Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня бакалавра

за спеціальністю 113 Прикладна математика
на тему:

Ідентифікація точкових джерел для параболічного рівняння

Виконав студент 4-го курсу
Шиманович Владислав Віталійович ________________

Науковий керівник:
кандидат фіз.-мат. наук
Оноцький В'ячеслав Валерійович ________________

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань

Студент ________________

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні кафедри обчислювальної математики

«____» ____________________ 2022 р.,

протокол № ____

Завідувач кафедри
С. І. Ляшко ________________

Київ – 2022

Реферат

Обсяг роботи: 18 сторінок, 5 джерел посилання, 1 додаток.

Ключові слова: ДС-АЛГОРИТМ, ІДЕНТИФІКАЦІЯ, ТОЧКОВЕ ДЖЕРЕЛО.

Об'єкт дослідження: задача ідентифікації точковнх джерел для параболічного рівняння другого порядку.

Мета роботи: розв'язати задачу за невідомої кількості джерел .

Результати: запропоновано підхід до розв'язання даної задачі, побудовано алгоритм знаходження інтенсивностей, зроблено його дискретизацію.

Зміст

1 Вступ **4**

2 Постановка задачі та алгоритм розв'язання **5**

2.1 Визначення інтенсивностей джерел при відомих координатах . . . 5

2.2 Визначення інтенсивностей джерел при відомій їхній кількості та невідомих координатах 7

2.3 Знаходження джерел при невідомій їхній кількості 9

3 ДС-алгоритм для розв'язання задачі ідентифікації **11**

3.1 Чисельне моделювання при відомих координатах 11

3.2 Чисельне моделювання при відомій кількості та невідомих координатах 12

3.3 Чисельне моделювання при невідомій кількості 13

4 Висновки **15**

5 Додатки **17**

5.1 Код програми для обчислювального експерименту 17

1 Вступ

В останнє десятиліття проблеми екології, а саме: викиди з заводів, раптові викиди небезпечних забруднюючих речовин почали привертати все більшу увагу. Такі інциденти можуть становити серйозну загрозу здоров'ю людей та екології. Тому для оцінки надзвичайних ситуацій дуже важливо швидко та точно визначити характеристики (розташування, кількість та інтенсивність) джерел забруднюючих речовин, що є ключовим фактором у вдосконаленні навичок прогнозування розсіювання забруднюючих речовин.

У даній роботі пропонується алгоритм визначення джерел забруднення за обмеженою кількістю вимірювань, коли кількість джерел невідома, а також метод чисельного розв'язку на основі ДС-алгоритму. Для підтвердження ефективності алгоритму було розроблено його програмну реалізацію.

2 Постановка задачі та алгоритм розв'язання

Розглядається задача відновлення точковнх джерел для параболічного рівняння другого порядку, що є оберненою до задачі знаходження стану системи

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{2} c_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+a(x)u=-\sum_{\beta=1}^{p} \delta\left(x-r^\beta\right) q^\beta(t)$$

$$\Omega=\left\{x=(x_1,x_2) \mid 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha=1,2\right\}, \quad k_\alpha(x) \geq k_0>0, \alpha=1,2; \quad c=(c_1,c_2) \tag{1}$$

Тут $r^\beta-$ координати джерел, $q^\beta(t)-$ потужності, $\beta=\overline{1,p}$. У початковий момент часу також відоме значення розв'язку в області Ω

$$u(x,0)=g(x), x \in \Omega \tag{2}$$

У кожен момент часу $t \in [0,T]$ відомнй стан системи на границі області

$$u(x,t)=0, x \in \partial\Omega \tag{3}$$

Вважаємо відомими вимірювання $\varphi_j(t), j=\overline{1,J}$ функції $u(x,t)$ в деякнх окремнх точках z_j області Ω

$$u\left(z_j,t\right)=\varphi_j(t), 0 \leq t \leq T, j=\overline{1,J} \tag{4}$$

У такій постановці виникає ускладнення, у зв'язку з тим, що єдиність розв'язку задачі 1 доведено лише для простору $L_2(\Omega)$, тому замість 4 надалі використовуємо умову

$$\tilde{u}\left(z_j,t\right)=\varphi_j(t), \quad 0 \leq t \leq T, j=\overline{1,J}, \tag{5}$$

де $\tilde{u}\left(z_j,t\right) \equiv \int_{\sigma_j} u(x,t)dx / \int_{\sigma_z} dx.$ - усереднення $u(x,t)$ в деякому околі σ_j точкн z_j [2, 3]

Задача ідентифікації полягає у визначенні невідомих параметрів точковнх джерел, а саме інтенсивностей $q^\beta(t)$ та координат r^β за додатковнми спостереженнями 4 у деякнх точках області.

