИЖЧИХ ПАР НА ДВОХ ГЛАДКИХ КРИВИХ В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ

С. С. Зуб[1], Н. І. Ляшко[2], В. В. Семенов[1]

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: stah@univ.kiev.ua, volodya.semenov@gmail.com
[2]Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна, E-mail: dept165@insyg.kiev.ua

Abstract. We consider the method of finding a nearest pair of points on two smooth curves in the Euclidean space, i.e., two points which achieve the minimum distance between two curves, which uses the model of physical interaction of material points with a given potential energy. The Lagrange and Hamilton equations of motion of points are obtained. Approximate integration of these equations gives algorithms for approximation of the nearest pair.
Keywords: smooth curves, nearest pair, algorithm, dynamic system, Lagrange equation, Hamilton equation.

Резюме. У роботі розглянуто метод пошуку найближчих пар на двох гладких кривих в евклідовому просторі, який використовує модель фізичної взаємодії матеріальних точок із заданою потенціальною енергією. Одержано рівняння Лагранжа та Гамільтона руху точок, наближене інтегрування яких дає алгоритми апроксимації найближчої пари.
Ключові слова: гладкі криві, найближча пара, алгоритм, динамічна система, рівняння Лагранжа, рівняння Гамільтона.

1. Вступ

Нехай A, B — підмножини евклідового простору $\mathbb{R}^n$. Однією з популярних оптимізаційних задач є пошук найближчих пар елементів множин A,

B (або обчислення відстані між A і B):

$$\text{знайти}\ \ a_0 \in A,\ b_0 \in B: \ \ \|a_0 - b_0\| = \min_{a \in A,\, b \in B} \|a - b\|. \tag{1}$$

Ефективне розв'язання задачі (1) є ключовим елементом у багатьох прикладних питаннях (наприклад, при створенні планувальників маршрутів у робототехніці). Тому природно, що багато дослідників приділяли свою увагу задачі (1) для різних класів множин [1–10].

У даній роботі ми розглянемо задачу (1) для двох гладких кривих у тривимірному евклідовому просторі та запропонуємо метод її розв'язання, який використовує модель фізичної взаємодії матеріальних точок із заданою потенціальною енергією. Схожу ідею використати фізичну силу Кулона та рівняння механіки Ньютона із зв'язками, але для пошуку найближчих пар на двох гладких кривих в евклідовому просторі, реалізовано в методі „заряджених кульок“ [8–10]. Зауважимо, що мабуть найбільш відомим прикладом використання фізичної аналогії в оптимізаційній алгоритміці є загально відомий метод „heavy ball“ [11].

Використання формалізмів Лагранжа та Гамільтона, які досягли високого рівня розвитку в класичній механіці, а надалі стали загально визнанною відправною точкою для отримання рівнянь у сучасній фізиці, дозволяє максимально узагальнити методи фізичної аналогії до згаданих вище задач оптимізації. Зокрема, на цьому шляху стало можливим реалізувати ідею застосування потенціалів довільного типу в задачах оптимізації, поставлених третім автором даної роботи.

2. Постановка задачі та позначення

У 3-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ розглянемо дві гладкі параметризовані криві

$$\vec{x}(\alpha) = (x_1(\alpha), x_2(\alpha), x_3(\alpha))\,, \quad \vec{y}(\beta) = (y_1(\beta), y_2(\beta), y_3(\beta))\,,$$

де $\vec{x},\, \vec{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ — неперервно диферецційовні вектор-функції скалярних параметрів α, β відповідно. Будемо шукати найближчі пари точок, що лежать на кривих. Тобто, розглянемо задачу мінімізації

$$\|\vec{x}(\alpha) - \vec{y}(\beta)\| \to \min_{\alpha,\, \beta}.$$

У роботі пропонується метод розв'язання цієї задачі, який використовує модель фізичної взаємодії матеріальних точок із потенціальною енергією загального вигляду.

