Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2016, №3(123) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

MSC 90C25

A NEW ALGORITHM WITH BREGMAN DISTANCE FOR SOLVING EQUILIBRIUM PROBLEM

M. V. Vartuzova[1], V. V. Semenov[1], L. M. Chabak[2]

[1]Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko Kiev National University, Kiev, Ukraine, E-mail: vartuzova.m@gmail.com, volodya.semenov@gmail.com.

[2]Faculty of Transport Economics, Kiev State Maritime Academy named after hetman Petro Konashevich–Sahaydachniy, Kiev, Ukraine, E-mail: lyu_bov1@mail.ru.

НОВЫЙ АЛГОРИТМ С РАССТОЯНИЕМ БРЭГМАНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ

М. В. Вартузова[1], В. В. Семёнов[1], Л. М. Чабак[2]

[1]Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: vartuzova.m@gmail.com, volodya.semenov@gmail.com.

[2]Киевская государственная академия водного транспорта имени гетмана Петра Конашевича–Сагайдачного, Киев, Украина, E-mail: lyu_bov1@mail.ru.

Abstract. We propose a new iterative method of solving the problem of equilibrium programming (Ky Fan inequality, equilibrium problem) in finite-dimensional space. Recently developed Vedel-Semenov iterative two-phase proximal method is modified by using Bregman distance. Bregman distance enables effective use of the geometry of the feasible set of problem in some important cases. For example, the Kullback-Leibler divergence for simplex of mixed strategies in matrix or bimatrix games. The analysis of the convergence of the method is based on the assumption that the solution of equilibrium problem exists and the bifunction is pseudo-monotone and Lipschitz-type.
Keywords: Bregman distance, equilibrium problem, variational inequality, two-phase method, convex minimization, bifunction, pseudo-monotonicity, Lipschitz condition, convergence.

Резюме. В работе предложен и исследован новый итерационный метод решения задачи о равновесии в конечномерном пространстве. С использованием расстояния Брэгмана модифицирован двухэтапный проксимальный алгоритм, недавно разработанный Я. И. Ведель и В. В. Семёновым. Расстояние Брэгмана позволяет в некоторых случаях эффективно учесть геометрию допустимого множества задачи. Анализ сходимости метода проведен в предположении о существовании решения задачи о равновесии и при условиях псевдомонотонности и липшицевости бифункции.
Ключевые слова: расстояние Брэгмана, задача о равновесии,

вариационное неравенство, двухэтапный алгоритм, выпуклая минимизация, бифункция, псевдомонотонность, липшицевость, сходимость.

1. Введение

Важным и популярным направлением современного прикладного нелинейного анализа является исследование задач о равновесии (неравенств Ки Фаня, задач равновесного программирования) вида [1]

$$\text{найти } \ x \in C: \ F(x,y) \geq 0 \ \ \forall\, y \in C, \tag{1}$$

где C — подмножество пространства $\mathbb{R}^d$, $F : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — бифункция. В виде (1) можно сформулировать задачи математического программирования, вариационные неравенства, игровые задачи и поиск неподвижных точек [1, 2, 3, 4, 5]. Приведем две типичные формулировки.

(1) Если $F(x,y) = \varphi(y) - \varphi(x)$, где $\varphi : C \to \mathbb{R}$, то задача (1) является задачей условной минимизации
$$\varphi \to \min_C .$$

(2) Пусть I — конечное множество индексов. Для каждого $i \in I$ заданы множество C_i и функция $\varphi_i : C \to \mathbb{R}$, где $C = \prod_{i\in I} C_i$. Для $x = (x_i)_{i\in I} \in C$ обозначим $x^i = (x_j)_{j\in I, j\neq i}$. Точку $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i\in I}$ называют равновесием Нэша, если для всех $i \in I$ выполняются неравенства
$$\varphi_i(\bar{x}) \leq \varphi_i(\bar{x}^i, y_i) \ \ \forall\, y_i \in C_i.$$
Определим функцию $F : C \times C \to \mathbb{R}$ следующим образом
$$F(x,y) = \sum_{i\in I} \left(\varphi_i(x^i, y_i) - \varphi_i(x)\right).$$
Точка $\bar{x} \in C$ является равновесием Нэша тогда и только тогда, когда она является решением задачи (1).