2.1 Визначення інтенсивностей джерел при відомих координатах

Наведемо схему розв'язання задачі ідентифікації на основі варіаційного підходу, запропонованого в роботі [4].
Перепишемо рівняння 1 у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{2} c_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+a(x)u=F(x)V(t) \tag{6}$$

де $V(t) = \left\{V^1(t), V^2(t), \dots, V^p(t)\right\}$ – вектор керування системою,

$F(x) = \left\{\delta\left(x - r^1\right), \delta\left(x - r^2\right), \dots, \delta\left(x - r^p\right)\right\}$ – вектор δ-функцій,

$x \in \Omega \subseteq R^2, 0 < t \leq T$

Ця математична модель доповнюється граничними та початковими умовами 2, 3.

Нехай $H_V = \left\{V(t) \mid V(t) = \left\{V^\beta(t)\right\}, V^\beta(t) \in L_2(0,T)\right\}$ – гільбертів простір зі скалярним добутком

$$\langle V, W\rangle = \sum_{\beta=1}^{p} \int_0^T V_\beta(t) W_\beta(t) dt$$

і нормою

$$\|V\|_p = \langle V, V\rangle^{1/2}.$$

Оптимальне керування $V^*(t)$ системою 6, 3, 4 шукаємо з умови мінімуму функціонала

$$\mathcal{I}_\alpha(V) = \sum_{j=1}^{J} \int_0^T \left(\tilde{u}\left(z_j, t; V\right) - \varphi_j(t)\right)^2 dt + \alpha\|V\|_p^2 \underset{V}{\longrightarrow} \min \tag{7}$$

де α - параметр регуляризації, якнй внбирається, спираючись на похнбки спостережень [5].
Розв'язком задачі 6, 3, 4, 7 вважаємо пару $\left(u(x,t) = u\left(x, V^*; t\right), V^*(t)\right)$

Нехай вектор-функція $\vec{\varphi}(t) \in \left[L_2(\Omega)\right]^J$.

Введемо позначення $(\chi, \tilde{u}(x,t;\vec{V}) - \vec{\varphi}(t))^2 = \sum_{j=1}^{J} \left(\tilde{u}\left(z_j, t; \vec{V}\right) - \varphi_j(t)\right)^2$.

З цими позначеннями функціонал 7 набуває вигляду

$$\mathcal{I}_\alpha(V) = \int_0^T (\chi, \tilde{u}(x,t;V) - \varphi(t))^2 dt + \alpha\|V\|_p^2. \tag{8}$$

З урахуванням 4, рівняння доповнюється початковою умовою

$$u(0) = g. \tag{9}$$

Отже, отримуємо задачу мінімізації функціоналу 8 на розв'язках задачі 6, 9.

Наведемо ітераційнні алгорнтм пошуку розв'язку. При переході з k-ї на (k + 1) ітерацію:

1. Розв'язується пряма задача для визначення стану системи

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} + Cu^k + \mathcal{D}u^k + au^k = \sum_{\beta=1}^{p} V^{\beta,k}\delta\left(x - r^\beta\right), \quad 0 < t \le T, \tag{10}$$

$$u^k(0) = 0. \tag{11}$$

2. Знаходиться спряженнй стан Ψ^k системи з системи рівнянь

$$-\frac{d\psi^k}{dt} - \mathcal{C}\psi^k + \mathcal{D}\psi^k + a\psi^k = 2\chi(u - \vec{\varphi}(t)); T > t \ge 0 \tag{12}$$

$$\psi^k(T) = 0. \tag{13}$$

3. Визначаються нові наближення для потужностей V

$$\frac{V^{\beta,k+1} - V^{\beta,k}}{s_{k+1}} + \Psi^k\left(r^\beta\right) + 2\alpha V^{\beta,k} = 0, \quad \beta = 1, 2, \ldots, p \tag{14}$$

Тут s_{k+1}– крокові множникн, що обираються з умов $\sum_{k=1}^{\infty} s_k = +\infty; s_k \to 0$, $k \to \infty$;

4. Обчислюється значення $\mathcal{I}_\alpha\left(V^{k+1}\right)$ за формулою 8 та при умові $\left|\mathcal{I}_\alpha\left(V^{k+1}\right)\right| < \varepsilon$ зупиняємося - інтенсивності V^{k+1} - шукані, інакше переходимо на крок 1 . Тут ε - величина, що характеризує точність отриманого розв'язку.