Щоб описати рух точки вздовж кривої у просторі, треба знати радіус-вектор точки на кривій $\vec{x}(t)$ та її швидкість $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$ у будь який момент часу $t > 0$. А оскільки криві параметризовані, то рух вздовж них можна описати залежністю параметрів α та β від часу t.

Нехай рух відбувається під дією сили притягання між точками, які можуть рухатися тільки вздовж просторових кривих, заданих параметрично. Будемо вважати, що потенціальна енергія системи точок залежить тільки від відстані між ними

$$U = U\left(\|\vec{y}(\beta) - \vec{x}(\alpha)\|\right).$$

Потенціальна енергія може бути довільною функцією $r > 0$, але має сенс обмежитися таким відрізком ряду Лорана по r

$$U(r) = U(\|\vec{y} - \vec{x}\|) = \frac{q^2}{r} + U_0 + g \cdot r + k_2 \cdot r^2 + k_3 \cdot r^3.$$

Далі отримаємо рівняння Лагранжа та Гамільтона руху цієї системи двох точок. Наближене інтегрування задач Коші для виведених диференціальних рівнянь дає алгоритми апроксимації найближчої пари. Результати обчислювальних експериментів та деякі узагальнення будуть представлені найближчим часом в іншій публікації.

3. Функція Лагранжа з дисипацією енергії

Введемо такі позначення: $\mathcal{L}_0$ — функція Лагранжа без дисипації енергії; $\mathcal{L}$ — функція Лагранжа з дисипацією енергії; $\vec{r}(\alpha, \beta) = \vec{y}(\beta) - \vec{x}(\alpha)$ — радіус-вектор між двома точками на заданих кривих. Для похідних будемо використовувати позначення

$$\vec{x}'_\alpha = \frac{d\vec{x}}{d\alpha}, \;\; \vec{y}'_\beta = \frac{d\vec{y}}{d\beta} \;\text{ та }\; \vec{x}''_\alpha = \frac{d^2\vec{x}}{d\alpha^2}, \;\; \vec{y}''_\beta = \frac{d^2\vec{y}}{d\beta^2}.$$

Тоді функція Лагранжа від узагальнених координат α, β та швидкостей $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ буде мати вигляд

$$\mathcal{L}_0(\alpha, \dot{\alpha}; \beta, \dot{\beta}) = \frac{m_\alpha}{2}\left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{m_\beta}{2}\left\|\vec{y}'_\beta\right\|^2 \dot{\beta}^2 - U(r), \tag{2}$$

де $r = \|\vec{r}\|$, $m_\alpha > 0$, $m_\beta > 0$.

Дисипацію енергії введемо через експоненціальний коефіцієнт [13]

$$\mathcal{L}(\alpha, \dot{\alpha}; \beta, \dot{\beta}; t) = e^{\lambda t}\mathcal{L}_0(\alpha, \dot{\alpha}; \beta, \dot{\beta}), \tag{3}$$

де λ — додатня константа.

Зауваження 1. Функція Лагранжа (3) описує рух взаємодіючих частинок з масами m_α, m_β, на які, крім того, діють сили тертя, що пропорційні швидкостям частинок.

4. Рівняння Лагранжа

Отримаємо рівняння руху Лагранжа [12, 13] для нашої системи двох частинок

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\nu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\nu} = 0. \tag{4}$$

Знайдемо похідні $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^\nu}$, $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^\nu}$ та $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^\nu}\right)$. Маємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha} = e^{\lambda t}\dfrac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\alpha}, \quad \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\beta} = e^{\lambda t}\dfrac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\beta}, \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\alpha} = e^{\lambda t}\dfrac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot\alpha}, \quad \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\beta} = e^{\lambda t}\dfrac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot\beta}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\alpha}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\dfrac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot\alpha}\right), \quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\beta}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\dfrac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot\beta}\right). \end{cases} \tag{5}$$

