КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ
ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

І. М. Александрович
А. В. Анікушин
О. К. Боярчук
О. І. Молодцов
Д. А. Номіровський
Б. В. Рубльов
В. В. Семенов

Збірник задач та вправ з математичного аналізу

Вступ до математичного аналізу

Навчальний посібник

УДК 517.13
М 34

Рецензенти:

канд. фіз.-мат. наук, доц. Нестеренко О. Н.
канд. фіз.-мат. наук, доц. Поляков О. В.

Рекомендовано до друку вченою радою факультету кібернетики
(протокол № ___ від ___ вересня 2016 року)

Збірник задач та вправ з математичного аналізу

М34 Збірник задач та вправ з математичного аналізу. Вступ до математичного аналізу / І.М. Александрович, А.В. Анікушин, О.К. Боярчук, О.І. Молодцов, Д.А. Номіровський, Б.В. Рубльов, В.В. Семенов. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2016. – 140 с.

Вивчаються розділи математичного аналізу, які передують поняттю "похідна" – визначення поняття функції, теорія послідовностей, границя та неперервність функції. До теоретичного матеріалу кожного розділу наведено велику кількість задач, а також відповіді до них.

Для студентів математичних та інформаційних спеціальностей університетів

УДК 517.13

ЗМІСТ

Розділ 1

СИМВОЛІКА. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ. МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Короткі теоретичні відомості

Нехай M – деяка множина. Запис $a \in M$ означає, що a є елементом множини M. Заперечення цього твердження записують у вигляді $a \notin M$. Використовують також позначення $M \ni a$ та, відповідно. Якщо M та N – множини, то записи $M \subset N$ та $N \supset M$ означають, що кожний елемент множини M є елементом множини N. У такому випадку множину M називають підмножиною множини N. Заперечення цього відношення записують у вигляді $M \not\subset N$ або $M \not\supset N$. Для множини M через $\exp M$ або 2^M позначають сукупність усіх підмножин множини M.

Запис $M = \{a, b, c, ...\}$ читають так: "множина M складається з елементів a, b, c і т. д.". Множину, яка не містить жодного елемента, називають порожньою множиною і позначають символом $\varnothing$. Для довільної множини M виконується твердження $\varnothing \subset M$.

Якщо P – властивість, яку задовольняють деякі елементи множини M, то запис

$$N = \{a \in M \mid a \textit{ має властивість } P\}$$

читають так: "N – це сукупність елементів множини M, які задовольняють властивість P".

Символи $\forall$ та $\exists$ використовують для позначення словосполучень: "для кожного..." та "існує..." і називають кванторами загальності та існування. Запис $\exists !$ читають так: "існує єдиний...". Записи $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ та $\overset{def}{=}$ означають "є за означенням" та "дорівнює за означенням", відповідно.

Для числових множин використовуються такі позначення:

N – множина натуральних чисел;

Z – множина цілих чисел;

Q – множина раціональних чисел;

R – множина дійсних чисел;

C – множина комплексних чисел.

Для числових множин Z, Q та R наявність верхнього індексу "$+$" або "$-$" означає невід'ємну або недодатну частину відповідної множини, наприклад $\mathrm{R}^{-} = \mathrm{R} \bigcap (-\infty; 0]$.

Надалі вважатимемо, що всі множини, які розглядаються, є підмножинами деякої однієї множини M, яку називатимемо універсальною. Для заданих множин M_1, M_2 визначимо такі множини:

$M_1 \bigcap M_2 \overset{def}{=} \{a | a \in M_1 \wedge a \in M_2\}$ – перетин множин M_1, M_2;

$M_1 \bigcup M_2 \overset{def}{=} \{a | a \in M_1 \vee a \in M_2\}$ – об'єднання множин M_1, M_2;

$M_1 \setminus M_2 \overset{def}{=} \{a | a \in M_1 \wedge a \notin M_2\}$ – різниця множин M_1, M_2;

$M_1 \Delta M_2 \overset{def}{=} (M_1 \setminus M_2) \bigcup (M_2 \setminus M_1)$ – симетрична різниця множин M_1, M_2;

$\mathrm{C}M_2 \overset{def}{=} M \setminus M_2$ – доповнення множини M_2 (тобто доповнення до універсальної множини).

Якщо A – сукупність індексів (скінченна чи нескінченна) і $\forall \alpha \in A$ – задана множина M_α, то визначають відповідно перетин та об'єднання цих множин таким чином:

$$\bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha = \{a \mid \forall\alpha\in A\ a\in M_\alpha\};\ \bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha = \{a \mid \exists\alpha\in A\ a\in M_\alpha\}.$$

Якщо множини M_α, $\alpha\in A$ не перетинаються між собою, тобто $M_\alpha \cap M_\beta = \varnothing$ для всіх $\alpha\ne\beta$, то сукупність множин M_α називають диз'юнктною. У такому випадку об'єднання цих множин позначать $\coprod\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$.

Нагадаємо деякі властивості натуральних чисел, які стануть у нагоді при вивченні індукції та теорії послідовностей.

Властивості (*натуральних чисел*).

1. Якщо деяка множина $E\subset \mathrm{N}$ така, що $1\in E$, а також разом із числом $x\in E$ множині E також буде належати число $x+1$, то $E=\mathrm{N}$.

2. За числом $n\in\mathrm{N}$ у цій множині безпосередньо йде число $(n+1)\in\mathrm{N}$, тобто не існує натуральних чисел x, що задовольняють умови $n<x<n+1$.

3. Будь-яка непорожня підмножина натуральних чисел містить найменший елемент.

Властивість (*принцип математичної індукції*).

Умова 1: твердження A_1 – істинне.

Умова 2: із істинності твердження A_n випливає істинність A_{n+1}.

Висновок: усі твердження $A_1, A_2, \ldots$ істинні.

Для додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позначимо через $m_n^{(p)}$ середнє степеневе цих чисел порядку $p\in\mathrm{R}\setminus\{0\}$ величину

$$m_n^{(p)} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

При $p=1$ маємо середнє арифметичне:

$$m_n^{(1)} = \xi_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n};$$

при $p = 2$ маємо середнє квадратичне:

$$m_n^{(2)} = \nu_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}};$$

при $p = -1$ маємо середнє гармонічне:

$$m_n^{(-1)} = \gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}};$$

для $p = 0$ покладемо $m_n^{(0)} = \eta_n \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ – середнє геометричне.

Задачі

1. Для заданих множин M_1, M_2, M_3 доведіть рівність:

1) $M_1 \bigcup M_2 = M_2 \bigcup M_1$;

2) $(M_1 \bigcup M_2) \bigcup M_3 = M_1 \bigcup (M_2 \bigcup M_3)$;

3) $M_1 \bigcap M_2 = M_2 \bigcap M_1$;

4) $(M_1 \bigcap M_2) \bigcap M_3 = M_1 \bigcap (M_2 \bigcap M_3)$;

5) $M_1 \bigcap \varnothing = \varnothing$; **6)** $M_1 \bigcap M = M_1$;

7) $M_1 \bigcup \varnothing = M_1$; **8)** $M_1 \bigcup M = M$;

9) $M_1 \Delta M_2 = M_2 \Delta M_1$; **10)** $(M_1 \Delta M_2) \Delta M_3 = M_1 \Delta (M_2 \Delta M_3)$;

11) $M_1 \Delta \varnothing = M_1$; **12)** $M_1 \Delta M = \mathrm{C} M_1$;

13) $\mathrm{C} M = \varnothing$; **14)** $\mathrm{C} \varnothing = M$; **15)** $\mathrm{C}\mathrm{C} M_1 = M_1$;

16) $M_1 \Delta (M_1 \Delta M_2) = M_2$;

17) $(M_1 \bigcup M_2) \bigcap M_3 = (M_1 \bigcup M_3) \bigcap (M_2 \bigcup M_3)$;

18) $(M_1 \bigcap M_2) \bigcup M_3 = (M_1 \bigcap M_3) \bigcup (M_2 \bigcap M_3)$;

19) $\mathrm{C}(M_1 \bigcup M_2) = \mathrm{C} M_1 \bigcap \mathrm{C} M_2$;

20) $\mathrm{C}(M_1 \bigcap M_2) = \mathrm{C} M_1 \bigcup \mathrm{C} M_2$;

21) $M_1 \bigcup M_2 = (M_1 \Delta M_2) \Delta (M_1 \bigcap M_2)$;

22) $M_1 \setminus M_2 = M_1 \setminus (M_1 \bigcap M_2)$;

23) $M_1 \setminus (M_2 \bigcup M_3) = (M_1 \setminus M_2) \bigcap (M_1 \setminus M_3)$;

24) $M_1 \bigcup (M_1 \bigcap M_2) = M_1 \bigcap (M_1 \bigcup M_2) = M_1$;

25) $M_1 \bigcap (M_2 \setminus M_3) = (M_1 \bigcap M_2) \setminus (M_1 \bigcap M_3) = (M_1 \bigcap M_2) \setminus M_3$;

26) $M_1 \setminus (M_2 \setminus M_3) = (M_1 \setminus M_2) \bigcup (M_1 \bigcap M_3)$;

27) $(M_1 \bigcap M_2) \bigcup (M_1 \bigcap CM_2) = (M_1 \bigcup M_2) \bigcap (M_1 \bigcup CM_2) = M_1$;

28) $(M_1 \setminus M_2) \setminus M_3 = (M_1 \setminus M_3) \setminus (M_2 \setminus M_3)$.

2. Для заданих множин M_1, M_2, M_3 доведіть твердження:

1) $M_1 \subset M_2 \Leftrightarrow M_1 \bigcup M_2 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \bigcap M_2 = M_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M_1 \setminus M_2 = \varnothing$;

2) $(M_1 \bigcup M_2) \subset M_3 \;\Leftrightarrow\; M_1 \subset M_3 \wedge M_2 \subset M_3$;

3) $M_1 \subset (M_2 \bigcap M_3) \;\Leftrightarrow\; M_1 \subset M_2 \wedge M_1 \subset M_3$;

4) $(M_1 \bigcap M_2) \subset M_3 \;\Leftrightarrow\; M_1 \subset (\mathrm{C}M_2 \bigcup M_3)$;

5) $M_1 \subset (M_2 \bigcup M_3) \;\Leftrightarrow\; (M_1 \bigcap \mathrm{C}M_2) \subset M_3$;

6) $M_1 \subset M_2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{C}M_2 \subset \mathrm{C}M_1$;

7) $M_1 = \mathrm{C}M_2 \;\Leftrightarrow\; M_1 \bigcap M_2 = \varnothing \;\wedge\; M_1 \bigcup M_2 = M$;

8) $(M_1 \setminus M_2) \bigcup M_1 = M_1 \;\Leftrightarrow\; M_2 \subset M_1$;

9) $(M_1 \Delta M_2) \subset (M_1 \Delta M_3) \bigcup (M_2 \Delta M_3)$;

10) $(M_1 \bigcup M_2) \Delta M_3 \subset (M_1 \Delta M_3) \bigcup (M_2 \Delta M_3)$;

11) $(M_1 \setminus M_2) \subset (M_1 \setminus M_3) \bigcup (M_3 \setminus M_2)$.