Алгоритмам решения равновесных и близких задач посвящено большое количество работ, например, [3, 5–13, 30]. В методах, рассмотренных в работах [5, 14, 15, 16], на каждом шаге решаются вспомогательные равновесные задачи с сильно монотонными бифункциями. Частным случаем задач о равновесии являются вариационные неравенства. Для их решения Г. М. Корпелевич предложила экстраградиентный метод [17]. Обобщению и исследованию этого алгоритма посвящено большое количество публикаций [18–20]. Отметим работы [21–23] где предложены и исследованы итерационные алгоритмы, в которых на каждом шаге необходимо решать вспомогательные сильно выпуклые задачи минимизации. Данные алгоритмы являются аналогами экстраградиентного метода для задач о равновесии.

В 1980 Л. Д. Попов [24] предложил для поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций, определенных в конечномерном евклидовом пространстве, интересную модификацию метода Эрроу-Гурвица. В недавних работах

[25, 26] предложено несколько модификаций метода Л. Д. Попова для решения вариационных неравенств с монотонными операторами. В статье [27] предложен двухэтапный проксимальный алгоритм для решения задач о равновесии, являющийся адаптацией метода Л. Д. Попова к общим задачам равновесного программирования. В данных методах используется евклидово расстояние и проекция. В некоторых ситуациях предпочтительней применение других расстояний, таких как расстояние Альбера [29, 30] или Брэгмана [31], что позволяет эффективно учесть геометрию допустимого множества.

В работе предложен и исследован новый итерационный метод решения задачи о равновесии. С использованием расстояния Брэгмана модифицирован двухэтапный проксимальный алгоритм [27]. Анализ сходимости метода проведен в предположении о существовании решения и при условиях псевдомонотонности и липшицевости бифункции.

Опишем кратко структуру статьи. В следующем пункте сформулирована задача о равновесии и приведены необходимые теоретические сведения. Далее приведены основные сведения о расстоянии Брэгмана и описан предлагаемый итерационный метод. Четвертый пункт посвящен доказательству сходимости. В последний, пятый, пункт вынесены заключительные замечания.

2. Задача о равновесии

Для непустого выпуклого замкнутого множества $C \subseteq \mathbb{R}^d$ и бифункции $F : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ рассмотрим задачу о равновесии:

$$\text{найти} \;\; x \in C: \;\; F(x,y) \geq 0 \;\; \forall\, y \in C, \tag{2}$$

где $F(y,y) = 0$ для всех $y \in C$.

Рассмотрим так называемую дуальную (для задачи (2)) задачу о равновесии [7]:

$$\text{найти} \;\; x \in C: \;\; F(y,x) \leq 0 \;\; \forall\, y \in C. \tag{3}$$

Множества решений задач (2) и (3) обозначим S и S^*. Теоремы об условиях, гарантирующих непустоту множеств S и S^*, можно найти в [1, 2, 3, 32]. Множество S^* выпуклое и замкнутое в случае, когда функции $F(x,\cdot)$ выпуклые и замкнутые (полунепрерывны снизу) на C, поскольку

$$S^* = \bigcap_{y \in C} L(y),$$

где $L(y) = \{x \in C: \; F(y,x) \leq 0\}$. Множество S вообще может и не быть выпуклым. Однако, если функции $F(x,\cdot)$ выпуклые и замкнутые на C, а функции $F(\cdot,y)$ полунепрерывны сверху на C, то множество S выпуклое и $S^* \subseteq S$. Кроме того, если бифункция F псевдомонотонна[1], то $S = S^*$ [7].

В дальнейшем будем предполагать, что $S^* \neq \emptyset$.

[1]Бифункцию F называют псевдомонотонной, если для всех x, $y \in C$ из неравенства $F(x,y) \geq 0$ следует $F(y,x) \leq 0$.