У функції Лагранжа $\mathcal{L}_0$ без дисипації (2) від параметра α залежить перший та третій доданок. Отже, маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{m_\alpha}{2}\left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2\dot\alpha^2 - U(r)\right) = \\ &= m_\alpha\langle\vec{x}''_\alpha, \vec{x}'_\alpha\rangle\dot\alpha^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\langle\vec{y}-\vec{x}, \vec{x}'_\alpha\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\beta} = m_\beta\langle\vec{y}''_\beta, \vec{y}'_\beta\rangle\dot\beta^2 - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\langle\vec{y}-\vec{x}, \vec{y}'_\beta\rangle. \tag{7}$$

У функції Лагранжа $\mathcal{L}_0$ від $\dot\alpha$ залежить лише перший доданок. Маємо

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot\alpha} = m_\alpha\left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2\dot\alpha. \tag{8}$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot\beta} = m_\beta\left\|\vec{y}'_\beta\right\|^2\dot\beta. \tag{9}$$

Обчислимо похідну за часом від $\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot\alpha}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot\alpha}\right) &= m_\alpha\frac{d}{dt}\left(\left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2\dot\alpha\right) = \\ &= m_\alpha\left(\frac{d}{dt}\left(\left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2\right)\dot\alpha + \left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2\ddot\alpha\right) = \\ &= m_\alpha\left(2\langle\vec{x}''_\alpha, \vec{x}'_\alpha\rangle\dot\alpha^2 + \left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2\ddot\alpha\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Аналогічно обчислимо похідну за часом від $\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot\beta}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot\beta}\right) = m_\beta\left(2\langle\vec{y}''_\beta, \vec{y}'_\beta\rangle\dot\beta^2 + \left\|\vec{y}'_\beta\right\|^2\ddot\beta\right). \tag{11}$$

Підставляючи (6)–(11) в (5), отримуємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = e^{\lambda t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \alpha}\right) = e^{\lambda t}\left(m_\alpha \langle \vec{x}''_\alpha, \vec{x}'_\alpha\rangle \dot{\alpha}^2 + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{y}-\vec{x}, \vec{x}'_\alpha\rangle\right), \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = e^{\lambda t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \beta}\right) = e^{\lambda t}\left(m_\beta \langle \vec{y}''_\beta, \vec{y}'_\beta\rangle \dot{\beta}^2 - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{y}-\vec{x}, \vec{y}'_\beta\rangle\right), \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = e^{\lambda t}\dfrac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\alpha}} = e^{\lambda t} m_\alpha \left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2 \dot{\alpha}, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} = e^{\lambda t}\dfrac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\beta}} = e^{\lambda t} m_\beta \left\|\vec{y}'_\beta\right\|^2 \dot{\beta}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\dfrac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\alpha}}\right) = e^{\lambda t}\left(\lambda m_\alpha \left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2 \dot{\alpha} + m_\alpha\left(2\langle \vec{x}''_\alpha, \vec{x}'_\alpha\rangle \dot{\alpha}^2 + \left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2 \ddot{\alpha}\right)\right), \\ \dfrac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\dfrac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\beta}}\right) = e^{\lambda t}\left(\lambda m_\beta \left\|\vec{y}'_\beta\right\|^2 \dot{\beta} + m_\beta\left(2\langle \vec{y}''_\beta, \vec{y}'_\beta\rangle \dot{\beta}^2 + \left\|\vec{y}'_\beta\right\|^2 \ddot{\beta}\right)\right). \end{cases} \tag{12}$$

Отже, підставляючи перше, третє та п'яте рівняння з (12) в (4), отримуємо

$$e^{\lambda t}\left(\lambda m_\alpha \left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2 \dot{\alpha} + m_\alpha\left(2\langle \vec{x}''_\alpha, \vec{x}'_\alpha\rangle \dot{\alpha}^2 + \left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2 \ddot{\alpha}\right)\right) - \\ - e^{\lambda t}\left(m_\alpha \langle \vec{x}''_\alpha, \vec{x}'_\alpha\rangle \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{y}-\vec{x}, \vec{x}'_\alpha\rangle\right) = 0.$$