3. Нехай множини $M_1, M_2, M_3, M_4 \subset M$. Перевірити, чи справджуються така рівність:

1) $M_1 \setminus (M_2 \bigcup M_3) = (M_1 \setminus M_2) \setminus M_3$;

2) $M_1 \bigcup (M_2 \setminus M_3) = (M_1 \bigcup M_2) \setminus M_3$;

3) $(M_1 \setminus M_2) \bigcup M_3 = (M_1 \bigcup M_3) \setminus M_2$;

4) $M_1 \setminus (M_2 \bigcap M_3) = M_1 \bigcap (M_2 \setminus M_3)$;

5) $M_1 \setminus (M_2 \setminus M_3) = (M_1 \setminus M_2) \setminus M_3$;

6) $(M_1 \setminus M_2) \bigcap M_3 = (M_1 \bigcap M_3) \setminus M_2$;

7) $M_1 \setminus (M_2 \setminus M_3) = (M_1 \setminus M_2) \bigcup (M_1 \setminus M_3)$;

8) $(M_1 \bigcap M_2) \Delta M_3 = (M_1 \Delta M_3) \bigcap (M_2 \Delta M_3)$;

9) $(M_1 \bigcap M_2) \bigcap (M_3 \bigcap M_4) = (M_1 \bigcap M_3) \bigcap (M_2 \bigcap M_4)$;

10) $(M_1 \bigcap M_2) \bigcup (M_3 \bigcap M_4) = (M_1 \bigcup M_3) \bigcap (M_2 \bigcup M_4)$;

11) $(M_1 \bigcap M_2) \setminus (M_3 \bigcap M_4) = (M_1 \setminus M_3) \bigcap (M_2 \setminus M_4)$;

12) $(M_1 \bigcap M_2) \Delta (M_3 \bigcap M_4) = (M_1 \Delta M_3) \bigcap (M_2 \Delta M_4)$.

4. Для множини індексів $A \subset R$ задано множини $M_\alpha \subset R$ $\forall \alpha \in A$. Знайдіть такі множини:

1) $P = \bigcap\limits_{\alpha \in A} M_\alpha$, $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} M_\alpha$, де:

а) $A = [0; 1]$, $M_\alpha = \{x \mid \alpha^2 \le x \le \alpha\}$;

б) $A = (-2; 2)$, $M_\alpha = \{x \mid -\alpha^2 - 2\alpha - 6 \le x \le \alpha^2 - 4\alpha\}$;

в) $A = (0; +\infty)$, $M_\alpha = (-\alpha; \alpha)$;

г) $A = [1; +\infty)$, $M_\alpha = [2 - \alpha; \alpha^2]$;

д) $A = N$, $M_\alpha = \{\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, ..., 2\alpha\}$;

е) $A = Z$, $M_\alpha = [\operatorname{arctg}\alpha - \frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg}\alpha]$;

2) $A = N$, $V = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} M_k$, $L = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} M_k$, де:

а) $M_k = [(-1)^k; k]$;

б) $M_k = \left(-\frac{1}{k}; \frac{1}{k}\right)$;

в) $M_k = \left[\frac{1}{k}; k\right]$;

г) $M_k = [1 - (-1)^k; 5 + \sin\frac{\pi k}{2}]$;

д) $M_k = \{0; \frac{1}{k}; \frac{2}{k}; ...; \frac{k-1}{k}; 1\}$;

е) $M_k = \{x \mid |x - q_k| \in (0;1)\}$, де q_k – це k-те раціональне число з проміжку $(0;1)$ за будь-якої нумерації;

є) $M_1 = \{1\}$; $M_2 = \{1;2;3;4\}$;

$M_{2k+1} = \{1;2\}$; $M_{2k+2} = \{1;2;3\}$.

5. Для сукупностей множин (A_n), (B_n), $n \in \mathrm{N}$, $(D_{n,k})$, $n,k \in \mathrm{N}$, (E_α), $\alpha \in A$ доведіть твердження:

1) якщо $\forall n \in \mathrm{N}$ $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$;

2) якщо $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ $\forall n \geq 2$,

то $\forall n \in \mathrm{N}$ $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ та $\forall n \neq k$ $B_n \bigcap B_k = \varnothing$;

3) якщо $\forall n \in \mathrm{N}$ $B_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$;

4) $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \Delta \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \Delta B_n)$;

5) $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \setminus \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B_n)$;

6) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_{n,k} \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_{n,k}$;

7) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$;

8) у п. **4), 5), 6)** та **7)** цієї задачі в загальному випадку не можна поставити знак рівності;

9) $\mathrm{C} \bigcap\limits_{\alpha \in A} E_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in A} \mathrm{C} E_\alpha$;

10) $\mathrm{C} \bigcup\limits_{\alpha \in A} E_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in A} \mathrm{C} E_\alpha$.

6. Множини X, Y називаються ***порівнюваними***, якщо для них виконується одна з трьох умов: $X \subset Y \wedge X \neq Y$, $X = Y$ або $X \supset Y \wedge X \neq Y$. Задана деяка сукупність множин (M_n), $n \in \mathrm{N}$. Чи будуть порівнюваними наведені множини (або вкажіть, які з них у загальному випадку порівняти таким чином не можна):

A – сукупність елементів, що належить нескінченній кількості з множин M_n;

B – сукупність елементів, що належить усім множинам M_n, починаючи з деякої;

$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$; $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$; $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} M_k$; $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} M_k$;

$F = \{x \mid \exists n \in \mathrm{N}\ \forall k \geq n\ x \in M_k\}$;

$H = \{x \mid \forall n \in \mathrm{N}\ \exists k \geq n\ x \in M_k\}$.

7. Доведіть твердження:

1) якщо в задачах 1 та 2 поміняти місцями пари символів "$\subset$" та "$\supset$", "$\varnothing$" та "M", "$\bigcup$" та "$\bigcap$", то одержані рівності й твердження залишаться правильними;

2) якщо деяка множина A утворена операціями об'єднання й перетину з множин $A_1, A_2, ..., A_n$ та їхніх доповнень, то множина CA утворена замінами операцій перетину на об'єднання та навпаки, а також заміною всіх множин на їхнє доповнення.

8. Чи можна виразити задану операцію через такі операції:

1) операцію "$\bigcup$" через операції:

а) "$\bigcap$" та "Δ"; **б)** "$\setminus$" та "Δ"; **в)** "$\bigcap$" та "$\setminus$";

2) операцію "$\bigcap$" через операції:

а) "$\bigcup$" та "Δ"; **б)** "$\setminus$" та "Δ"; **в)** "$\bigcup$" та "$\setminus$";

3) операцію "Δ" через операції:

а) "$\bigcup$" та "$\bigcap$"; **б)** "$\setminus$" та "$\bigcap$"; **в)** "$\bigcup$" та "$\setminus$";

4) операцію "$\setminus$" через операції:

а) "Δ" та "$\bigcap$"; **б)** "Δ" та "$\bigcup$"; **в)** "$\bigcup$" та "$\bigcap$"?

9. Методом математичної індукції доведіть рівності:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$; **2)** $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$; **4)** $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$; **6)** $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)!-1$;

7) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = \dfrac{(-1)^n n(n+1)}{2}$;

8) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

9) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \dfrac{n(n+1)(n+1)(n+3)}{4}$;

10) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx = \dfrac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, $x \neq 2\pi m$, $m \in Z$;

11) $\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx = \dfrac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$, $x \neq 2\pi m$, $m \in Z$;

12) $\prod\limits_{k=0}^{n} \cos 2^k x = \dfrac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x}$, $x \neq \pi m$, $m \in Z$;

13) $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ (*біном Ньютона*).

10. Методом математичної індукції доведіть нерівності:

1) $n^3 < 2^n$, $n > 8$; **2)** $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} > \dfrac{13}{24}$, $n > 1$;

3) $\sqrt{n} < \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$, $n > 1$;

4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{n+1}-1)$, $n>1$;

5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2-\frac{1}{n}$, $n>1$;

6) $\frac{(2n-1)\,!!}{(2n)\,!!} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $n \ge 1$;

7) $\frac{\prod_{k=1}^{n}(4k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(4k)} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4n+3}}$, $n>1$;

8) $\left|\sum_{k=1}^{n}x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|x_k|$, $x_k \in \mathrm{R}$, $k=\overline{1,n}$;

9) $\left|x_0+\sum_{k=1}^{n}x_k\right| \ge |x_0|-\sum_{k=1}^{n}|x_k|$, $x_k \in \mathrm{R}$, $k=\overline{0,n}$;

10) $\left|\sin\sum_{k=1}^{n}x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}\sin x_k$, $x_k \in [0;\pi]$, $k=\overline{1,n}$;

11) $2^{n-1}(a^n+b^n) \ge (a+b)^n$, $a+b>0$;

12) $(1+x)^n \ge 1+nx$, $x \ge -1$ (*нерівність Бернуллі*);

13) $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \ge 1+\sum_{k=1}^{n}x_k$, $x_k \ge -1$, $k=\overline{1,n}$ та $\forall i, j$ $\operatorname{sgn} x_i = \operatorname{sgn} x_j$;

14) $\sum_{k=1}^{n}x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}y_k^2 \ge \left(\sum_{k=1}^{n}x_k y_k\right)^2$ (*нерівність Коші – Буняковского*);

15) $\sum_{k=1}^{n}x_k \cdot \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} \ge n^2$, $x_k>0$, $k=\overline{1,n}$;

16) $\left|\sum_{k=1}^{n}x_k\right| \le \sqrt{n\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$, $x_k \in \mathrm{R}$, $k=\overline{1,n}$;

17) $(n+1)^n < n^{n+1}$, $n > 2$;

18) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$, $n > 1$;

19) $\prod_{k=1}^{n} (2k)! > ((n+1)!)^n$, $n > 1$;

20) $(2n-1)! < n^{2n-1}$, $n > 1$;

21) $\frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \le n$;`

22) $\sqrt{n^n} \le n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n > 1$;

23) $(n!)^2 < \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)^n$, $n > 1$;

24) $n^n \ge (2n-1)\,!!$;`

25) $\sum_{k=1}^{n} k^p \le \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$, $p \in \mathrm{N}$;

26) $(2n)! < (n(n+1))^n$, $n > 1$.

11. Для додатних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ доведіть твердження:

1) якщо $x_1 x_2 ... x_n = 1$, то:

а) $x_1 + x_2 + ... + x_n \ge n$;

б) $x_1 + x_2 + ... + x_n = n$ тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$;

2) їхні середнє арифметичне (ξ_m), геометричне (η_m) і гармонічне (γ_m) пов'язані умовами:

а) $\min\limits_{1 \le k \le n} x_k \le \gamma_m \le \eta_m \le \xi_m \le \max\limits_{1 \le k \le n} x_k$;

б) будь-який зі знаків "$\le$" перетворюється на знак "$=$" тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = ... = x_n$;

3) середні степеневі $m_n^{(p)}$, $p \in \mathrm{N} \bigcup \{-1; 0\}$, задовольняють умови:

а) $m_n^{(p-1)} \le m_n^{(p)}$ $\forall p \in \mathrm{Z}^+$;

б) $m_n^{(p-1)} = m_n^{(p)}$ тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Розділ 2
БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ

Короткі теоретичні відомості

Для упорядкованої пари $(x;\, y)$ елемент x називають першою, а y – другою компонентою (координатою) упорядкованої пари. Дві упорядковані пари $(x_1;\, y_1)$ та $(x_2;\, y_2)$ вважають рівними тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$. Аналогічно розглядають упорядковані набори (кортежі) з m компонент: $(x_1; x_2; ...; x_m)$. Декартовим добутком двох множин X та Y називають множину

$$X \times Y = \{(x;\, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Аналогічно визначають і декартів добуток m множин $X_1, X_2, ..., X_m$:

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_m = \{(x_1;\, x_2;\, ...;\, x_m) | x_i \in X_i,\ i = \overline{1,\, m}\}.$$

Якщо $X_1 = X_2 = ... = X_m = X$, то використовують позначення: $\underbrace{X \times X \times ... \times X}_{m} = X^m$.