3. Расстояние Брэгмана и алгоритм

Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма (не обязательно евклидова), а $(\cdot,\cdot)$ — стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^d$. Пусть $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая и сильно выпуклая (с параметром $\sigma > 0$ относительно нормы $\|\cdot\|$[2]) на выпуклом множестве $O \supseteq C$ функция. Расстояние Брэгмана (ассоциированное с функцией g) [31] на множестве O определяется соотношением

$$D(a,b) = g(a) - g(b) - (\nabla g(b), a-b) \quad \forall a,b \in O.$$

При $g(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$, где $\|\cdot\|_2$ — евклидова норма, имеем

$$D(x,y) = \frac{1}{2}\|x-y\|_2^2.$$

Для стандартного симплекса $\Delta_d = \left\{x \in \mathbb{R}^d :\ x_i \geq 0,\ \sum_i x_i = 1\right\}$ и отрицательной энтропии $g(x) = \sum_i x_i \ln x_i$ (она сильно выпукла относительно ℓ_1-нормы на Δ_d) получаем расстояние Кульбака-Лейблера на Δ_d

$$D(x,y) = \sum_i x_i \ln\left(\frac{x_i}{y_i}\right) \quad \forall x,y \in \Delta_d.$$

Имеет место полезное тождество.

Лемма 1 (3-точечное тождество)**.** *Для произвольных a, b и c выполняется тождество*

$$D(a,c) = D(a,b) + D(b,c) + (\nabla g(b) - \nabla g(c), a-b).$$

Из сильной выпуклости g следует оценка

$$D(a,b) \geq \frac{\sigma}{2}\|a-b\|^2. \tag{4}$$

С этого момента будем рассматривать только бифункции F, удовлетворяющие условию: для всех $x \in C$ функция $F(x,\cdot)$ выпукла и замкнута на множестве C. В данном случае задачи

$$F(a,y) + \frac{1}{\lambda}D(y,b) \to \min_{y \in C} \quad (a,b \in C,\ \lambda > 0)$$

всегда имеют единственное решение. Предположим возможность их эффективного решения. Например, это возможно в случае симплекса Δ_d, линейности F по второму аргументу и расстояния Кульбака-Лейблера. Действительно, решение задачи

$$\sum_{i=1}^d a_i x_i + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^d x_i \ln\left(\frac{x_i}{y_i}\right) \to \min_{x \in \Delta_d} \quad (a \in \mathbb{R}^d,\ y \in \Delta_d,\ \lambda > 0)$$

[2]Для функции g имеет место неравенство

$$g(a) - g(b) \geq (\nabla g(b), a-b) + \frac{\sigma}{2}\|a-b\|^2 \quad \forall a,b \in O.$$

имеет вид

$$z_i = \frac{y_i e^{-\lambda a_i}}{\sum_{j=1}^{d} y_j e^{-\lambda a_j}}, \quad i = 1, ..., d.$$

Для приближенного решения задачи о равновесии (2) предлагаем следующий итерационный

Алгоритм 1. Для $x_1, \ y_1 \in C$ генерируем последовательность элементов $x_n, \ y_n \in C$ при помощи итерационной схемы

$$\begin{cases} x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y\in C} \left\{F(y_n, y) + \frac{1}{\lambda} D(y, x_n)\right\}, \\ y_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y\in C} \left\{F(y_n, y) + \frac{1}{\lambda} D(y, x_{n+1})\right\}, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$.

На каждом шаге алгоритма 1 следует решить две выпуклые задачи с сильно выпуклыми функциями. Правило выбора параметра регуляризации λ укажем ниже.

Замечание 1. Если $g(\cdot) = \frac{1}{2}\| \cdot \|_2^2$, то алгоритм 1 принимает вид

$$\begin{cases} x_{n+1} = \mathtt{prox}_{\lambda\cdot F(y_n,\cdot)} x_n, \\ y_{n+1} = \mathtt{prox}_{\lambda\cdot F(y_n,\cdot)} x_{n+1}, \end{cases}$$

где $\mathtt{prox}_g$ — проксимальный оператор [33], ассоциированный с собственной выпуклой замкнутой функцией g

$$H \ni x \mapsto \mathtt{prox}_g x = \operatorname{argmin}_{y\in \operatorname{dom} g} \left(g(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|_2^2 \right) \in \operatorname{dom} g.$$

Двухэтапный проксимальный алгоритм предложен в [27, 28]. В случае вариационного неравенства, то есть, при $F(x, y) = (Ax, y - x)$, он принимает вид

$$\begin{cases} x_1 \in C, \ y_1 \in C, \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \\ y_{n+1} = P_C(x_{n+1} - \lambda A y_n), \end{cases}$$

где P_C — оператор метрического проектирования на множество C. Частный случай этой схемы предложен Л. Д. Поповым [24] для поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций, определенных в конечномерном евклидовом пространстве. В недавних работах Ю. В. Малицкий и В. В. Семёнов [25, 26] доказали сходимость этого алгоритма для неравенств с монотонными и липшицевыми операторами, действующими в бесконечномерном гильбертовом пространстве, а также предложили несколько его модификаций.