Скоротивши на $e^{\lambda t}$, приходимо до рівняння

$$\lambda m_\alpha \left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2 \dot{\alpha} + m_\alpha \langle \vec{x}''_\alpha, \vec{x}'_\alpha\rangle \dot{\alpha}^2 + m_\alpha \left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2 \ddot{\alpha} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{y}-\vec{x}, \vec{x}'_\alpha\rangle = 0.$$

Аналогічно, підставляючи друге, четверте, шосте рівняння з (12) в (4) та скорочуючи на $e^{\lambda t}$, маємо

$$\lambda m_\beta \left\|\vec{y}'_\beta\right\|^2 \dot{\beta} + m_\beta \langle \vec{y}''_\beta, \vec{y}'_\beta\rangle \dot{\beta}^2 + m_\beta \left\|\vec{y}'_\beta\right\|^2 \ddot{\beta} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{y}-\vec{x}, \vec{y}'_\beta\rangle = 0.$$

Отримуємо рівняння Лагранжа руху частинок на кривих

$$\begin{cases} m_\alpha \left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2 \ddot{\alpha} + \lambda m_\alpha \left\|\vec{x}'_\alpha\right\|^2 \dot{\alpha} + m_\alpha \langle \vec{x}''_\alpha, \vec{x}'_\alpha\rangle \dot{\alpha}^2 - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{y}-\vec{x}, \vec{x}'_\alpha\rangle = 0, \\ m_\beta \left\|\vec{y}'_\beta\right\|^2 \ddot{\beta} + \lambda m_\beta \left\|\vec{y}'_\beta\right\|^2 \dot{\beta} + m_\beta \langle \vec{y}''_\beta, \vec{y}'_\beta\rangle \dot{\beta}^2 + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{y}-\vec{x}, \vec{y}'_\beta\rangle = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Зауваження 2. Частинний випадок системи (13) отримано в [10]. У цитованій роботі розглядалась система двох точкових зарядів (різних знаків), які рухались вздовж кривих під дією сили Кулона та сили тертя, що пропорційна швидкості.

5. Гамільтонів формалізм

Побудуємо рівняння Гамільтона руху системи частинок. Функцію Гамільтона отримаємо з перетворення Лежандра за класичною схемою [12,13]

$$\mathcal{H}_0 = \left. \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}_0(q, \dot{q}) \right) \right|_{\dot{q}=\dot{q}(p,q)} . \tag{14}$$

При побудові функції Гамільтона змінні q, p розглядаємо як незалежні. Покладемо

$$\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\alpha}} = m_\alpha \left\| \vec{x}'_\alpha \right\|^2 \dot{\alpha}, \\ p_\beta = \dfrac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\beta}} = m_\beta \left\| \vec{y}'_\beta \right\|^2 \dot{\beta}. \end{cases} \tag{15}$$

Перепишемо (15) інакше, розв'язавши співвідношення відносно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \left\| \vec{x}'_\alpha \right\|^{-2} \dfrac{p_\alpha}{m_\alpha}, \\ \dot{\beta} = \left\| \vec{y}'_\beta \right\|^{-2} \dfrac{p_\beta}{m_\beta}. \end{cases} \tag{16}$$

Підставляючи (16) в (14), маємо

$$\mathcal{H}_0(\alpha, p_\alpha; \beta, p_\beta) = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} \left\| \vec{x}'_\alpha \right\|^{-2} + \frac{p_\beta^2}{2m_\beta} \left\| \vec{y}'_\beta \right\|^{-2} + U(r). \tag{17}$$