Множину Γ називають бінарним відношенням між елементами множин X та Y, якщо $\Gamma \subset X \times Y$. Першою та другою проекціями бінарного відношення Γ називають відповідно множини

$$\Gamma_1 = \text{пр}_1\Gamma = \{x \in X | \exists y \in Y : (x;\, y) \in \Gamma\}$$

та

$$\Gamma_2 = \text{пр}_2\Gamma = \{y \in Y | \exists x \in X : (x;\, y) \in \Gamma\}.$$

Множини

$$\Gamma_1(x) = \{\, y \in Y \mid (x;\, y) \in \Gamma\}$$

та

$$\Gamma_2(y) = \{\, x \in X \mid (x;\, y) \in \Gamma\}$$

називають першим і другим перерізами бінарного відношення $\Gamma \subset X \times Y$ за елементами x та y, відповідно.

Кожному бінарному відношенню $\Gamma \subset X \times Y$ можна поставити у відповідність обернене бінарне відношення $\Gamma^{-1} \subset Y \times X$ за правилом: $\Gamma^{-1} = \{(y;\, x) \mid (x;\, y) \in \Gamma\}$.

Задачі

12. Доведіть рівності:

1) $(A \times B) \bigcap (C \times D) = (A \bigcap C) \times (B \bigcap D)$;

2) $(A \times B) \bigcup (C \times D) =$

$= (A \setminus C) \times B \bigcup (C \setminus A) \times D \bigcup (A \bigcap C) \times (B \bigcup D)$;

3) $(A \times B) U (C \times D) =$

$= A \times (B \setminus D) \mathrm{U} C \times (D \setminus B) \mathrm{U} (A \mathrm{U} C) \times (B \cap D)$;

4) $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times B \bigcup (A \bigcap C) \times (B \setminus D)$;

5) $(A \times B) \setminus (C \times D) = A \times (B \setminus D) \bigcup (A \setminus C) \times (B \bigcap D)$;

6) $(A \times B) \Delta (C \times D) =$

$= (A \Delta C) \times (B \bigcap D) \bigcup A \times (B \setminus D) \bigcup C \times (D \setminus B)$;

7) $(A \bigcup B) \times C = (A \times C) \bigcup (B \times C)$;

8) $(A \bigcup B) \times (C \bigcup D) = (A \times C) \bigcup (B \times C) \bigcup (A \times D) \bigcup (B \times D)$;

9) $A \times (B \bigcup C) = (A \times B) \bigcup (A \times C)$;

10) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

11) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;

12) $\bigcup\limits_{\alpha \in A} D_\alpha \times \bigcup\limits_{\beta \in B} E_\beta = \bigcup\limits_{(\alpha, \beta) \in A \times B} (D_\alpha \times E_\beta)$;

13) $\bigcap\limits_{\alpha \in A} D_\alpha \times \bigcap\limits_{\beta \in B} E_\beta = \bigcap\limits_{(\alpha, \beta) \in A \times B} (D_\alpha \times E_\beta)$.

13. Доведіть твердження:

1) якщо множини A, B, C, D не порожні, то:

а) $A \subset B \wedge C \subset D \;\Leftrightarrow\; (A \times C) \subset (B \times D)$;

б) $A = B \wedge C = D \;\Leftrightarrow\; (A \times C) = (B \times D)$;

в) $(A \times B) \bigcup (A \times B) = C \times D \;\Leftrightarrow\; A = B = C = D$;

г) $(A \times B) \coprod (C \times D) = E \times F \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A\coprod C = E \wedge B = D = F) \vee (A = C = E \wedge B\coprod D = F)$;

2) якщо серед множин A, B, C, D є порожні, то твердження з п. **1)** можуть бути не еквівалентними;

3) для будь-яких бінарних відношень $\Gamma, \mathrm{P} \subset X \times Y$ виконуються твердження:

а) $\Gamma = \varnothing \Leftrightarrow \Gamma_1 = \varnothing \Leftrightarrow \Gamma_2 = \varnothing$;

б) $\Gamma \bigcup \Gamma = \Gamma \bigcap \Gamma = \Gamma$;

в) $(\Gamma^{-1})^{-1} = \Gamma$;

г) $\mathrm{C}(\Gamma^{-1}) = (\mathrm{C}\Gamma)^{-1}$;

д) $(\Gamma \bigcup \mathrm{P})^{-1} = \Gamma^{-1} \bigcup \mathrm{P}^{-1}$;

е) $(\Gamma \bigcap \mathrm{P})^{-1} = \Gamma^{-1} \bigcap \mathrm{P}^{-1}$.

14. Чи існують такі множини $A, B, C \subset \mathrm{R}$, для яких справджуються твердження:

1) $(A\times B) \bigcup (B \times A) = \mathrm{R}^2$ та:

а) $(A\times B) \bigcap (B \times A) = \varnothing$;

б) $(A\times B) \neq (B \times A)$;

2) $(A\times B) \subset (B \times A)$ та $(A\times B) \neq (B \times A)$;

3) $(A\times B) \bigcup C(B \times A) = \mathrm{R}^2$ та $A, B \notin \{\varnothing; \mathrm{R}\}$;

4) $(A\times B) \bigcup C(B \times A) = \mathrm{R}^2$, $A \neq B$ та $A, B \notin \{\varnothing; \mathrm{R}\}$;

5) $(A\times B) \bigcup (B\times C) \bigcup (C \times A) = \mathrm{R}^2$, де A, B, C – попарно різні множини, що відмінні від R;

6) $(A\times B\times C) \bigcup (B\times C\times A) \bigcup (C \times A\times B) = \mathrm{R}^3$, де A, B, C – попарно різні множини, що відмінні від R?

15. Для заданого бінарного відношення $\Gamma \subset X \times Y$ побудувати першу та другу проекції Γ_1, Γ_2, а також $\forall x \in X$, $y \in Y$ – перший і другий переріз $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(y)$, якщо:

1) $X = Y = \mathrm{N}$ та:

а) $\Gamma = \{(x;\, y) | x = y^2\}$;

б) $\Gamma = \{(x;\, y) | x \leq y\}$;

в) $\Gamma = \{(x;\ y) | x + y \le 100\}$;

г) $\Gamma = \{(x;\ y) | y = \frac{2x+6}{x}\}$;

2) $X = \{1, 2, ..., 12\}$, $Y = \{1, 2, ..., 8\}$ та:

а) $\Gamma = \{(x;\ y) | x + y \vdots 3\}$;

б) $\Gamma = \{(x;\ y) | x \vdots y\}$;

в) $\Gamma = \{(x;\ y) | x + y \le 10\}$;

г) $\Gamma = \{(x;\ y) | x \le y \le x + 5\}$;

д) $\Gamma = \{(x;\ y) | x^2 + y^2 \le 25\}$;

3) $X = Y = \mathrm{Z}$ та:

а) $\Gamma = \{(x;\ y) | xy = 2n - 1,\ n \in Z\}$;

б) $\Gamma = \{(x;\ y) | \sqrt{x} \le \sqrt{x + y}\}$;

в) $\Gamma = \{(x;\ y) | x = 2^y (y + 1) \wedge x \ge 3^y\}$;

4) $X = Y = \mathrm{R}$ та:

а) $\Gamma = \{(x;\ y) | y = tg\, x\}$;

б) $\Gamma = \{(x;\ y) | y \le |x|\}$;

в) $\Gamma = \{(x;\ y) | y = [x]\}$;

г) $\Gamma = \{(x;\ y) | y = \{x\}\}$;

д) $\Gamma = \{(x;\ y) | y = x + \frac{1}{2} \cdot [2x]\}$;

е) $\Gamma = \{(x;\ y) | |x| + x = |y| + y\}$;

є) $\Gamma = \{(x;\ y) | x - 1 \le y \le x + 1\}$;

ж) $\Gamma = \{(x;\ y) | [\sqrt{x}] = [y]\}$;

з) $\Gamma = \{(x;\ y) | [x] = \{y\}\}$;

и) $\Gamma = \{(x;\ y) | [x] = [y]\}$;

і) $\Gamma = \{(x;\ y) | x = \mathrm{sgn}\, y\}$;

ї) $\Gamma = \{(x;\ y) | \{x\} = \{y\}\}$;

й) $\Gamma = \{(x;\ y) | \mathrm{sgn}(x + y) = [x] + \{y\}\}$;

к) $\Gamma = \{(x;\ y) | \mathrm{sgn}(x - y) = [x] + [y]\}$;

л) $\Gamma = \{(x;\ y) | [x] = 2\{y\}\}$;

м) $\Gamma = \{(x;\ y) | \mathrm{sgn}(x + y) = \mathrm{sgn}\, x\}$;

н) $\Gamma = \{(x;\ y) | |x| + |y| \le 2\}$;

о) $\Gamma = \{(x;\ y) \mid \{x\} + \{y\} = [x + y]\}$;

п) $\Gamma = \{(x;\ y) \mid \max\{x,\ y\} = 1\}$;

р) $\Gamma = \{(x;\ y) \mid \min\{x^2,\ y\} = 1\}$;

с) $\Gamma = \{(x;\ y) \mid \min\{x;\ 1\} + \max\{y;\ 2\} \le 2\}$;

т) $\Gamma = \{(x;\ y) \mid x^2 + 6x + y^2 - 8y \le 0\}$.