Замечание 2. Для вариационных неравенств алгоритм 1 можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 \in C, \ y_1 \in C, \\ x_{n+1} = \Pi_C \left((\nabla g)^{-1} (\nabla g(x_n) - \lambda A y_n) \right), \\ y_{n+1} = \Pi_C \left((\nabla g)^{-1} (\nabla g(x_{n+1}) - \lambda A y_n) \right), \end{cases}$$

где Π_C — оператор проектирования Брэгмана на множество C [31], определяемый правилом

$$\Pi_C x = \operatorname{argmin}_{y \in C} D(y, x).$$

Данный метод разработан в диссертации Ю. В. Малицкого [34].

Перейдем к исследованию алгоритм 1. Прежде всего заметим, что при выполнении для некоторого номера $n \in \mathbb{N}$ равенств

$$x_{n+1} = x_n = y_n \tag{5}$$

имеет место включение $y_n \in S$ и условие стационарности: $y_k = x_k = y_n$ для всех $k \geq n$. Действительно, равенство

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ F(y_n, y) + \frac{1}{\lambda} D(y, x_n) \right\}$$

означает [33], что

$$F(y_n, y) - F(y_n, x_{n+1}) + \frac{(\nabla g(x_{n+1}) - \nabla g(x_n), y - x_{n+1})}{\lambda} \geq 0 \ \ \forall y \in C.$$

Из (5) следует

$$F(y_n, y) \geq 0 \ \ \forall y \in C,$$

то есть, $y_n \in S$.

Учитывая это соображение, практическому варианту алгоритма 1 можно придать следующий вид.

Алгоритм 2. Задаем $x_1 \in C$, $y_1 \in C$, $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$.

1. Для x_n и y_n вычисляем
$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ F(y_n, y) + \frac{1}{\lambda} D(y, x_n) \right\}.$$
2. Если $\max\{\|x_{n+1} - x_n\|, \|y_n - x_n\|\} \leq \varepsilon$, то СТОП[3], иначе вычисляем
$$y_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ F(y_n, y) + \frac{1}{\lambda} D(y, x_{n+1}) \right\}.$$
3. Полагаем $n := n + 1$ и переходим на шаг 1.

Далее будем предполагать, что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ условие (5) не имеет места и перейдем к обоснованию сходимости алгоритма 1.

4. Анализ сходимости

Для доказательства сходимости алгоритма нам потребуются следующие факты.

Лемма 2. *Пусть неотрицательные последовательности (a_n), (b_n) таковы, что*

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

Тогда существует предел $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$.

[3]Естественно, можно использовать условие $\max\{D(x_{n+1}, x_n), D(y_n, x_n)\} \leq \varepsilon$.

Лемма 3. *Элемент $x \in C$ является решением задачи о равновесии (2) тогда и только тогда, когда*

$$F(x,y) + \frac{1}{\lambda} D(y,x) \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{6}$$

где $\lambda > 0$.

Доказательство. Элемент $x \in C$ удовлетворяет (6) тогда и только тогда, когда является решением выпуклой задачи

$$F(x,y) + \frac{1}{\lambda} D(y,x) \to \min_{y \in C},$$

то есть, удовлетворяет неравенству

$$F(x,y) - F(x,x) + \frac{(\nabla g(x) - \nabla g(x), y - x)}{\lambda} = F(x,y) \geq 0 \ \forall y \in C.$$

Таким образом, $x \in S$. □

Анализ сходимости алгоритма начнем с доказательства важного неравенства для последовательностй (x_n) и (y_n), порождаемых алгоритмом 1.