У (17) від параметра α залежить перший та третій доданок. Маємо

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\left\| \vec{x}'_\alpha \right\|^{-2} \right) = \frac{-\dfrac{\partial}{\partial \alpha} \langle \vec{x}'_\alpha, \vec{x}'_\alpha \rangle}{\left\| \vec{x}'_\alpha \right\|^4} = -2 \frac{\langle \vec{x}'_\alpha, \vec{x}''_\alpha \rangle}{\left\| \vec{x}'_\alpha \right\|^4},$$

$$\frac{\partial U(r)}{\partial \alpha} = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}'_\alpha \rangle.$$

Рівняння системи Гамільтона для p_α має вигляд

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \alpha} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} \left\| \vec{x}'_\alpha \right\|^{-2} + \frac{p_\beta^2}{2m_\beta} \left\| \vec{y}'_\beta \right\|^{-2} + U(r) \right) =$$

$$= \frac{p_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{\langle \vec{x}'_\alpha, \vec{x}''_\alpha \rangle}{\left\| \vec{x}'_\alpha \right\|^4} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}'_\alpha \rangle. \tag{18}$$

Аналогічно для p_β маємо

$$\dot{p}_\beta = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \beta} = \frac{p_\beta^2}{m_\beta} \frac{\langle \vec{y}'_\beta, \vec{y}''_\beta \rangle}{\left\| \vec{y}'_\beta \right\|^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{y}'_\beta \rangle. \tag{19}$$

Виводимо функцію Гамільтона з дисипацією з (14), де

$$\begin{cases} P_\alpha = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = e^{\lambda t} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\alpha}} = e^{\lambda t} p_\alpha, \\ \dot{Q}_\alpha = \dot{q}_\alpha, \\ \mathcal{L} = e^{\lambda t} \mathcal{L}_0. \end{cases} \tag{20}$$

Отже,

$$\mathcal{H}(\alpha, p_\alpha; \beta, p_\beta; t) = e^{\lambda t}\mathcal{H}_0(\alpha, p_\alpha; \beta, p_\beta), \tag{21}$$

$$\dot{P}_\alpha = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}p_\alpha\right) = e^{\lambda t}\left(\dot{p}_\alpha + \lambda p_\alpha\right). \tag{22}$$

Рівняння Гамільтона для P_α відповідно до

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} = -e^{\lambda t}\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \alpha}$$

мають вигляд

$$e^{\lambda t}\left(\dot{p}_\alpha + \lambda p_\alpha\right) = e^{\lambda t}\left(\frac{p_\alpha^2}{m_\alpha}\frac{\langle \vec{x}_\alpha', \vec{x}_\alpha''\rangle}{\|\vec{x}_\alpha'\|^4} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}_\alpha'\rangle\right). \tag{23}$$

Аналогічно отримуємо

$$e^{\lambda t}\left(\dot{p}_\beta + \lambda p_\beta\right) = e^{\lambda t}\left(\frac{p_\beta^2}{m_\beta}\frac{\langle \vec{y}_\beta', \vec{y}_\beta''\rangle}{\|\vec{y}_\beta'\|^4} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{y}_\beta'\rangle\right). \tag{24}$$

Скорочуючи в (23) та (24) на $e^{\lambda t}$, отримуємо

$$\begin{cases} \dot{p}_\alpha = \dfrac{p_\alpha^2}{m_\alpha}\dfrac{\langle \vec{x}_\alpha', \vec{x}_\alpha''\rangle}{\|\vec{x}_\alpha'\|^4} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}_\alpha'\rangle - \lambda p_\alpha, \\ \dot{p}_\beta = \dfrac{p_\beta^2}{m_\beta}\dfrac{\langle \vec{y}_\beta', \vec{y}_\beta''\rangle}{\|\vec{y}_\beta'\|^4} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{y}_\beta'\rangle - \lambda p_\beta. \end{cases} \tag{25}$$