16. Для заданого бінарного відношення $\Gamma \subset X \times Y$ побудувати першу та другу проекції Γ_1, Γ_2, якщо:

1) $X = Y = \mathrm{R}^2$ та

$$\Gamma = \left\{ ((x_1;\ x_2);\ (y_1;\ y_2)) \,\middle|\, y_1 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1};\ y_2 = \frac{x_1^2 + 1}{x_2} \right\};$$

2) $X = (0;\ +\infty)^3$, $Y = \mathrm{R}$ та

$$\Gamma = \left\{ ((x_1;\ x_2;\ x_3);\ y) \,\middle|\, y \ge (x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) \right\};$$

3) $X = \mathrm{R}^3$, $Y = \mathrm{R}$ та $\Gamma = \left\{ ((x_1;\ x_2;\ x_3);\ y) \,\middle|\, y = \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_3^2} + \frac{x_3^2}{x_1^2} \right\}$;

4) $X = \mathrm{R}^2$, $Y = \mathrm{R}$ та

$$\Gamma = \left\{ ((x_1;\ x_2);\ y) \,\middle|\, y = \sqrt{3x_1 + 1} + \sqrt{3x_2 + 1} \wedge x_1 + x_2 = 1 \right\};$$

5) $X = \mathrm{N}$, $Y = (\mathrm{Z} \setminus \{0\})^3$ та

$$\Gamma = \left\{ (x;\ (y_1;\ y_2;\ y_3)) y_1^{x+2} + y_2^{x+2} = y_3^{x+2} \right\}.$$

17. Бінарне відношення $\Gamma \subset \mathrm{R} \times [0;\ 1]$ задане рівністю $\Gamma = \{(x;\ y) \mid (x \in \mathrm{Q} \wedge y = 1) \vee (x \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q} \wedge y = 0)\}$. Чи можна для випадків:

1) $\Gamma_1(a) = \Gamma_1(b) = \{0\}$;

2) $\Gamma_1(a) = \Gamma_1(b) = \{1\}$;

3) $\Gamma_1(a) = \{0\},\ \Gamma_1(b) = \{1\}$;

4) $\Gamma_1(a) = \{0\},\ \Gamma_1(b) = \{1\}$ та $b \ne 0$

однозначно знайти $\Gamma_1(c)$, якщо:

а) $c = a + b$; **б)** $c = a \cdot b$; **в)** $c = a - b$; **г)** $c = \frac{a}{b}$, $b \ne 0$;

д) $c = \frac{b}{a}$, $a \ne 0$; **е)** $c = a^b$, $a, b > 0$; **є)** $c = b^a$, $a, b > 0$?

Розділ 3
ФУНКЦІЇ

Короткі теоретичні відомості

Бінарне відношення $\Gamma \subset X \times Y$ називають функціональним, якщо воно не містить різних упорядкованих пар з однаковими першими компонентами. Упорядковану трійку множин (X, Y, Γ) називають функцією (відображенням) із множини X у множину Y, якщо Γ – функціональне бінарне відношення між елементами множин X та Y. Множину X при цьому називають областю відправлення, множину Y – областю прибуття, а множину Γ – графіком відображення. Функцію часто позначають деякою літерою латинського алфавіту, наприклад f. При цьому замість $f = (X, Y, \Gamma)$ пишуть $f : X \to Y$, а графік відображення f позначають $\Gamma(f)$.

Першу проекцію графіка $\Gamma(f)$ функції f називають областю (множиною) визначення і позначають D_f або $D(f)$, а другу проекцію – множиною (областю) значень і позначають E_f або $E(f)$. Якщо $x \in D_f$ і пара $(x; y) \in \Gamma(f)$, то елемент y називають значенням функції f на елементі x, або образом елемента x при відображенні f, і позначають $f(x)$; елемент x при цьому називають прообразом елемента y і позначають $f^{-1}(y)$. Функцію f також позначають таким чином: $x \mapsto f(x)$, $x \in D_f$.

Якщо $X = D_f$, то функцію $f : X \to Y$ називають відображенням множини X "у" множину Y і позначають $X \xrightarrow{f} Y$. Якщо при цьому ще й $Y = E_f$, то таку функцію називають відображенням множини X "на" множину Y, або сюр'єкцією, і позначають $X \xrightarrow[на]{f} Y$. Функцію $X \xrightarrow{f} Y$, що має властивість: $\forall x_1, x_2 \in X$ з умови $f(x_1) = f(x_2)$ випливає умова $x_1 = x_2$, називають ін'єкцією.

Функцію $g = (X, Y, \Gamma_g)$ називають звуженням функції $f = (X, Y, \Gamma_f)$, якщо $\Gamma_g \subset \Gamma_f$. Часто кажуть, що функція g є звуженням функції f на множину D_g. Функцію f при цьому називають продовженням функції g на множину D_f. Звуження функції f на множину $A \subset D_f$ позначають $f\big|_A$.

Нехай задано функцію $f : X \to Y$. Тоді для довільної підмножини $A \subset D_f$ множину $\{y \in E_f \mid f^{-1}(y) \in A\}$ називають образом множини A при відображенні f і позначають символом $f(A)$. Для довільної підмножини $\widetilde{A} \subset E_f$ множину $\{x \in D_f \mid f(x) \in \widetilde{A}\}$ називають прообразом множини $\widetilde{A}$ при відображенні f і позначають символом $f^{-1}(\widetilde{A})$.

Функцію $f = (X, Y, \Gamma)$ називають оборотною, якщо бінарне відношення Γ^{-1} є функціональним між множинами Y та X, тоді функцію (Y, X, Γ^{-1}) називають оберненою до функції f і позначають f^{-1}. Оборотне відображення множини X на множину Y називають взаємно однозначним, або бієкцією, і позначають $X \overset{f}{\leftrightarrow} Y$.

Нехай задано функції $f : X \to Y$ та $g : T \to X$. Композицію відображень g та f записують у вигляді $f \circ g$, її область визначення $D_{f \circ g}$ складається з усіх таких $t \in D_g$, для яких $g(t) \in D_f$. Значення композиції на елементі $t \in D_{f \circ g}$ визначається за формулою $(f \circ g)(t) = f\big(g(t)\big)$.

Нехай задано функції $T \overset{\varphi}{\leftrightarrow} X$ та $T \xrightarrow{\psi} Y$. Тоді можна визначити функцію $X \xrightarrow{f} Y$, де $f = \psi \circ \varphi^{-1}$, яку називають параметрично заданою функцією за допомогою функцій φ та ψ. Змінну $t \in T$ називають параметром.

Нехай задане відображення $X \times Y \xrightarrow{F} \{0\}$. Якщо

$$\exists (X_1 \subset X,\, Y_1 \subset Y):\ \forall x \in X_1\ \ \exists! y = f(x) \in Y_1:\ F(x,\, y) = 0,$$

то кажуть, що рівняння $F(x,\, y) = 0$ визначає неявно задану функцію $X_1 \xrightarrow{f} Y_1$.

Для довільної множини X відображення $I_X : X \to X$ називають тотожнім або одиничним, якщо $\forall x \in X$ має місце рівність: $I_X(x) = x$.

Для довільної множини $E \subset X$ відображення $\chi_E : X \to \mathrm{R}$ називають характеристичною функцією множини E, якщо $\forall x \in X$ має місце рівність $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \in X \setminus E. \end{cases}$.

Задачі

18. Чи буде функціональним бінарне відношення Γ, якщо:

1) $\Gamma \subset \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}$ і $(x;\, y) \in \Gamma$ тоді й тільки тоді, коли виконується умова:

а) $x \,\vdots\, y$; **б)** $x + 1 = y$; **в)** $|x| + |y| = 4$; **г)** $|x| + y = 1$;

д) $x = 2$; **е)** $y = 1$; **є)** $x = \left(\sqrt{y}\right)^4$; **ж)** $x^2 = y$;

з) $x = y^2$; **и)** $x + y = |x| - |y|$;

2) $\Gamma \subset \mathrm{N} \times \mathrm{N}$ та $(x;\, y) \in \Gamma$ тоді й тільки тоді, коли виконується умова:

а) y дорівнює сумі всіх дільників числа x;

б) x дорівнює сумі всіх дільників числа y;

в) $x + y$ – просте число;

г) $x^2 + y^2 = 25$;

3) $\Gamma \subset \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ і $(x;\, y) \in \Gamma$ тоді й тільки тоді, коли виконується умова:

а) $|x| + x = |y| + y$; **б)** $y = \operatorname{sgn} x$; **в)** $[x] = [y]$; **г)** $\{x\} = [y]$;

д) $x + \left(\sqrt{y}\right)^2 = 1$; **е)** $x + \sqrt{y^2} = 1$; **є)** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$;

ж) $x = y + \sin y$; **з)** $x = 2y - \cos y$;

и) $x = y^9 + 2y^7 + 3y^5 - 5y^3 + 15y + 1$;

і) $x = y^{10} + 6y^7 + 3y^4 - 5y + 1$;

ї) $x = \sqrt{y+1} + \sqrt{y+2}$;

к) $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 2 + \sqrt{y}$;

4) Γ – бінарне відношення із задачі № 12?

19. Для функцій $f : X \to Y$, записаних у вигляді $y = f(x)$, знайдіть області визначення та множини значень, якщо:

1) $y = \cos x$ та:

а) $X = Y = \mathrm{R}$; **б)** $X = \mathrm{R},\, Y = [-1;\, 1]$; **в)** $X = \mathrm{R},\, Y = [0;\, 1]$;

г) $X = \mathrm{R},\, Y = \{-1;\, 0;\, 1\}$; **д)** $X = [-1;\, 1],\, Y = \mathrm{R}$;

е) $X = [-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}],\, Y = \mathrm{R}$; **є)** $X = (-\pi;\, \pi),\, Y = (0;\, 1)$;

ж) $X = [0;\, 2\pi],\, Y = [-1;\, 1]$; **з)** $X = [0;\, \pi],\, Y = [-1;\, 0]$;

и) $X = \{\pi n \mid n \in \mathrm{Z}\},\, Y = [0;\, 1]$;

2) $y = [x]$ та:

а) $X = Y = \mathrm{R}$; **б)** $X = \mathrm{R},\, Y = \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}$; **в)** $X = \mathrm{R},\, Y = \mathrm{Z}$;

г) $X = \mathrm{R},\, Y = \mathrm{N}$; **д)** $X = \mathrm{N},\, Y = \{1;\, 2;\, ...;\, n\},\, n \in \mathrm{N}$;

е) $X = \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q},\, Y = \mathrm{N}$; **є)** $X = Y = \mathrm{Z}$; **ж)** $X = \mathrm{R},\, Y = \{0;\, 1\}$;

3) $y = 10 - x$ та:

а) $X = Y = \mathrm{R}$; **б)** $X = Y = \mathrm{R}^+$; **в)** $X = \mathrm{R}^+,\, Y = \mathrm{R}^-$;

г) $X = \mathrm{N},\, Y = \mathrm{Z}$; **д)** $X = Y = \mathrm{Z}$; **е)** $X = Y = [-10;\, 10]$;

є) $X = \{0;\, 1;\, ...;\, 10\},\, Y = \mathrm{R}$; **ж)** $X = \mathrm{R},\, Y = \mathrm{Q}$;

4) $y = \begin{cases} -x^3,\; x < 0, \\ x^2,\; x \ge 0, \end{cases}$ та:

а) $X = Y = \mathrm{R}$; **б)** $X = Y = \mathrm{R}^{+}$; **в)** $X = \mathrm{R}^{-}$, $Y = \mathrm{R}^{+}$;

г) $X = Y = \mathrm{R}^{-}$; **д)** $X = \mathrm{Z}, Y = \mathrm{R}$; **е)** $X = Y = \mathrm{Z}$;

5) $y = \left\{ (\sqrt{x})^2 \right\}$ та:

а) $X = Y = \mathrm{R}$; **б)** $X = Y = \mathrm{R}^{+}$; **в)** $X = \mathrm{R}^{+}, Y = \mathrm{R}$;

г) $X = Y = [0; 1]$; **д)** $X = \mathrm{R}, Y = (0; 1)$; **е)** $X = \mathrm{R}, Y = \mathrm{Z}$;

є) $X = \mathrm{Z}, Y = \mathrm{R}$; **ж)** $X = \mathrm{R}^{+}, Y = [0; \frac{1}{2}]$;