Предположим, что бифункция F удовлетворяет условию: для всех x, y, $z \in C$ имеет место

$$F(x,y) \leq F(x,z) + F(z,y) + a \left\| x - z \right\|^2 + b \left\| z - y \right\|^2,$$

где a, b — положительные константы (липшицевость).

Замечание 3. Условие типа липшицевости введено G. Mastroeni в [6].

Имеет место

Лемма 4. *Для порожденных алгоритмом 1 последовательностей (x_n), (y_n) и элемента $z \in S^*$ выполняется неравенство*

$$\begin{aligned} D(z, x_{n+1}) \leq D(z, x_n) - \left(1 - \frac{2\lambda b}{\sigma}\right) D(x_{n+1}, y_n) - \\ - \left(1 - \frac{4\lambda a}{\sigma}\right) D(y_n, x_n) + \frac{4\lambda a}{\sigma} D(x_n, y_{n-1}). \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Имеем (дважды используя лемму 1)

$$\begin{aligned} D(z, x_{n+1}) = D(z, x_n) - D(x_{n+1}, x_n) + (\nabla g(x_{n+1}) - \nabla g(x_n), x_{n+1} - z) = \\ = D(z, x_n) - D(x_{n+1}, y_n) - D(y_n, x_n) - \\ - (\nabla g(y_n) - \nabla g(x_n), x_{n+1} - y_n) + (\nabla g(x_{n+1}) - \nabla g(x_n), x_{n+1} - z). \end{aligned} \tag{8}$$

Из определения точек x_{n+1} и y_n следует

$$\lambda F(y_n, z) - \lambda F(y_n, x_{n+1}) \geq (\nabla g(x_{n+1}) - \nabla g(x_n), x_{n+1} - z), \tag{9}$$

$$\lambda F(y_{n-1}, x_{n+1}) - \lambda F(y_{n-1}, y_n) \geq -(\nabla g(x_n) - \nabla g(y_n), y_n - x_{n+1}). \tag{10}$$

Использовав неравенства (9), (10) для оценки скалярных произведений в (8), получаем

$$D(z,x_{n+1}) \le D(z,x_n) - D(x_{n+1},y_n) - D(y_n,x_n) + \\ + \lambda \left\{ F(y_n,z) - F(y_n,x_{n+1}) + F(y_{n-1},x_{n+1}) - F(y_{n-1},y_n) \right\}. \quad (11)$$

Из включения $z \in S^*$ следует

$$F(y_n,z) \le 0,$$

а липшицевость F гарантирует выполнение неравенства

$$- F(y_n,x_{n+1}) + F(y_{n-1},x_{n+1}) - F(y_{n-1},y_n) \le \\ \le a \left\| y_{n-1} - y_n \right\|^2 + b \left\| y_n - x_{n+1} \right\|^2.$$

Использовав вышеприведенные оценки в (11), получаем

$$D(z,x_{n+1}) \le D(z,x_n) - D(x_{n+1},y_n) - D(y_n,x_n) + \\ + \lambda a \left\| y_{n-1} - y_n \right\|^2 + \lambda b \left\| y_n - x_{n+1} \right\|^2. \quad (12)$$

Член $\left\| y_{n-1} - y_n \right\|^2$ оценим следующим образом

$$\left\| y_{n-1} - y_n \right\|^2 \le 2 \left\| y_{n-1} - x_n \right\|^2 + 2 \left\| y_n - x_n \right\|^2.$$

Учитывая эту оценку в (12), приходим к неравенству

$$D(z,x_{n+1}) \le D(z,x_n) - D(x_{n+1},y_n) - D(y_n,x_n) + \\ + 2\lambda a \left\| y_{n-1} - x_n \right\|^2 + 2\lambda a \left\| y_n - x_n \right\|^2 + \lambda b \left\| y_n - x_{n+1} \right\|^2. \quad (13)$$

Оценивая в (13) нормы при помощи неравенства (4), получим

$$D(z,x_{n+1}) \le D(z,x_n) - D(x_{n+1},y_n) - D(y_n,x_n) + \\ + \frac{4\lambda a}{\sigma} D(x_n,y_{n-1}) + \frac{4\lambda a}{\sigma} D(y_n,x_n) + \frac{2\lambda b}{\sigma} D(x_{n+1},y_n),$$

а именно, неравенство (7). □

Перейдем непосредственно к доказательству сходимости алгоритма. Дополнительно предположим, что бифункция $F : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ полунепрерывна снизу на $C \times C$ и для всех $y \in C$ функция $F(\cdot, y)$ полунепрерывна сверху на C. Заметим, что при этих условиях $S^* \subseteq S$. Имеет место

Лемма 5. *Пусть* $\lambda \in \left(0, \frac{\sigma}{2(2a+b)}\right)$. *Тогда все предельные точки последовательности* (x_n) *принадлежат множеству* S.