2.2 Визначення інтенсивностей джерел при відомій їхній кількості та невідомих координатах

Згідно введених в попередньому підрозділі позначень, стан системи $u(x, t; V, r)$ описується рівнянням

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} c_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} k(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + au = F(x, r)V(t) \tag{15}$$

де $V(t) = \left(V^1(t), V^2(t), \ldots, V^p(t)\right)$ та $r = \left(r^1, r^2, \ldots, r^p\right)$ - вектори керувань, $F(x, r) = \left(\delta\left(x - r^1\right), \delta\left(x - r^2\right), \ldots, \delta\left(x - r^p\right)\right)$ – вектор дельта-функцій, $x \in \Omega, 0 < t \le T$.

Варіаційна задача доповнюється умовами 3, 4.

Будемо вважати, що керування $h = (V(t), r) \in H_{VR}$, де $H_{VR} = \left\{h = \left\{\left(V^\beta(t), r^\beta\right), \beta = \overline{1, p}\right\}\right\} \subset L_2^p(0, T) \otimes R^p$– гільбертів простір зі скалярним добутком $\langle h_1, h_2\rangle = \sum_{\beta=1}^{p}\left(\int_0^T V_\beta^{(1)}(t)V_\beta^{(2)}(t)dt + r_\beta^{(1)}r_\beta^{(2)}\right)$ і нормою $\|h\|_p = \langle h, h\rangle^{1/2}$;

Функціонал якості розглядаємо у вигляді

$$\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V,r) = \sum_{j=1}^{J} \int_0^T \left(\tilde{u}\left(z_j,t;V,r\right) - \varphi_j(t)\right)^2 dt + \alpha \|V\|^2_{L_f(0,T)} + \gamma^2 \|r\|_p^2 \qquad (16)$$

Тут $\alpha > 0, \gamma > 0$ - параметри регуляризації.

Оптимальне керування $h^* = (V^*, r^*)$ визначається як мінімум функціоналу $\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V,r)$, тобто

$$\mathcal{T}_{\alpha,\gamma}\left(V^*, r^*\right) = \min_{(V,r)\in H_{\gamma\Omega}} \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V,r), \qquad (17)$$

а за розв'язок задачі 15-17, 3, 4 беремо $u\left(x,t;V^*,r^*\right)$ та сам вектор $\left(V^*(t), r^*\right)$.

Запишемо ітераційний алгоритм визначення інтенсивностей V^β та координат r^β. При переході з k-ї ітерації на (k + 1):

1. Розв'язується пряма задача для визначення стану системи

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} + \mathcal{C}u^k + \mathcal{D}u^k + au^k = \sum_{\beta=1}^{p} V^{\beta,k}\delta\left(x - r^{\beta,k}\right), \quad 0 < t \le T \qquad (18)$$

$$u^k(0) = 0. \qquad (19)$$

2. Знаходиться спряжений стан, що відповідає (V^*, r^*)

$$-\frac{d\psi^k}{dt} - \mathcal{C}\psi^k + \mathcal{D}\psi^k + a\psi^k = 2\chi\left(u^k - \varphi(t)\right), \quad T > t \ge 0 \qquad (20)$$

$$\psi^k(T) = 0. \qquad (21)$$

3. Визначаються нові наближення для координат r та потужностей V джерел

$$\begin{aligned} &\frac{V^{\beta,k+1} - V^{\beta,k}}{s_{k+1}} + \Psi^k\left(r^{\beta,k}\right) + 2\alpha V^{\beta,k} = 0 \\ &\frac{r^{\beta,k+1} - r^{\beta,k}}{\sigma_{k+1}} + \frac{\partial\psi^k\left(r^{\beta,k}\right)}{\partial r} V^{\beta,k} + 2\gamma r^{\beta,k} = 0, \beta = 1,2,\ldots,p \end{aligned} \qquad (22)$$

Тут s_{k+1} та $\sigma_{k+1}-$ крокові множники, що обираються з умов

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k = +\infty, \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k = +\infty, s_k \to 0 \sigma_k \to 0, k \to \infty$$

4. Обчислюємо значення $\mathcal{I}_\alpha\left(V^{k+1}\right)$ за формулою 8 та при умові $\left|\mathcal{I}_\alpha\left(V^{k+1}\right)\right| < \varepsilon$ зупиняємося. $\left(V^{k+1}, r^{k+1}\right) -$ шуканнй розв'язок, інакше переходимо на крок 1.