з) $X = (\frac{1}{4}; \frac{1}{2}), Y = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$; **и)** $X = \mathrm{Q}, Y = \{\frac{1}{2}\}$;

6) $y = \dfrac{1}{\sin \pi x}$ та:

а) $X = Y = \mathrm{R}$; **б)** $X = \mathrm{R}, Y = [-1; 1]$; **в)** $X = [-1; 1], Y = \mathrm{R}$;

г) $X = \mathrm{R}^{+}, Y = [0; 10]$; **д)** $X = \mathrm{R}, Y = (1; +\infty)$;

е) $X = \mathrm{Z}, Y = \mathrm{R}$; **є)** $X = Y = [0; 2]$; **ж)** $X = Y = \mathrm{R}^{+}$;

7) $y = \begin{cases} [x], \; x \geq 0, \\ \{x\}, \; x < 0, \end{cases}$ та:

а) $X = Y = \mathrm{R}$; **б)** $X = \mathrm{R}, Y = \mathrm{Z}$; **в)** $X = [-1; 1], Y = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$;

г) $X = [-2;\ 2], Y = [0; 1]$; **д)** $X = [-5; -4] \cup [4; 5], Y = \mathrm{R}^{+}$;

е) $X = \mathrm{Z}, Y = \mathrm{R}$; **є)** $X = Y = \mathrm{Q}$; **ж)** $X = \{\frac{3}{2} n \mid n \in \mathrm{Z}\}, Y = \mathrm{R}$;

8) $y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, \; x < 0, \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x, \;\; x \geq 0, \end{cases}$ та:

а) $X = Y = \mathrm{R}$; **б)** $X = (-\infty; 3), Y = (-\infty; 0)$;

в) $X = [-2; 2], Y = [-1; 1]$; **г)** $X = \mathrm{R}, Y = \mathrm{R}^{-}$;

д) $X = (-3; 3), Y = \mathrm{R}$; **е)** $X = \mathrm{R}, Y = (-1; 0)$;

є) $X = Y = \mathrm{Z}$; **ж)** $X = \mathrm{R}, Y = \{-1; 0; 1\}$;

9) $y = \begin{cases} x, \;\; x \in \mathrm{Q}, \\ \frac{1}{x}, \; x \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}, \end{cases}$ та:

а) $X = Y = \mathrm{R}$; **б)** $X = Y = [-2; 2]$;

в) $X=(-1;+\infty), Y=\mathrm{Q}\bigcup\left(\sqrt{2}\right)$; **г)** $X=Y=[-1;1]$;

д) $X=\mathrm{R}, Y=\mathrm{Q}$; **е)** $X=\mathrm{Q}, Y=\mathrm{R}$;

є) $X=\mathrm{Q}, Y=\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}$; **ж)** $X=[-2;2], Y=[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$;

з) $X=\mathrm{R}^+, Y=(0;1)$; **и)** $X=\mathrm{R}^-, Y=(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4})$;

10) $y=\begin{cases}1, & x\in\mathrm{Q}\wedge x>0,\\ 0, & x\in\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}\wedge x>0,\\ -x-2, & x\le 0,\end{cases}$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=Y=\mathrm{Z}$; **в)** $X=Y=[-1;1]$;

г) $X=Y=[-2;2]$; **д)** $X=\mathrm{Q}, Y=\mathrm{R}$; **е)** $X=\mathrm{R}, Y=\mathrm{Q}$;

є) $X=\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}, Y=\mathrm{R}$; **ж)** $X=Y=[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$;

з) $X=(-4;4), Y=(-1;1)$; **и)** $X=\mathrm{R}, Y=\{-2;-1;0;1;2\}$;

11) $y=\begin{cases}\mathrm{arcctg}\,x, & x\le 0,\\ [\sin\frac{\pi}{2}x], & x>0,\end{cases}$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=Y=[0;1]$; **в)** $X=Y=[-1;1]$;

г) $X=\mathrm{R}, Y=(0;1)$; **д)** $X=\mathrm{R}, Y=\mathrm{Z}$; **е)** $X=Y=[-3;3]$;

є) $X=\mathrm{Z}, Y=(-1;1)$; **ж)** $X=(-\infty;4), Y=\mathrm{R}^+$;

12) $y=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\le 0,\\ \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x), & x>0,\end{cases}$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=\mathrm{R}, Y=[-1;1]$;

в) $X=\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}, Y=\mathrm{Z}$; **г)** $X=\mathrm{Q}, Y=\mathrm{R}$;

д) $X=\mathrm{R}, Y=(-1;+\infty)$; **е)** $X=\mathrm{R}, Y=\mathrm{R}^-$;

13) $y=\mathrm{C}x$ (доповнення множини x до множини R) та:

а) $X=Y=\exp(\mathrm{R})$; **б)** $X=Y=\exp(\mathrm{R}^+)$;

в) $X=\exp(\mathrm{R}^+), Y=\exp(\mathrm{R}^-)$; **г)** $X=\exp(\mathrm{R}), Y=\exp(\mathrm{R}^-)$;

14) $y=\chi_E(x)$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$, $E=\mathrm{Z}$; **б)** $X=\mathrm{R}, Y=\mathrm{N}$, $E=\mathrm{Z}$;

в) $X=Y=\mathrm{R}$, $E=\mathrm{R}$; **г)** $X=Y=\mathrm{R}$, $E=\mathrm{Q}$.

20. Для кожного пункту задачі 19 з'ясуйте, чи буде наведена функція $f: X \to Y$ бієкцією, відображенням "на", "в" або не буде належати до жодного з перелічених типів.

21. Чи буде для функцій $f: X \to Y$ звуження на задану множину A ін'єкцією; чи існує бієкція $\mathrm{R} \overset{g}{\leftrightarrow} Y$, для якої виконується рівність: $f\Big|_A = g\Big|_A$, якщо:

1) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 1, \\ 1, & -1 \le x \le 1, \\ x^2, & x > 1, \end{cases}$ $X = Y = \mathrm{R}$ та:

а) $A = (-\infty; -1]$; **б)** $A = [-2; 1]$; **в)** $A = [1; +\infty)$;
г) $A = \mathrm{Z}$; **д)** $A = \mathrm{N}$; **е)** $A = [-10; 0] \cup [1; 2]$;

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathrm{Q}, \\ 0, & x \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}, \end{cases}$ $X = Y = \mathrm{R}$ та:

а) $A = \mathrm{Q}$; **б)** $A = \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}$; **в)** $A = [0; 1]$; **г)** $A = \mathrm{N}$;
д) $A = \{1\}$; **е)** $A = \{0; \sqrt{2}\}$;

3) $f(x) = \sqrt{|x|}$ $X = Y = \mathrm{R}$ та:

а) $A = (-\infty; 0)$; **б)** $A = (-1; +\infty)$; **в)** $A = (-\infty; -1) \cup (0; 1)$;
г) $A = (-1; 1)$; **д)** $A = \mathrm{Z}$; **е)** $A = \mathrm{N}$;

4) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x < 0, \\ \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}, & x \ge 0, \end{cases}$ $X = Y = \mathrm{R}$ та:

а) $A = (-\infty; 0)$; **б)** $A = \mathrm{R}^+$; **в)** $A = (-\infty; 3)$;
г) $A = (-\infty; 1)$; **д)** $A = (-1; 1)$; **е)** $A = (-5; 5)$;
є) $A = (0; 2)$; **ж)** $A = (0; 1) \cup (1; 2)$;

5) $f(x) = \sin x$ $X = Y = \mathrm{R}$ та:

а) $A = \mathrm{R}^+$; **б)** $A = [0; 2\pi]$; **в)** $A = (-\pi; \pi]$;
г) $A = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; **д)** $A = (0; \frac{\pi}{2}) \cup (\pi; \frac{3\pi}{2})$; **е)** $A = \{\frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathrm{Z}\}$;

6) $f(x)=\begin{cases} x, \ x\in \mathrm{Q}, \\ 0, \ x\in \mathrm{R}\setminus \mathrm{Q}, \end{cases}$ $X=Y=\mathrm{R}$ та:

а) $A=\mathrm{Q}$; **б)** $A=\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}$; **в)** $A=\mathrm{Z}$;

г) $A=\mathrm{N}$; **д)** $A=\mathrm{Z}\bigcup\{\sqrt{2}\}$; **е)** $A=\mathrm{N}\bigcup\{\pi\}$;

7) $f(x)$ – кількість дільників числа x, $X=Y=\mathrm{N}$ та:

а) A – множина простих чисел; **б)** $A=\{2^n \mid n\in \mathrm{N}\}$;

в) A – множина одноцифрових чисел; **г)** $A=\{2\cdot 3^n \mid n\in \mathrm{N}\}$;

8) $f(x)=[x]$ $X=\mathrm{R},\ Y=\mathrm{Z}$ та:

а) $A=\mathrm{Z}$; **б)** $A=\mathrm{N}$; **в)** $A=\{n+\frac{1}{2}\mid n\in\mathrm{Z}\}$; **г)** $A=[0;1)$?

22. Перевірити, чи справджуються такі твердження.

1) Якщо для множин A, B існує бієкція $A\overset{f}{\leftrightarrow}B$, то обов'язково існує бієкція $\mathrm{R}\overset{g}{\leftrightarrow}\mathrm{R}$, для якої $f\Big|_A = g\Big|_A$, якщо:

а) $A, B\neq \mathrm{R}$; **б)** $A=\mathrm{R}\setminus[a;b],\ B=\mathrm{R}\setminus[c;d]$.

2) Існує функція $X\xrightarrow{f}Y$ і непорожня множина $A\subset D_f$, для якої виконуються умови $f(D_f\setminus A)\neq E_f\setminus f(A)$, а також:

а) $f(D_f\setminus A)\subset E_f\setminus f(A)$; **б)** $f(D_f\setminus A)\supset E_f\setminus f(A)$;

в) жодна з множин $f(D_f\setminus A)$ та $E_f\setminus f(A)$ не міститься одна в іншій.

3) Для функцій f, g, h, які діють із X "в" X, справджуються такі рівності:

а) $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$; **б)** $f\circ g=g\circ f$;

в) $f\circ I_X=I_X\circ f=f$.

4) Для оборотної функції $X\xrightarrow{f}X$ справджуються такі рівності:

а) $f^{-1}\circ f=I_X$; **б)** $f\circ f^{-1}=I_X$.

5) Для функції $X \underset{на}{\overset{f}{\to}} Y$ і довільних множин $A, B \subset X$ f – бієкція тоді й тільки тоді, коли справджується умова:

а) $f(A \bigcap B) = f(A) \bigcap f(B)$; **б)** $f(A \bigcap B) = f(A) \bigcap f(B)$;

в) f – ін'єкція; **г)** f – сюр'єкція;

д) f – ін'єкція та сюр'єкція.

6) Якщо для функцій $X \overset{f}{\to} Y$ та $Y \overset{g}{\to} X$ виконується умова:

а) $g \circ f = I_X$, то g – ін'єкція, f – сюр'єкція;

б) $g \circ f = I_X$ та $f \circ g = I_Y$, то f, g – бієкція.