Доказательство. Пусть $z \in S^*$. Положим

$$a_n = D(z,x_n) + \tfrac{4\lambda a}{\sigma} D(x_n,y_{n-1}),$$
$$b_n = \left(1 - \tfrac{4\lambda a}{\sigma}\right) D(y_n,x_n) + \left(1 - \tfrac{4\lambda a}{\sigma} - \tfrac{2\lambda b}{\sigma}\right) D(x_{n+1},y_n).$$

Неравенство леммы 4 принимает вид

$$a_{n+1} \le a_n - b_n.$$

Тогда из леммы 2 можем сделать вывод, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(D(z,x_n)+\frac{4\lambda a}{\sigma}D(x_n,y_{n-1})\right)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{4\lambda a}{\sigma}\right)D(y_n,x_n)+\left(1-\frac{4\lambda a}{\sigma}-\frac{2\lambda b}{\sigma}\right)D(x_{n+1},y_n)\right)=0.$$

Откуда получаем

$$\lim_{n\to\infty}D(y_n,x_n)=\lim_{n\to\infty}D(x_{n+1},y_n)=0 \tag{14}$$

и сходимость числовой последовательности $(D(z,x_n))$ для всех $z\in S^*$. Из (14) следует

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_{n+1}\|=0 \tag{15}$$

и естественно

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{n+1}\|=0.$$

Из неравенства

$$D(z,x_n)\geq\frac{\sigma}{2}\|z-x_n\|^2$$

и (15) следует ограниченность последовательностей (x_n), (y_n).

Рассмотрим подпоследовательность (x_{n_k}), сходящуюся к некоторой точке $\bar z\in C$. Тогда из (15) следует, что $y_{n_k}\to\bar z$ и $x_{n_k+1}\to\bar z$. Покажем, что $\bar z\in S$. Имеем

$$F(y_{n_k},y)+\frac{1}{\lambda}D(y,x_{n_k})\geq F(y_{n_k},x_{n_k+1})+\frac{1}{\lambda}D(x_{n_k+1},x_{n_k})\quad\forall y\in C. \tag{16}$$

Совершив предельный переход в (16), получим

$$F(\bar z,y)+\frac{1}{\lambda}D(y,\bar z)\geq\overline{\lim}_{k\to\infty}\left\{F(y_{n_k},y)+\frac{1}{\lambda}D(y,x_{n_k})\right\}\geq$$

$$\geq\underline{\lim}_{k\to\infty}\left\{F(y_{n_k},x_{n_k+1})+\frac{1}{\lambda}D(x_{n_k+1},x_{n_k})\right\}=F(\bar z,\bar z)=0\quad\forall y\in C.$$

Откуда по лемме 3 следует включение $\bar z\in S$. □

Замечание 4. Имеют место асимптотики

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}n\cdot D(y_n,x_n)=\underline{\lim}_{n\to\infty}n\cdot D(x_{n+1},y_n)=0$$

и

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\|y_n-x_n\|=\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\|x_{n+1}-y_n\|=0.$$

Уточним результат леммы 5.