2.3 Знаходження джерел при невідомій їхній кількості

У попередніх підрозділах кількість джерел забруднення вважалася заздалегідь відомою. Розглянемо тепер можливий підхід до розв'язання задачі ідентифікації, коли дані лише спостереження.

Покриємо прямокутну область $\Omega \subseteq R^2$ рівномірною сіткою, у кожному внутрішньому вузлі якої розташуємо по джерелу невідомої інтенсивності - N_x джерел по x та N_y по y. Відновивши інтенсивності за раніше наведеним алгоритмом, шуканими джерелами вважатимемо ті, інтенсивність яких більша за нуль.

Обчислювальні затрати зростають пропорційно до щільності сітки, однак водночас підвищується і точність знайдених координат, тому сітку доцільно підбирати залежно від конкретної задачі.

Рівняння, яким описується стан системи, набуває вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{2} c_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+a(x)u=-\sum_{k=1}^{N_x}\sum_{m=1}^{N_y} \delta\left(x-r^{k,m}\right) q^{k,m}(t), \quad (23)$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{2} c_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+a(x)u=F(x)V(t), \quad (24)$$

де $V(t)=\left\{V^{1,1}(t), V^{1,2}(t), \ldots, V^{N_x,N_y}(t)\right\}$ – вектор керування системою,

$F(x)=\left\{\delta\left(x-r^{1,1}\right), \delta\left(x-r^{1,2}\right), \ldots, \delta\left(x-r^{N_x,N_y}\right)\right\}$ – вектор δ-функцій,

$x \in \Omega \subseteq R^2, 0 < t \leq T$

Скалярний добуток на гільбертовому просторі керувань визначається як

$$\langle V, W\rangle=\sum_{k=1}^{N_x}\sum_{m=1}^{N_y}\int_0^T V_{k,m}(t) W_{k,m}(t) dt$$

Оптимальне керування $V^*(t)$ визначаємо з умови

$$\mathcal{I}_\alpha(V)=\sum_{j=1}^{J}\int_0^T\left(\tilde{u}\left(z_j, t; V\right)-\varphi_j(t)\right)^2 dt+\alpha\|V\| \xrightarrow[V]{} \min, \quad (25)$$

або

$$\mathcal{I}_\alpha(V)=\int_0^T(\chi, \tilde{u}(x, t; V)-\varphi(t))^2 dt+\alpha\|V\|. \quad (26)$$

Ітераційнй алгорнтм пошуку розв'язку, при переході з s-ї на (s+1) ітерацію:

1. Розв'язується пряма задача для визначення стану системи

$$\frac{\partial u^s}{\partial t} + Cu^s + \mathcal{D}u^s + au^s = \sum_{k=1}^{N_x}\sum_{m=1}^{N_y} V^{k,m,s}\delta\left(x - r^{k,m}\right), \quad 0 < t \leq T, \tag{27}$$

$$u^s(0) = 0. \tag{28}$$

2. Знаходиться спряженнй стан Ψ^s системи з системи рівнянь

$$-\frac{d\psi^s}{dt} - \mathcal{C}\psi^s + \mathcal{D}\psi^s + a\psi^s = 2\chi(u - \vec{\varphi}(t)); T > t \geq 0 \tag{29}$$

$$\psi^s(T) = 0. \tag{30}$$

3. Визначаються нові наближення для потужностей V

$$\begin{gathered} \frac{V^{k,m,s+1} - V^{k,m,s}}{s_{s+1}} + \Psi^s\left(r^{k,m}\right) + 2\alpha V^{k,m,s} = 0, \\ k = 1, 2, \ldots, N_x, \quad m = 1, 2, \ldots, N_y \end{gathered} \tag{31}$$

Тут $s_{s+1}-$ крокові множникн, що обираються з умов $\sum_{s=1}^{\infty} s_s = +\infty; s_s \to 0$, $s \to \infty$;

4. Обчислюємо значення $\mathcal{I}_\alpha\left(V^{s+1}\right)$ за формулою 26 та при умові $\left|\mathcal{I}_\alpha\left(V^{s+1}\right)\right| < \varepsilon$ зупиняємося - інтенсивності V^{s+1} - шукані, інакше переходимо на крок 1 . Туг ε - величина, що характеризує точність отриманого розв'язку.

3 ДС-алгоритм для розв'язання задачі ідентифікації

3.1 Чисельне моделювання при відомих координатах

Для спрощення будемо вважати, що область, в якій розташовані джерела забруднень, прямокутна:

$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$.