Об'єднуючи (16) та (25), приходимо до такої системи Гамільтона

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \dfrac{1}{\|\vec{x}_\alpha'\|^2}\dfrac{p_\alpha}{m_\alpha}, \\ \dot{\beta} = \dfrac{1}{\|\vec{y}_\beta'\|^2}\dfrac{p_\beta}{m_\beta}, \\ \dot{p}_\alpha = \dfrac{p_\alpha^2}{m_\alpha}\dfrac{\langle \vec{x}_\alpha', \vec{x}_\alpha''\rangle}{\|\vec{x}_\alpha'\|^4} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{r}, \vec{x}_\alpha'\rangle - \lambda p_\alpha, \\ \dot{p}_\beta = \dfrac{p_\beta^2}{m_\beta}\dfrac{\langle \vec{y}_\beta', \vec{y}_\beta''\rangle}{\|\vec{y}_\beta'\|^4} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{r}, \vec{y}_\beta'\rangle - \lambda p_\beta. \end{cases} \tag{26}$$

Зауваження 3. У випадку ньютонівського потенціалу $U(r) = \dfrac{q^2}{r}$ система звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (26) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \dfrac{1}{\|\vec{x}_\alpha'\|^2}\dfrac{p_\alpha}{m_\alpha}, \\ \dot{\beta} = \dfrac{1}{\|\vec{y}_\beta'\|^2}\dfrac{p_\beta}{m_\beta}, \\ \dot{p}_\alpha = \dfrac{p_\alpha^2}{m_\alpha}\dfrac{\langle \vec{x}_\alpha', \vec{x}_\alpha''\rangle}{\|\vec{x}_\alpha'\|^4} - \dfrac{q^2}{r^3}\langle \vec{r}, \vec{x}_\alpha'\rangle - \lambda p_\alpha, \\ \dot{p}_\beta = \dfrac{p_\beta^2}{m_\beta}\dfrac{\langle \vec{y}_\beta', \vec{y}_\beta''\rangle}{\|\vec{y}_\beta'\|^4} + \dfrac{q^2}{r^3}\langle \vec{r}, \vec{y}_\beta'\rangle - \lambda p_\beta. \end{cases}$$

6. Заключні зауваження

У роботі розглянуто метод пошуку найближчих пар на двох гладких кривих у тривимірному евклідовому просторі, який використовує модель фізичної взаємодії системи матеріальних точок із заданою потенціальною енергією. Одержано рівняння Лагранжа та Гамільтона руху точок, наближене інтегрування яких дає алгоритми апроксимації найближчої пари. Для заданих параметрично кривих

$$\vec{x}(\alpha) = (x_1(\alpha), x_2(\alpha), x_3(\alpha)) \quad \text{та} \quad \vec{y}(\beta) = (y_1(\beta), y_2(\beta), y_3(\beta))$$

відповідні рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} m_\alpha \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \ddot{\alpha} + \lambda m_\alpha \|\vec{x}'_\alpha\|^2 \dot{\alpha} + m_\alpha \langle \vec{x}''_\alpha, \vec{x}'_\alpha \rangle \dot{\alpha}^2 - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{x}'_\alpha \rangle = 0, \\ m_\beta \left\|\vec{y}'_\beta\right\|^2 \ddot{\beta} + \lambda m_\beta \left\|\vec{y}'_\beta\right\|^2 \dot{\beta} + m_\beta \langle \vec{y}''_\beta, \vec{y}'_\beta \rangle \dot{\beta}^2 + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{y} - \vec{x}, \vec{y}'_\beta \rangle = 0 \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \dfrac{1}{\|\vec{x}'_\alpha\|^2}\dfrac{p_\alpha}{m_\alpha}, \\ \dot{\beta} = \dfrac{1}{\|\vec{y}'_\beta\|^2}\dfrac{p_\beta}{m_\beta}, \\ \dot{p}_\alpha = \dfrac{p_\alpha^2}{m_\alpha}\dfrac{\langle \vec{x}'_\alpha, \vec{x}''_\alpha \rangle}{\|\vec{x}'_\alpha\|^4} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{r}, \vec{x}'_\alpha \rangle - \lambda p_\alpha, \\ \dot{p}_\beta = \dfrac{p_\beta^2}{m_\beta}\dfrac{\langle \vec{y}'_\beta, \vec{y}''_\beta \rangle}{\|\vec{y}'_\beta\|^4} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}\langle \vec{r}, \vec{y}'_\beta \rangle - \lambda p_\beta, \end{cases}$$