Лемма 6. *Пусть, дополнительно, $S=S^*$ (например, если бифункция F псевдомонотонна на C). Тогда порожденные алгоритмом 1 последовательности (x_n), (y_n) сходятся к решению $\bar z\in S$ задачи (2).*

Доказательство. Пусть $\bar{z} \in S = S^*$ и $x_{n_k} \to \bar{z}$, $y_{n_k} \to \bar{z}$. Существует предел

$$\lim_{n\to\infty} D(\bar{z}, x_n) = \lim_{n\to\infty} \{g(\bar{z}) - g(x_n) - (\nabla g(x_n), \bar{z} - x_n)\}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} D(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} \{g(y_n) - g(x_n) - (\nabla g(x_n), y_n - x_n)\} = 0.$$

Поскольку $D(\bar{z}, x_{n_k}) \to 0$, то $D(\bar{z}, x_n) \to 0$. Откуда $x_n \to \bar{z}$ и $y_n \to \bar{z}$. □

Суммируя изложенное, сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $C \subseteq \mathbb{R}^d$ — непустое выпуклое замкнутое множество, для бифункции $F : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ выполнены условия*

(1) *$F(x, x) = 0$ для всех $x \in C$;*
(2) *для всех x, $y \in C$ из $F(x, y) \geq 0$ следует $F(y, x) \leq 0$ (псевдомонотонность);*
(3) *$F : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ полунепрерывна снизу на $C \times C$;*
(4) *для всех $x \in C$ функция $F(x, \cdot)$ выпукла на C;*
(5) *для всех $y \in C$ функция $F(\cdot, y)$ полунепрерывна сверху на C;*
(6) *для всех x, y, $z \in C$ имеет место*

$$F(x, y) \leq F(x, z) + F(z, y) + a \|x - z\|^2 + b \|z - y\|^2 ,$$

где a, b — положительные константы (липшицевость).

Предположим, что $S \neq \emptyset$ и $\lambda \in \left(0, \frac{\sigma}{2(2a+b)}\right)$. Тогда порожденные алгоритмом 1 последовательности (x_n), (y_n) сходятся к решению $\bar{z} \in S$ задачи о равновесии (2).

5. Заключительные замечания

В работе предложен и исследован новый итерационный метод решения задачи равновесного программирования. Метод является развитием (с использованием метрики Брэгмана вместо евклидовой) двухэтапного проксимального алгоритма [27, 28]. Алгоритм [27, 28] в свою очередь появился как адаптация к общим задачам равновесного программирования метода Л. Д. Попова [24, 25] поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций. Расстояние Брэгмана позволяет в некоторых случаях эффективно учесть геометрию допустимого множества. Анализ сходимости метода проведен в предположении о существовании решения и при условиях псевдомонотонности и липшицевости бифункции.

В одной из ближайших работ будет рассмотрен следующий регуляризованный вариант метода

$$\begin{cases} x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y\in C} \left\{F(y_n, y) + \frac{1}{\lambda} D\left(y, (1 - \alpha_n)\, x_n\right)\right\}, \\ y_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y\in C} \left\{F(y_n, y) + \frac{1}{\lambda} D\left(y, (1 - \alpha_{n+1})\, x_{n+1}\right)\right\}, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$, (α_n) — бесконечно малая последовательность положительных чисел. Большой интерес представляет возможность использования расстояния Брэгмана в схемах расщепления для решения вариационных неравенств [35–39] и в алгоритмах решения двухуровневых задач [40–43]. Также запланировано детальное теоретическое и экспериментальное изучение вариантов метода для поиска равновесий Нэша в биматричных играх с использованием расстояния Кульбака-Лейблера. Еще одно перспективное направление заключается в развитии идей алгоритма 1 для решения стохастических задач равновесного программирования.

Работа В. В. Семёнова выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (проект „Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології", 0116U004777).

Литература

1. Blum E., Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems // The Mathematics Student. — 1994. — 63. — P. 127–149.
2. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. — Москва: Наука, 1988. — 448 с.
3. Konnov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 2001. — xi + 181 p.
4. Giannessi F., Maugeri A., Pardalos P. M. Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Models. — New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004. — 300 p.
5. Combettes P. L., Hirstoaga S. A. Equilibrium Programming in Hilbert Spaces // J. Nonlinear Convex Anal. — 2005. — 6. — P. 117–136.
6. Mastroeni G. On auxiliary principle for equilibrium problems // Publicatione del Dep. di Mathematica Dell'Universita di Pisa. — 2000. — 3. — P. 1244–1258.
7. Konnov I. V. Application of the proximal point method to nonmonotone equilibrium problems // J. Optim. Theory Appl. — 2003. — 119. — P. 317–333.
8. Konnov I. V., Schaible S., Yao J. C. Combined relaxation method for mixed equilibrium problems // J. Optim. Theory Appl. — 2005. — 126. — P. 309–322.
9. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // In: M. Z. Zgurovsky and V. A. Sadovnichiy (eds.), Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications, Volume 211, Springer International Publishing Switzerland, 2014. — P. 131–146.
10. Semenov V. V. Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — Vol. 50, № 5. — P. 741–749.
11. Semenov V. V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — Vol. 46, № 5. — P. 45–56.
12. Lyashko S. I., Semenov V. V. On a theorem of M. A. Krasnoselski // Cybernetics and Systems Analysis. — 2010. — Vol. 46, № 6. — P. 1021–1024.
13. Семенов В. В. Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №1 (111). — С. 46–56.