Розв'язуватись будуть дві прямі задачі: 10, 11 для основного стану системи та 12, 13 для спряженого на кожній ітерації за допомогою ДС-алгорнтму.

Для сіткових функцій, рівних нулю на ∂w, визначимо гільбертів простір $L_2(w)$, в якому скалярннй добуток і норму задамо у вигляді

$$(u, v) = \sum_{x \in w} u(x)v(x)h_1h_2, \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Область Ω покриваємо сіткою

$$\Omega_{h,\tau} = \{(x_1, x_2, t) \mid x_1 = kh_1, x_2 = mh_2, t = n\tau,$$
$$k = \overline{0, M_1}, m = \overline{0, M_2}, n = \overline{0, N}; h_\alpha = 1/M_\alpha, \alpha = 1, 2, \tau > 0,$$

яку розбиваємо на дві підмножнни: $\Omega_{h,\tau}^{(1,n)}$ та $\Omega_{h,\tau}^{(2,n)}$.

До першої відносимо всі точки $(x_{1,k}, x_{2,m}, t_n) \in \Omega_{h,\tau}$, для якнх $(k + m + n)-$ непарне, а до другої - парне.

На внутрішніх точках $\Omega_{h,\tau}^{(1,n+1)}$ задаємо сімейство різницевнх схем

$$u_{k,m}^{n+1} = u_{k,m}^n - \tau \left(Cu_{k,m}^n + Du_{k,m}^n + au_{k,m}^n \right) + \tau F_{k,m}^n V_{k,m}^n, \tag{32}$$

а на внутрішніх точках $\Omega_{h,\tau}^{(2,n+1)}-$

$$u_{k,m}^{n+1} = u_{k,m}^n - \tau \left(Cu_{k,m}^{n+1} + Du_{k,m}^{n+1} + au_{k,m}^{n+1} \right) + \tau F_{k,m}^n V_{k,m}^{n+1} \tag{33}$$

Тут $Cu_{k,m}^n = c_{1,k,m} \frac{u_{k+1,m}^n - u_{k-1,m}^n}{2h_1} + c_{2,k,m} \frac{u_{k,m+1}^n - u_{k,m-1}^n}{2h_2}$

$$Du_{k,m}^n = -\left(k_{k,m} \frac{u_{k+1,m}^n - 2u_{k,m}^n + u_{k-1,m}^n}{h_1^2} + k_{k,m} \frac{u_{k,m+1}^n - 2u_{k,m}^n + u_{k,m-1}^n}{h_2^2} \right)$$

$$FV_{k,m}^{n+1} = \begin{cases} \frac{(h_1-\gamma_1)(h_2-\gamma_2)}{h_1h_2} q^\beta(\tau n), \text{ якщо } \left| x_{1,k} - r_1^\beta \right| < h_1 \left| x_{2,k} - r_2^\beta \right| < h_2 \\ 0, \text{ в іншому випадку,} \end{cases}$$

де β - номер джерела, $\left(r_1^\beta, r_2^\beta \right) -$ координати джерела, $\gamma_i = \left| x_{i,k} - r_i^\beta \right|, i = 1, 2$. Схеми доповнюємо початковою

$$u_{k,m}^0 = g(kh_1, mh_2), k = \overline{0, M_1}, m = \overline{0, M_2} \tag{34}$$

та граннчннми умовами

$$u_{0,m}^{n+1}=u_{M_1,m}^{n+1}=0, m=\overline{0,M_2}; u_{k,0}^{n+1}=u_{k,M_2}^{n+1}=0, k=\overline{0,M_1}. \tag{35}$$

За розв'язок задачі прнймаємо значення $u_{k,m}^{2n}$ при $n=0,1,2,\dots,N-1$

Аналогічно, схеми ДС-методу для спряженого стану мають вигляд

$$\psi_{k,m}^{n-1}=\psi_{k,m}^{n}+\tau\left(C\psi_{k,m}^{n}-D\psi_{k,m}^{n}-a\psi_{k,m}^{n}\right)+\tau Z_{k,m}^{n}, \quad (x_{1,k},x_{2,m},t_{n-1})\in\Omega_{h,\tau}^{(1,n-1)} \tag{36}$$

$$\begin{gathered}\psi_{k,m}^{n-1}=\psi_{k,m}^{n}+\tau\left(C\psi_{k,m}^{n-1}-D\psi_{k,m}^{n-1}-a\psi_{k,m}^{n-1}\right)+\tau Z_{k,m}^{n}\\ (x_{1,k},x_{2,m},t_{n-1})\in\Omega_{h,\tau}^{(2,n-1)}\end{gathered} \tag{37}$$