де m_α, m_β, λ — додатні параметри, $r = \|\vec{y}(\beta) - \vec{x}(\alpha)\|$, $U = U(r)$ — потенціальна енергія взаємодії.

Результати обчислювальних експериментів та деякі узагальнення будуть представлені найближчим часом в іншій публікації. Зауважимо, що у загальній ситуації найближча пара не єдина, тому отриманий розв'язок буде залежати від початкових умов.

Можна узагальнити запропонований формалізм. Цікаво розглянути подібну динаміку для обчислення відстані між кривою та поверхнею або між двома поверхнями. Можна піти ще далі та узагальнити цей формалізм для евклідових просторів довільної розмірності.

Робота виконана за фінансової підтримки МОН України (проект „Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології“, 0116U004777) та Державного фонду фундаментальних досліджень (грант Президента України, проект F74/24921).

Література

1. Gilbert E., Johnson D. W., Keerthi S. S. A fast procedure for computing the distance between complex objects in three-dimensional space // IEEE Journal of Robotics and Automation. — 1988. — 4. — P. 193–203.

2. Gilbert E. G., Foo C.-P. Computing the distance between general convex objects in three-dimensionai space // IEEE Transactions on Robotics and Automation. — 1990. — 6 (1). — P. 53—61.
3. Llanas B., Fernandez de Sevilla M., Feliu V. An Iterative Algorithm for Finding a Nearest Pair of Points in Two Convex Subsets of $\mathbb{R}^n$ // Computers and Mathematics with Applications. — 2000. — 40. — P. 971–983.
4. Lin A., Han S.-P. On the distance between two ellipsoids // SIAM J. on Optimization. — 2002. — 13. — P. 298–308.
5. Bauschke H. H., Combettes P. L., Luke D. R. Finding best approximation pairs relative to two closed convex sets in Hilbert spaces // Journal of Approximation Theory. — 2004. — 127. — P. 178–192.
6. Утешев А. Ю., Яшина М. В. Нахождение расстояния от эллипсоида до плоскости и квадрики в $\mathbb{R}^n$ // Доклады РАН. — 2008. — Т. 419, № 4. — С. 471–474.
7. Malitsky Yu. Douglas-Rachford algorithm for best approximation pair // VII Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» імені академіка І. І. Ляшка. Матеріали конференції. — Київ, 2014. — С. 123.
8. Abbasov M. E. Charged balls method for finding the minimum distance between two plane convex smooth curves in three-dimensional space // VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Moscow, October 17–22, 2016: Proceedings: Vol. I. — M.: MAKS Press, 2016. — P. 12–13.
9. Аббасов М. Э. Метод заряженных шариков // Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть 1. Под ред. проф. В. Н. Малозёмова. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. — С. 278–289.
10. Аббасов М. Э. Нахождение минимального расстояния между двумя гладкими кривыми в трёхмерном пространстве // Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть 1. Под ред. проф. В. Н. Малозёмова. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. — С. 290–296.
11. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. — Москва: ЛЕНАНД, 2014. — 392 с.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Электродинамика. — Москва: Наука, 1969. — 272 с.
13. Казаков К. А. Введение в теоретическую и квантовую механику. — Москва: МГУ, 2008. — 231 с.

Надійшла 10.06.2017