14. Маліцький Ю. В., Семенов В. В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №3 (102). — С. 79–88.
15. Денисов С. В. Параллельная схема декомпозиции для поиска седловой точки и равновесия Нэша // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №3 (102). — С. 40–48.
16. Чабак Л. М. Про один сильно збіжний метод розв'язання задачі рівноважного програмування // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2014. — №1 (115). — С. 67–75.
17. Корпелевич Г. М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. — 1976. — № 4. – С. 747–756.
18. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — Vol. 47, № 4. — P. 631–639.
19. Denisov S. V., Semenov V. V., Chabak L. M. Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — Vol. 51, № 5. — P. 757–765.
20. Verlan D. A., Semenov V. V., Chabak L. M. A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2015. — Vol. 47, № 7. — P. 31–46.
21. Антипин А. С. Равновесное программирование: проксимальные методы // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1997. — 37, № 11. — С. 1327–1339.
22. Tran D. Q., M. Le Dung, Nguyen V. H. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems // Optimization. — 2008. — Vol. 57, № 6. — P. 749–776.
23. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №1 (104). — С. 10–23.
24. Попов Л. Д. Модификация метода Эрроу-Гурвица поиска седловых точек // Математические заметки. — 1980. — Т. 28, № 5. — С. 777–784.
25. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — Vol. 50, № 2. — P. 271–277.
26. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2015. — Volume 61, Issue 1. — P. 193–202.
27. Ведель Я. И., Семенов В. В. Новый двухэтапный проксимальный алгоритм для решения задачи о равновесии // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2015. — №1 (118). — С. 15–23.
28. Lyashko S. I., Semenov V. V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming // In: Optimization and Applications in Control and Data Sciences (ed. B.Goldengorin), Optimization and Its Applications, Volume 115, Springer, 2016. — P. 315–325.
29. Alber Y. I. Metric and generalized projection operators in Banach space: properties and applications // In: Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, A. G. Katrosatos (ed.), Marcel Dekker, New York, 1996. — P. 15–50.

30. Семенов В. В. Об одной принципиальной схеме вычисления обобщенной проекции // Доповіді НАН України. — 2013. — №6. — С. 41–46.
31. Брэгман Л. М. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1967. — №3. — С. 620–631.
32. Iusem A. N., Kassay G., Sosa W. On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems // Math. Program., Ser. B. — 2009. — 116. — P. 259–273.
33. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. — Springer, 2011. — 408 + xvi p.
34. Маліцький Ю. В. Ефективні проективні методи для варіаційних нерівностей та задач структурної оптимізації. Автореферат дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02. — Київ, 2015. — 20 с.
35. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — Vol. 42, № 4. — P. 14–18.
36. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №2 (108). — С. 53–58.
37. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция операторных включений с максимальными монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №2 (112). — С. 155–160.
38. Семенов В. В. Явный алгоритм расщепления для вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №2 (112). — С. 42–52.
39. Ляшко Н. И., Семенов В. В., Чабак Л. М. Алгоритм расщепления для вариационных неравенств с максимальными монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2014. — №3 (117). — С. 131–139.
40. Войтова Т. А., Семенов В. В. Метод решения двухэтапных операторных включений // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №3 (102). — С. 34–39.
41. Денисов С. В., Семенов В. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №3 (106). — С. 27–32.
42. Апостол Р. Я., Гриненко А. А., Семенов В. В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №1 (107). — С. 3–14.
43. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації // Доповіді НАН України. — 2012. — №2. — С. 56–62.

Поступила 14.07.2016