де $Z_{k,m}^{n}=2\chi_h\left(u_n-\varphi_n\left(t_n\right)\right); \chi_h(x)=\frac{1}{h_1h_2}\sum_{j=1}^{J}\int_{D_0}\delta\left(x-z_j\right)dx, D_0=[-h_1,h_1]\times[-h_2,h_2]$,

$$\psi_{k,m}^{T}=0, k=\overline{0,M_1}, m=\overline{0,M_2}, \tag{38}$$

$$\psi_{0,m}^{n+1}=\psi_{M_1,m}^{n+1}=0, m=\overline{0,M_2}; \psi_{k,0}^{n+1}=\psi_{k,M_2}^{n+1}=0, k=\overline{0,M_1}. \tag{39}$$

За цими схемами розв'язок послідовно знаходимо, починаючи з $n=N,N-1,\dots,1$.

Отже, щоб знайти невідомі інтенсивності, покладаємо в $V(t)$ початкові наближення інтенсивностей і проводимо ітераційннй процес:

1) обчислюємо u за схемамн 32-35;

2) знаходимо ψ за схемами 36-39;

3) уточнюємо значення інтенсивностей за формулою 14;

4) обчислюємо функціонал якості за формулою

$$\mathcal{I}_\alpha\left(V^{s+1}\right)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{J}\left(\left(\tilde{\tilde{u}}\left(z_j,\tau n;V^{s+1}\right)-\varphi_j(t)\right)^2+\alpha\left\|V^{s+1}\right\|_p^2\right. \tag{40}$$

$$\begin{gathered}\text{де } \tilde{\tilde{u}}\left(z_j,\tau n;V^{s+1}\right)=(1-\rho_1)\left((1-\rho_2)\,u_{k_0,m_0}^{n}+\right.\\ \rho_2u_{k_0,m_0+1}^{n}+\rho_1\left((1-\rho_2)\,u_{k_0+1,m_0}^{n}+\rho_2u_{k_0+1,m_0+1}^{n}\right)\\ k_0=\left[x_{1,j}/h_1\right], m_0=\left[x_{2,j}/h_2\right], \rho_1=\left(x_{1,j}-k_0h_1\right)/h_1, \rho_2=\left(x_{2,j}-m_0h_2\right)/h_2\end{gathered}$$

5) якщо $\left|\mathcal{I}_\alpha\left(V^{s+1}\right)\right|<\varepsilon$, то $V^{s+1}-$ шуканий розв'язок, інакше переходнмо на 1).

3.2 Чисельне моделювання при відомій кількості та невідомих координатах

Різницеві схеми ДС-алгоритму для прямої 27-28 та оберненої 29-30 задач мають вигляд 32-35 та 36-39.

Щоб знайти інтенсивності та координати джерел, покладемо в $V(t)$ та $r(t)$ початкові наближення інтенсивностей і проведемо ітераційннй процес:

1) обчислюємо u за схемами 32-35;

2) знаходимо ψ за схемами 36-39;

3) уточнюємо інтенсивності та координати за формулами

$$\begin{gathered} V^{\beta,n,s+1} = V^{\beta,n,s} - s_k\left(\Psi^{n,s}\left(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}\right) + 2\alpha V^{\beta,n,s}\right), \\ r_x^{\beta,n,s+1} = r_x^{\beta,s} - \sigma_k\left(\bar{\nabla}_x\psi^{n,s}\left(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}\right)V^{\beta,n,s} + 2\gamma r_x^{\beta,n,s}\right), \\ r_y^{\beta,n,s+1} = r_y^{\beta,s} - \sigma_k\left(\bar{\nabla}_y\psi^{n,s}\left(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}\right)V^{\beta,n,s} + 2\gamma r_y^{\beta,n,s}\right), \\ \beta = 1, 2, \ldots, p, n = \overline{0, N}, \end{gathered} \tag{41}$$