23. Для функції $f : X \to Y$ і множин $A, B, A_n \in D_f$, $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{A}_n \in E_f$, де $n \in \mathrm{N}$, доведіть такі твердження:

1) $A \subset B \;\Rightarrow\; f(A) \subset f(B)$;

2) $\widetilde{A} \subset \widetilde{B} \;\Rightarrow\; f(\widetilde{A}) \subset f(\widetilde{B})$;

3) $f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$;

4) $f(A \bigcup B) = f(A) \bigcup f(B)$;

5) $f\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(A_n)$;

6) $f\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f(A_n)$;

7) $f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$;

8) $f^{-1}(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) = f^{-1}(\widetilde{A}) \cap f^{-1}(\widetilde{B})$;

9) $f(A \Delta B) \subset f(A) \Delta f(B)$;

10) $f^{-1}(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) = f^{-1}(\widetilde{A}) \cup f^{-1}(\widetilde{B})$;

11) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n\right) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\widetilde{A}_n)$;

12) $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(\widetilde{A}_n)$;

13) $f^{-1}(A\setminus B)=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$;

14) $f^{-1}(A\Delta B)=f^{-1}(A)\Delta f^{-1}(B)$;

15) $f(\mathrm{C}_{D_f}A)\subset \mathrm{C}_{E_f}f(A)$;

16) $f^{-1}(\mathrm{C}_{E_f}\widetilde{A})=\mathrm{C}_{D_f}f^{-1}(\widetilde{A})$;

17) $f(A)=\text{пр}_2(\Gamma_f(f)\bigcap(A\times E_f))$;

18) $f^{-1}(\widetilde{A})=\text{пр}_1(\Gamma_f(f)\bigcap(D_f\times\widetilde{A}))$;

19) $A\subset f^{-1}(f(A))$;

20) $\widetilde{A}=f(f^{-1}(\widetilde{A}))$;

21) $f(A)\bigcap\widetilde{B}=f(A\bigcap f^{-1}(\widetilde{B}))$;

22) $f(A)\subset\widetilde{B}\ \Leftrightarrow\ A\subset f^{-1}(\widetilde{B}))$;

23) якщо $D_f\overset{f}{\leftrightarrow}E_f$, то:

а) $f(A\bigcap B)=f(A)\bigcap f(B)$; **б)** $f(A\setminus B)=f(A)\setminus f(B)$;

в) $f(A\Delta B)=f(A)\Delta f(B)$; **г)** $A=f^{-1}(f(A))$.

24. Для функцій $f:X\to Y$ знайдіть образ множини A та прообраз множини $\widetilde{A}$, якщо:

1) $X=Y=R$, $f(x)=4-x^2$ та:

а) $A=\mathrm{R}$; **б)** $A=\mathrm{R}^+$; **в)** $A=[-1;1]$;

г) $A=(-2;1)$; **д)** $A=(1;2)$; **е)** $\widetilde{A}=\mathrm{R}^-$;

є) $\widetilde{A}=[2;4]$; **ж)** $\widetilde{A}=(0;1)$; **з)** $\widetilde{A}=\mathrm{R}^+$;

и) $\widetilde{A}=[0;5]$; **і)** $\widetilde{A}=(0;4)$; **ї)** $\widetilde{A}=\{0\}$;

2) $X=Y=\{1;2;...;20\}$,

$$f(x)=\begin{cases}\textit{кількість дільників } x \textit{ при } x\le 10;\\ \textit{кількість простих менших } x \textit{ при } x\ge 11\end{cases}$$ та:

а) $A=X$; **б)** $A=\{2;4;...;20\}$; **в)** $A=\{1;2;...;12\}$;

г) $\widetilde{A}=\{1\}$; **д)** $\widetilde{A}=\{2\}$; **е)** $\widetilde{A}=\{3\}$;

є) $\widetilde{A}=\{3;4\}$; **ж)** $\widetilde{A}=Y$;

3) $X=Y=\mathrm{R}$, $f(x)=\cos x$ та:

а) $A=(0;\pi)$; **б)** $A=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$; **в)** $A=\{\pi n\mid n\in\mathrm{N}\}$;

г) $A=(-\frac{5\pi}{4};\frac{\pi}{3})$; **д)** $\widetilde{A}=(-1;1)$; **е)** $\widetilde{A}=(-\frac{1}{2};0)$;

є) $\widetilde{A}=(0;2)$; **ж)** $\widetilde{A}=\{\frac{1}{2}\}$; **з)** $\widetilde{A}=\{-1;0;1\}$;

4) $X=Y=\mathrm{R}$, $f(x)=[x]$ та:

а) $A=\mathrm{R}^+$; **б)** $A=\mathrm{Z}$; **в)** $A=\mathrm{Q}$;

г) $A=[0;1]$; **д)** $\widetilde{A}=\{1\}$; **е)** $\widetilde{A}=\mathrm{N}$;

є) $\widetilde{A}=\mathrm{Z}^-$; **ж)** $\widetilde{A}=[-1;1]$; **з)** $\widetilde{A}=\mathrm{Z}\setminus\{0\}$;

5) $X=Y=\mathrm{R}$, $f(x)=\{\sqrt{x}\}$ та:

а) $A=(0;+\infty)$; **б)** $A=[-1;1]$; **в)** $A=(0;1)$;

г) $A=\mathrm{N}$; **д)** $\widetilde{A}=\{0\}$; **е)** $\widetilde{A}=\{0;1\}$;

є) $\widetilde{A}=[0;\frac{1}{2}]$; **ж)** $\widetilde{A}=(0;1)$; **з)** $\widetilde{A}=\{\frac{1}{4}\}$;

6) $X=Y=\mathrm{R}$, $f(x)=\begin{cases}[x],\ x\ge 0,\\ \{x\},\ x<0,\end{cases}$ та:

а) $A=\mathrm{Z}$; **б)** $A=[-1;1]$; **в)** $A=[-3;3]$;

г) $A=\{-5;-4;4;5\}$; **д)** $A=(-6;-5)\cup(5;6)$;

е) $\widetilde{A}=\{\frac{1}{2}\}$; **є)** $\widetilde{A}=[0;1]$; **ж)** $\widetilde{A}=\{-1;0;1\}$;

з) $\widetilde{A}=(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$; **и)** $\widetilde{A}=[0;10]$; **і)** $\widetilde{A}=\mathrm{Z}^+$;

7) $X=Y=\mathrm{R}$, $f(x)=\begin{cases}\mathrm{arctg}\ x,\ x\le 0,\\ \mathrm{tg}\frac{\pi x}{2},\ x>0,\end{cases}$ та:

а) $A=\mathrm{R}$; **б)** $A=\mathrm{R}^-$; **в)** $A=(-1;1)$;

г) $A=(-3;-1)\bigcup(1;3)$; **д)** $\widetilde{A}=\{0\}$; **е)** $\widetilde{A}=(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4})$;

є) $\widetilde{A}=\{1\}$; **ж)** $\widetilde{A}=[1;\sqrt{3})$; **з)** $\widetilde{A}=\mathrm{R}^-$;

8) $X=Y=\{1;2;...;20\}$,

$f(x)$ – *найбільше просте, не більше* x та:

а) $A=\mathrm{N}$; **б)** $A=\{2n|\ n\in\mathrm{N}\}$; **в)** $A=\{10^n\ |\ n\in\mathrm{N}\}$;

г) $\widetilde{A}=\{19\}$; **д)** $\widetilde{A}=\{1001\}$; **е)** $\widetilde{A}=\{7;11;13;17\}$.

25. Для тих функцій $f:X\to Y$, що є оборотними, запишіть відповідне обернене відображення, якщо:

1) $f(x)=\mathrm{tg}\,x$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=\mathrm{R},\ Y=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$;

в $X=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}],\ Y=\mathrm{R}$; **г)** $X=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}),\ Y=\mathrm{R}$;

д) $X=(0;2\pi),\ Y=\mathrm{R}$; **е)** $X=(0;\pi),\ Y=\mathrm{R}$;

є) $X=[0;\frac{\pi}{2}],\ Y=\mathrm{R}$; **ж)** $X=(0;\frac{\pi}{2}),\ Y=\mathrm{R}$;

з) $X=\mathrm{R},\ Y=\mathrm{N}$; **и)** $X=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}),\ Y=\mathrm{Z}$;

2) $f(x)=\{x\}$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=[0;1],\ Y=\mathrm{R}$; **в)** $X=[0;1),\ Y=\mathrm{R}$;

г) $X=[0;1),\ Y=[0;1)$; **д)** $X=(0;1],\ Y=\mathrm{R}$;

е) $X=[\frac{1}{2};\frac{3}{2}),\ Y=[0;\frac{1}{2}]$; **є)** $X=(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}],\ Y=\mathrm{Z}$;

ж) $X=\mathrm{Z},\ Y=\mathrm{Q}$;

3) $f(x)=x^2$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=Y=\mathrm{R}^+$; **в)** $X=Y=\mathrm{Z}$;

г) $X=Y=\mathrm{N}$; **д)** $X=[-1;\ 0]\bigcup[2;3],\ Y=\mathrm{R}$;

е) $X=[-1;+\infty),\ Y=[10;11]$; **є)** $X=(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}],\ Y=\mathrm{Z}$;

ж) $X=\mathrm{Z},\ Y=\mathrm{Q}$;

4) $f(x)=\begin{cases}-x, \ x<0, \\ 1, \ 0\le x\le 1, \\ x-1, \ x>1,\end{cases}$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=(-\infty;\,0),\ Y=\mathrm{R}$;

в) $X=(-\infty;\,0),\ Y=(0;\,+\infty)$; **г)** $X=\mathrm{R}^-,\ Y=\mathrm{R}$;

д) $X=[0;\,1],\ Y=\mathrm{N}$; **е)** $X=Y=\mathrm{N}$;

є) $X=\mathrm{N}\setminus\{1\},\ Y=\mathrm{N}$; **ж)** $X=[1;\,+\infty),\ Y=\mathrm{R}$;

з) $X=(1;\,+\infty),\ Y=(0;\,+\infty)$;

5) $f(x)=[x]$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=\mathrm{R},\ Y=\mathrm{N}$; **в)** $X=Y=\mathrm{Z}$;

г) $X=\{\frac{1}{2}+n|n\in\mathrm{Z}^+\},\ Y=\mathrm{Z}$;

6) $f(x)=\sin x$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}],\ Y=[-1;\,1]$;

в) $X=[-\pi;\,\pi],\ Y=(0;\,1)$; **г)** $X=Y=[0;\,1]$;

7) $f(x)=\mathrm{arctg}\,x$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=Y=[0;\,1]$; **в)** $X=\mathrm{R},\ Y=(0;\,2\pi)$;

8) $f(x)=\begin{cases}x, \ x\in\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}, \\ -x, \quad x\in\mathrm{Q},\end{cases}$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=Y=\mathrm{Q}$; **в)** $X=Y=\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}$;

г) $X=Y=[-1;\,1]$; **д)** $X=Y=[0;\,1]$; **е)** $X=Y=[-1;\,2]$;

9) $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=[-2;\,10],\ Y=[-1;\,5]$;

10) $f(x)=\dfrac{2-x}{3+x}$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=Y=\mathrm{R}^-$;

11) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=Y=\mathrm{R}^+$;

12) $f(x)=\begin{cases} x, & x<-1, \\ x^2, & -1\le x\le 4, \\ 2^x, & x>4, \end{cases}$ та:

а) $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $X=[1;\,4],\ Y=[1;\,2]$;

в) $X=Y=\mathrm{R}^+$; **г)** $X=Y=\mathrm{R}^-$;

д) $X=\mathrm{R}^-,\ Y=\mathrm{R}$; **е)** $X=Y=\mathrm{Z}$;

13) $X=Y=\mathrm{R}$ та:

а) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; **б)** $f(x)=x^3-x$; **в)** $f(x)=\sqrt{x+1}$;

г) $f(x)=x|x|$; **д)** $f(x)=x^2\cdot\operatorname{sgn}x$; **е)** $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

26. Для композиції $h=f\circ g$, де $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, знайдіть область визначення та множину значень, якщо:

1) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ та:

а) $g(t)=\frac{1}{t}$; **б)** $g(t)=1+t^2$; **в)** $g(t)=t(1-t^2)$;

2) $g(t)=\operatorname{sgn}t$ та:

а) $f(x)=1+x^2$; **б)** $f(x)=x(1-x^2)$; **в)** $f(x)=1+x-|x|$;

3) $f(x)=\ln x$, $g(t)=e^t$;

4) $f(x)=e^x$, $g(t)=\ln t$;

5) $f(x)=\sin x$, $g(t)=\arcsin t$;

6) $f(x)=\arcsin x$, $g(t)=\sin t$;

7) $f(x)=\operatorname{tg}\,x$, $g(t)=\operatorname{arctg}t$;

8) $f(x)=\operatorname{arctg}x$, $g(t)=\operatorname{tg}t$;

9) $f(x)=[\,x\,]$, $g(t)=\sin t$;

10) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(t)=\frac{1-t}{1+t}$;

11) $f(x)=x^2$, $g(t)=|t|$;

12) $f(x)=|x|$, $g(t)=t^2$;

13) $f(x)=2x+|x|$, $g(t)=\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}|t|$.

27. З'ясуйте, чи визначена параметрично задана функція $X \xrightarrow{f} Y$ за допомогою відображень $T \overset{\varphi}{\leftrightarrow} X$ та $T \xrightarrow{\psi} Y$, якщо:

1) $\varphi(t) = \sin^2 t$, $\psi(t) = \cos^2 t$ та:

а) $T = X = Y = R$; **б)** $T = [0;\ 2\pi],\ X = Y = [0;\ 1]$;

в) $T = [0;\ \frac{\pi}{2}],\ X = Y = [0;\ 1]$; **г)** $T = [6\pi;\ \frac{13\pi}{2}],\ X = Y = [0;\ \frac{1}{2}]$;

2) $\varphi(t) = \dfrac{1+t}{1-t}$, $\psi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ та:

а) $T = X = Y = R$; **б)** $T = R,\ X = Y = R^+$;

в) $T = R^+,\ X = Y = R$; **г)** $T = [2;\ 3],\ X = R,\ Y = [0;\ 1]$;

д) $T = [0;\ 1) \bigcup (1;\ +\infty),\ X = R \setminus \{1\},\ Y = R^+ \setminus \{\frac{1}{2}\}$;

3) $\varphi(t) = t + \dfrac{1}{t}$, $\psi(t) = t + \dfrac{1}{t^2}$ та:

а) $T = X = Y = R$; **б)** $T = (-\infty;\ 0),\ X = Y = R$;

в) $T = (-\infty;\ 0),\ X = (-\infty;\ -2),\ Y = R$;

г) $T = (0;+\infty),\ X = Y = (2;\ +\infty)$;

д) $T = [-1;\ 1],\ X = (-\infty;\ -2] \bigcup [2;\ +\infty),\ Y = R^+$;

е) $T = (0;\ +\infty),\ X = Y = R$; **є)** $T = [-1;\ 0),\ X = R,\ Y = R^+$;

4) $\varphi(t) = \sin t$, $\psi(t) = \cos t$ та:

а) $T = X = Y = R$; **б)** $T = X = Y = [0;\ 1]$;

в) $T = [0;\ \frac{\pi}{2}],\ X = Y = [-1;\ 1]$; **г)** $T = [0;\ \frac{\pi}{2}],\ X = Y = [0;\ 1]$;

5) $\varphi(t) = t - \sin t$, $\psi(t) = 1 - \cos t$ та:

а) $T = X = Y = R$; **б)** $T = X = Y = R^+$;

в) $T = X = Y = [0;\ 2\pi]$; **г)** $T = X = Y = [0;\ \frac{\pi}{2}]$;

6) $\varphi(t) = 2t + |t|$, $\psi(t) = 5t^2 + 4t|t|$ та:

а) $T = X = Y = R$; **б)** $T = X = Y = [0;\ 1]$;

7) $\varphi(t) = sh\,t$, $\psi(t) = ch\,t$ та:

а) $T = X = Y = R$; **б)** $T = X = Y = R^+$;

в) $T = X = Y = \mathrm{R}^-$; **г)** $T = X = \mathrm{R}^-$, $Y = \mathrm{R}^+$;

8) $\varphi(t) = \sin^3 t$, $\psi(t) = \cos^3 t$ та:

а) $T = X = Y = \mathrm{R}$; **б)** $T = X = Y = [0;\ 2\pi]$;

в) $T = [-\frac{\pi}{2};\ 0]$, $X = [0;\ 1]$, $Y = [-1;\ 0]$;

г) $T = [0;\ \frac{\pi}{2}]$, $X = Y = [0;\ 1]$;

9) $\varphi(t) = t^2 e^t$, $\psi(t) = \ln t$, $T = X = (0;\ +\infty)$, $Y = \mathrm{R}$;

10) $\varphi(t) = t(1 - t^2)$, $\psi(t) = e^t$, $T = (0;\ \frac{2}{3})$, $X = Y = \mathrm{R}$.

28. Для відображення $X \times Y \xrightarrow{F} \{0\}$ знайдіть звуження функції F на множину $X_1 \times Y_1 \subset X \times Y$, яке визначає неявно задану функцію $X_1 \xrightarrow{f} Y_1$, що задовольняє умову $F(x, f(x)) = 0$, якщо:

1) $F(x,\ y) = x^2 + y^2 - c$ та:

а) $c = 0$, $X = Y = \mathrm{R}$; **б)** $c = -1$, $X = Y = \mathrm{R}$;

в) $c = 1$, $X = \mathrm{R}$, $Y = \mathrm{R}^+$; **г)** $c = 4$, $X = (-2;\ 0)$, $Y = (0;\ 2)$;

2) $F(x,\ y) = y + |\,y\,| - x - |\,x\,| - c$ та:

а) $c = 0$, $X = Y = \mathrm{R}^+$; **б)** $c = 0$, $X = Y = \mathrm{R}^-$;

в) $c = 1$, $X = Y = \mathrm{R}$; **г)** $c = 1$, $X = Y = [-1;\ 1]$;

д) $c = 0$, $X = Y = [2;\ 3]$;

3) $F(x,\ y) = x - y^3 - y - c$ та:

а) $c = 0$, $X = Y = \mathrm{R}$; **б)** $c = 1$, $X = Y = \mathrm{R}$;

4) $F(x,\ y) = x - y^4 + 2y^2 - c$ та:

а) $c = 1$, $X = Y = \mathrm{R}$; **б)** $c = -1$, $X = Y = \mathrm{R}$;

в) $c = 0$, $X = \mathrm{R}$, $Y = [1;\ +\infty)$;

г) $c = 0$, $X = [-1;\ 1]$, $Y = [0;\ 1]$;

5) $F(x,\ y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - c$ та:

а) $c = 0$, $X = Y = \mathrm{R}^+$; **б)** $c = 1$, $X = Y = [0;\ 1]$;

в) $c = 2$, $X = Y = [1;\ 4]$; **г)** $c = 4$, $X = [1;\ 9]$, $Y = [4;\ 16]$;

6) $F(x,\ y)=\sin x-\sin y-c$ та:

а) $c=0$, $X=Y=\mathrm{R}$; **б)** $c=0$, $X=Y=[0;\ \frac{\pi}{2}]$;

в) $c=0$, $X=Y=[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$; **г)** $c=1$, $X=[0;\frac{\pi}{2}]$, $Y=[-\frac{\pi}{2};0]$;

7) $F(x,\ y)=|x|+|y|-c$ та:

а) $c=1$, $X=Y=[0;\ 1]$; **б)** $c=2$, $X=Y=[-2;\ 0]$.

29. Для відображення $X\times Y\xrightarrow{F}\{0\}$ знайдіть явний вигляд функції $X\xrightarrow{f}Y$, що задовольняє умову $F(x,f(x))=0$, якщо:

1) $F(x,\ y)=\cos x+\sin y$, $X=[\pi;2\pi]$ та:

а) $Y=[\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}]$; **б)** $Y=[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}]$;

2) $F(x,\ y)=\sin x-\cos y$, $X=[\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}]$ та $Y=[4\pi;5\pi]$;

3) $F(x,\ y)=x^2+y^2-8x-6y$, $X=[-2;\ 8]$ та $Y=[-1;4]$;

4) $F(x,\ y)=\min\{x;\ y\}-1$, $X=(1;\ +\infty)$ та $Y=[0;\ +\infty)$.

Розділ 4
УПОРЯДКОВАНІ ПРОСТОРИ

Короткі теоретичні відомості

Нехай задано множину M. Для деяких упорядкованих пар $(a;b)$, де $a, b \in M$, визначимо бінарне відношення $\sigma \subset M \times M$, яке задовольняє такі аксіоми:

1) $\forall a \in M \ \ (a; a) \in \sigma$ (*рефлективність*);

2) якщо $(a; b) \in \sigma$ та $(b; a) \in \sigma$, то $a = b$ (*антисиметричність*);

3) якщо $(a; b) \in \sigma$ та $(b; c) \in \sigma$, то $(a; c) \in \sigma$ (*транзитивність*).

У такому випадку бінарне відношення σ називають відношенням часткового порядку, що задане на множині M. Упорядковану пару $\Omega = (M; \sigma)$ називають частково упорядкованим простором. Елементи множини M називають елементами (точками) частково упорядкованого простору. Точки $a, b \in M$ називають порівнянними, якщо вони перебувають у відношенні σ, тобто або $(a; b) \in \sigma$, або $(b; a) \in \sigma$, інакше – непорівнянними. Якщо частково упорядкований простір не містить непорівнянних елементів, то він називається лінійно упорядкованим простором, або просто упорядкованим простором. Разом з позначенням $(a; b) \in \sigma$ також уживають позначення $a \, \sigma \, b$.

Визначимо в частково упорядкованому просторі Ω відношення $\sigma^{<}$ (узагальнення відношення "$<$" – менше) таким чином:

$$(a; b) \in \sigma^{<} \overset{def}{\Leftrightarrow} (a; b) \in \sigma^{\leq} \ \wedge \ a \neq b.$$

Нехай $\Omega = (M; \sigma)$ – частково упорядкований простір, X – непорожня підмножина множини M. Елемент $x_{\max} \in X$

$(x_{\min} \in X)$ називають найбільшим (найменшим) елементом множини X, якщо $\forall x \in X \;\; x \,\sigma\, x_{\max} \;\; (x_{\min} \,\sigma\, x)$. Елемент $\overline{x} \in M$ ($\underline{x} \in M$) називають мажорантою (мінорантою) множини X, якщо $\forall x \in X \;\; x \,\sigma\, \overline{x} \;\; (\underline{x} \,\sigma\, x)$. Якщо множина має мажоранту (міноранту), то її називають обмеженою зверху (знизу). Якщо множина одночасно обмежена зверху та знизу, то її називають обмеженою.