де $\bar{\nabla}_x\psi, \bar{\nabla}_y\psi$ - різницеві апроксимації другого порядку частинннх похідних $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ та $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ відповідно, що мають вигляд

$$\begin{gathered} \bar{\nabla}_x\psi^{n,s}\left(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}\right) = \\ = (1-\rho_1)\left((1-\rho_2)\bar{\nabla}_x\psi_{k_0,m_0}^{n,s} + \rho_2\bar{\nabla}_x\psi_{k_0,m_0+1}^{n,s}\right) + \\ \rho_1\left((1-\rho_2)\bar{\nabla}_x\psi_{k_0,1,m_0}^{n,s} + \rho_2\bar{\nabla}_x\psi_{k_0+1,m_0+1}^{n,s}\right), \\ \bar{\nabla}_y\psi^{n,s}\left(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,_s}\right) = \\ = (1-\rho_1)\left((1-\rho_2)\bar{\nabla}_y\psi_{k_0,m_0}^{n_0} + \rho_2\bar{\nabla}_y\psi_{k_0,m_0+1}^{n_s}\right) + \\ \rho_1\left((1-\rho_2)\bar{\nabla}_y\psi_{k_0+1,m_0}^{n_0} + \rho_2\bar{\nabla}_y\psi_{k_0+1,m_0+1}^{n_s}\right), \\ \bar{\nabla}_x\psi_{k_0,m_0}^{n,s} = \frac{\psi_{k_0,+1,m_0}^{n,s} - \psi_{k_0-1,m_0}^{n,s}}{2h_1}, \bar{\nabla}_y\psi_{k_0,m_0}^{n,s} = \frac{\psi_{k_0,,m_0+1}^{n,s} - \psi_{k_0,m_0-1}^{n,s}}{2h_2}, \\ k_0 = \left[r_x^{\beta,s}/h_1\right], m_0 = \left[r_y^{\beta,s}/h_2\right], \rho_1 = \left(r_x^{\beta,s} - k_0h_1\right)/h_1, \rho_2 = \left(r_y^{\beta,s} - m_0h_2\right)/h_2; \end{gathered} \tag{42}$$

4) обчислюємо функціонал якості

$$\mathcal{I}_\alpha\left(V^{s+1}\right) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{J}\left(\tilde{\tilde{u}}\left(z_j, \tau n; V^{s+1}\right) - \varphi_j(t)\right)^2 + \alpha\|V\|_p^2 + \gamma\|r\|_p^2 \tag{43}$$

$$\begin{gathered} \text{де } \tilde{\tilde{u}}\left(z_j, \tau n; V^{s+1}\right) = (1-\rho_1)\left((1-\rho_2)u_{k_0,m_0}^n + \rho_2 u_{k_0,m_0+1}^n\right) + \\ \rho_1\left((1-\rho_2)u_{k_0+1,m_0}^n + \rho_2 u_{k_0+1,m_0+1}^n\right), \\ k_0 = [x_{1,j}/h_1], m_0 = [x_{2,j}/h_2], \rho_1 = (x_{1,j} - k_0h_1)/h_1, \rho_2 = (x_{2,j} - m_0h_2)/h_2 \end{gathered}$$

5) якщо $\left|\mathcal{I}_\alpha\left(V^{s+1}\right)\right| < \varepsilon$, то $V^{s+1}-$ шуканнй розв'язок, інакше переходнмо на 1).

3.3 Чисельне моделювання при невідомій кількості

Подібно до наведеного вище різницевого алгоритму, розглядаємо прямокутну область

$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2)\,, x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$,
покриваємо її сіткою

$$\Omega_{h,\tau} = \{(x_1, x_2, t) \mid x_1 = kh_1, x_2 = mh_2, t = n\tau,$$
$$k = \overline{0, M_1}, m = \overline{0, M_2}, n = \overline{0, N}; h_\alpha = 1/M_\alpha, \alpha = 1, 2, \tau > 0,$$

і розбиваємо на дві підмножини $\Omega_{h,\tau}^{(1,n)}$ та $\Omega_{h,\tau}^{(2,n)}$.

Щоб знайти невідомі інтенсивності, покладаємо в $V(t)$ початкові наближення і проводимо ітераційнний процес:

1) обчислюємо u за схемамн 32-35;

Зауваження: $FV_{k,m}^{n+1} = q^{k,m}(\tau n)$, оскільки джерела розташовані точно в вузлах, причому в кожному внутрішньому вузлі сітки розташоване джерело.

2) знаходимо ψ за схемами 36-39;

3) уточнюємо значення інтенсивностей за формулою 14;

4) обчислюємо функціонал якості за формулою 40

5) якщо $\left|\mathcal{I}_\alpha\left(V^{s+1}\right)\right| < \varepsilon$, то $V^{s+1}-$ шуканий розв'язок, інакше переходнмо на 1).

6) джерела вважати знайденими на тих сіткових координатах (k, m), інтенсивність джерела на яких суттєво більша за нуль.

4 Висновки

У даній роботі були розглянуті задачі ідентифікації точкових джерел забруднень, варіаційний підхід до їх розв'язання, чисельне моделювання відповідних процесів, і запропоновано підхід до розв'язання задачі, коли невідомою є кількість джерел.

Варіаційний підхід було використано із припущенням, що в кожному просторовому вузлі фіксованої сітки потенційно розташоване точкове джерело забруднень. Було побудовано алгоритм знаходження інтенсивностей, зроблено дискретизацію з використанням двокрокового симетризованого алгоритму, розроблено програмну реалізацію розв'язання прямої задачі для отримання цільової функції (спостереження) для штучного тестового розв'язку.

Предметом подальшого вдосконалення може бути реалізація програмного розв'язання оберненої задачі та алгоритму перерахунку інтенсивностей, а також більш детальне вивчення обчислювальної складності запропонованих алгоритмів.

Список використаних джерел

[1] Чисельне та комп'ютерне моделювання процесів переносу з використанням двокрокових симетризованих алгоритмів : дис. канд. фіз.-мат. наук / В. В. Оноцький; Київ, нац. ун-т ім. Т. Шевченка, 2013.

[2] Lyasko Sergey. Identification of Point Contamination Source in Ground Water / Sergey Lyasko, Klyushin, Vladimir Semenov, Katerina Shevchenko // Int. J. Ecol. Dev.; Vol.5, No. F06, Fall 2006, p.36-43.

[3] Клюшин Д. А. Ідентифікація точкових джерел для параболічних задач з сингулярною правою частиною / Д. А. Клюшин, К. В. Шевченко // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2004. – вип. 2. – С. 62-70

[4] Самарский А. А. Разностные методы решения задач идентификации источника для параболических задач / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич // Вестник Московского университета, С.15, Вычислительная математика и кибернетика 1995, No 1, с. 47-56.

[5] Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука 1986.

5 Додатки

5.1 Код програми для обчислювального експерименту

```
const z = [
[1, 2],
[3, 5],
[6, 4],
],
 = [1, 3, 4],
r = [
[1, 2],
[3, 5],
[6, 4],
],
q = [1, 3, 4],
p = r.length,
M1 = 8,
M2 = 8,
h1 = 1 / M1,
h2 = 1 / M2,
N = 8,
J = .length,
 = 1,
 = 0.01,
 = 1

let s = 1

const norm = (V) => V.reduce((sum, v) => sum + v, 0)
const g = (k, m) => 1
const a = () => 1
const K = (k, m) => 1
const c = (k, m) => [1, 1]
const u = (k, m, n) => {
if (n == 0) return g(k, m)
if (k <= 0 || k >= M1 || m <= 0 || m >= M2) return 0
const C =
(c(k, m)[0] * (u(k + 1, m, n) - u(k - 1, m, n))) / (2 * h1) +
(c(k, m)[1] * (u(k, m + 1, n) - u(k, m - 1, n))) / (2 * h2),
D = -(
(K(k, m) * (u(k + 1, m, n) - 2 * u(k, m, n) + u(k - 1, m, n))) / h1 ** 2 +
(K(k, m) * (u(k, m + 1, n) - 2 * u(k, m, n) + u(k, m - 1, n))) / h2 ** 2
),
 = [0, 0],
```

```
 = r.findIndex(
(x) => ([0] = Math.abs(k * h1 - x[0])) < h1 && ([1] = Math.abs(m * h2 - x[
),
FV =  == -1 ? 0 : (((h1 - [0]) * (h2 - [1])) / (h1 * h2)) * q[]
return u(k, m, n - 1) -  * (C + D + a()) +  * FV
}

const I = (V) => {
let sum = 0
for (let n = 0; n <= N; n++) {
for (let j = 0; j < J; j++) {
const k0 = Math.trunc(z[j][0] / h1),
m0 = Math.trunc(z[j][1] / h2),
1 = (z[j][0] - k0 * h1) / h1,
2 = (z[j][1] - m0 * h2) / h2,
u__ =
(1 - 1) * ((1 - 2) * u(k0, m0, n) + 2 * u(k0, m0 + 1, n)) +
1 * ((1 - 2) * u(k0 + 1, m0, n) + 2 * u(k0 + 1, m0 + 1, n))
sum += (u__ - [j]) ** 2
}
}
sum +=  * norm(V)
return sum
}
```