Найменшу з мажорант множини X, якщо вона існує, називають верхньою гранню множини X, або супремумом, і позначають $\sup X$. Аналогічно найбільшу з мінорант множини X, якщо вона існує, називають нижньою гранню множини X, або інфімумом, і позначають $\inf X$.

Упорядкований простір Ω називають повним, якщо в ньому кожна непорожня обмежена зверху множина має супремум. У повному упорядкованому просторі кожна непорожня й обмежена знизу множина має інфімум.

Визначимо в упорядкованому просторі $\Omega = (M; \sigma)$ для заданих точок $a, b \in M$ такі спеціальні множини:

сегмент $[a; b] = \{x \in M \mid a \,\sigma\, x \wedge x \,\sigma\, b\}$;

інтервал $(a; b) = \{x \in M \mid a \,\sigma^{<}\, x \wedge x \,\sigma^{<}\, b\}$;

півінтервали $[a; b) = \{x \in M \mid a \,\sigma\, x \wedge x \,\sigma^{<} b\}$ та

$(a; b] = \{x \in M \mid a \,\sigma^{<} x \wedge x \,\sigma\, b\}$;

промені: $\{x \in M \mid a \,\sigma\, x\}$, $\{x \in M \mid a \,\sigma^{<} x\}$, $\{x \in M \mid x \,\sigma\, b\}$ та

$\{x \in M \mid x \,\sigma^{<} b\}$.

Нехай x_0 – не найбільший і не найменший елемент множини M в упорядкованому просторі $\Omega = (M; \sigma)$. Множину $O(x_0)$ називають околом точки x_0, якщо $\exists a, b \in M :\; x_0 \in (a; b) \subset O(x_0)$. Якщо x_0 – найбільший (найменший) елемент множини M, то множину $O(x_0)$ називають околом точки x_0, якщо $\exists a \in M$: $(a; x_0] \subset O(x_0)$ $\left(\exists b \in M: [x_0; b) \subset O(x_0)\right)$.

Множину G в упорядкованому просторі $\Omega = (M; \sigma)$ називають відкритою, якщо вона або порожня, або є околом кожної своєї точки. Точку $x_0 \in M$ називають внутрішньою точкою множини E, якщо ця множина є околом точки x_0. Сукупність усіх внутрішніх точок множини E називають внутрішністю множини і позначають $\mathrm{int}\, E$.

Множину F в упорядкованому просторі $\Omega = (M; \sigma)$ називають замкненою, якщо її доповнення $\mathrm{C}F$ відкрите. Точку $x_0 \in M$ називають точкою дотику (дотикання) множини E, якщо для будь-якого околу $O(x_0)$ точки x_0 виконується умова $O(x_0) \bigcap E \neq \varnothing$. Сукупність усіх точок дотику множини E називають замиканням множини і позначають $\mathrm{cl}\, E$.

Множину A в упорядкованому просторі $\Omega = (M; \sigma)$ називають щільною в множині B, якщо $B \subset \mathrm{cl}\, A$. Множину, яка щільна в множині M, називають скрізь щільною. Множина A ніде не щільна в просторі Ω, якщо вона не щільна в жодній відкритій множині $B \neq \varnothing$ цього простору.

Відношення часткового порядку σ певною мірою узагальнює відношення "$\leq$" (менше або дорівнює) для чисел на дійсній осі, а тому поряд з позначенням $(a; b) \in \sigma$ або $a \,\sigma\, b$ будемо вживати також позначення $a \leq b$, навіть якщо йдеться не про відношення "$\leq$" для дійсних чисел, за умови, що це позначення не викличе плутанини.

Так само, якщо не буде виникати плутанина, промені $\{x \in M \mid a \,\sigma\, x\}$, $\{x \in M \mid a \,\sigma^{<}\, x\}$, $\{x \in M \mid x \,\sigma\, b\}$ та $\{x \in M \mid x \,\sigma^{<}\, b\}$ будемо позначати відповідно через $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ та $(-\infty, b)$.

Якщо позначення відношення часткового порядку σ замінимо на позначення "$\leq$", то протилежне відношення σ^{-1} позначатимемо символом "$\geq$".

Задачі

30. Перевірте, чи справджуються такі твердження.

1) Якщо σ_i, $i \in \mathrm{N}$ – сукупність відношень часткового порядку, що визначні на M, то також відношенням часткового порядку на M буде відношення σ, де:

а) $\sigma = \sigma_1 \bigcup \sigma_2$; **б)** $\sigma = \sigma_1 \bigcap \sigma_2$; **в)** $\sigma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma_i$; **г)** $\sigma = \bigcap_{i=1}^{\infty} \sigma_i$;

д) $\sigma = \sigma_1 \setminus \sigma_2$; **е)** $\sigma = \sigma_1 \Delta \sigma_2$; **є)** $\sigma = \sigma_1^{-1}$; **ж)** $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$.

2) Якщо σ_1, σ_2 – відношення часткового порядку, що визначні на M_1, M_2, то відношенням часткового порядку на $M_1 \times M_2$ буде відношення σ, якщо

$a = (a_1, a_2) \in M_1 \times M_2$, $b = (b_1, b_2) \in M_1 \times M_2$ та:

а) $a \sigma b \iff a_1 \sigma_1 b_1 \wedge a_2 \sigma_2 b_2$;

б) $a \sigma b \iff a_1 \sigma_1 b_1 \wedge b_2 \sigma_2 a_2$;

в) $a \sigma b \iff a_1 \sigma_1^{<} b_1 \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 \sigma_2 b_2)$;

г) $a \sigma b \iff a_1 \sigma_1^{<} b_1 \vee a_2 \sigma_2^{<} b_2 \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2)$.

3) Якщо L – множина всіх прямих на координатній площині XOY, то відношення σ є відношенням часткового порядку на L, де $m, n \in L$ та:

а) $m \sigma n \iff m \| n$;

б) $m \sigma n \iff m \perp n$;

в) $m \sigma n \iff m = n$;

г) $m \sigma n \iff k_1 \leq k_2$, де прямі m, n відповідно задаються рівняннями $y = k_1 x$ та $y = k_2 x$;

д) $m \sigma n \Leftrightarrow k_1 \le k_2 \wedge b_1 \le b_2$, де прямі m, n відповідно задаються рівняннями $y = k_1 x + b_1$ та $y = k_2 x + b_2$.

4) Якщо у п. **1)–3)** цієї задачі утворене відношення σ є відношенням часткового порядку, то воно також є відношенням лінійного порядку за умови, що всі задані відношення σ_i, $i \in \mathrm{N}$ є відношеннями лінійного порядку.

31. Для наведених нижче упорядкованих пар $\Omega = (M; \sigma)$, де M – множина, а σ – визначене на $M \times M$ бінарне відношення, з'ясуйте, чи буде ця множина лінійно упорядкованим або частково упорядкованим простором. В останньому випадку вкажіть пару непорівнянних елементів простору. Тут вважаємо, що $a, b \in M$ та:

1) $M = \mathrm{R}$ та:

а) $a \sigma b \Leftrightarrow a \le b$; **б)** $a \sigma b \Leftrightarrow a < b$;

в) $a \sigma b \Leftrightarrow a = b$; **г)** $a \sigma b \Leftrightarrow a \ge b$;

д) $a \sigma b \Leftrightarrow ab \le 0$; **е)** $a \sigma b \Leftrightarrow [a] \ge [b]$;

2) $M = \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ ($a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$) та:

а) $a \sigma b \Leftrightarrow a_1 \le b_1$; **б)** $a \sigma b \Leftrightarrow a_1 \le b_1 \wedge a_2 \le b_2$;

в) $a \sigma b \Leftrightarrow a_1 \le b_1 \wedge a_2 \ge b_2$; **г)** $a \sigma b \Leftrightarrow a_1 \le b_1 \wedge a_2 < b_2$;

д) $a \sigma b \Leftrightarrow (a_1 \le b_1) \vee (a_1 < b_1 \wedge a_2 \le b_2)$;

е) $a \sigma b \Leftrightarrow a_1 + a_2 \le b_1 + b_2$;

є) $a \sigma b \Leftrightarrow \max\{a_1, a_2\} \le \max\{b_1, b_2\}$;

ж) $a \sigma b \Leftrightarrow a_1 \le a_2 \le b_1 \le b_2$; **з)** $a \sigma b \Leftrightarrow a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2$;

3) $M = \mathrm{N}$ та:

а) $a \sigma b \Leftrightarrow a \,\vdots\, b$; **б)** $a \sigma b \Leftrightarrow a + 1 \le b$;

в) $a \sigma b \Leftrightarrow a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1}$, $b = \overline{b_m b_{m-1} \ldots b_2 b_1}$, $n \le m$ та $a_i \le b_i$, $i = \overline{1, n}$;

г) $a \sigma b \Leftrightarrow a = 2^n a_1$, $b = 2^m b_1$, a_1, b_1 – непарні та $a_1 \le b_1$;

д) $a \sigma b \Leftrightarrow a = 2^n a_1$, $b = 2^m b_1$, a_1, b_1 – непарні, $n \le m$ та $a_1 \le b_1$;

4) $M = \mathrm{Z}$ та:

а) $a\ \sigma\ b \Leftrightarrow a \,\vdots\, b$; **б)** $a\ \sigma\ b \Leftrightarrow |a| \le |b|$;

в) $a\ \sigma\ b \Leftrightarrow \begin{cases} a \le b, \textit{ якщо } a, b \ge 0, \\ a \ge b, \textit{ якщо } a, b \le 0, \\ a \le b, \textit{ якщо } a < 0 < b; \end{cases}$

5) $M = \exp X$, де X – деяка множина, та:

а) $a\ \sigma\ b \Leftrightarrow a \subset b$; **б)** $a\ \sigma\ b \Leftrightarrow a \Delta b = \varnothing$;

в) $a\ \sigma\ b \Leftrightarrow a \bigcap b \ne \varnothing$; **г)** $a\ \sigma\ b \Leftrightarrow a \bigcup \mathrm{C}b = X$;

6) $M = \{10^n \mid n \in \mathrm{N}\}$ та:

а) $a\ \sigma\ b \Leftrightarrow a \le b$; **б)** $a\ \sigma\ b \Leftrightarrow b \,\vdots\, a$;

в) $a\ \sigma\ b \Leftrightarrow$ кількість дільників a не більше кількості дільників b;

г) $a\ \sigma\ b \Leftrightarrow$ кількість цифр числа a не більше кількості цифр числа b;

7) $a\ \sigma\ b \Leftrightarrow a \subset b$ та:

а) $M = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha < \beta\}$; **б)** $M = \{[0, \alpha] \mid \alpha > 0\}$;

в) $M = \{(\alpha, +\infty) \mid \alpha \in \mathrm{R}\}$.

32. З'ясуйте, чи буде в упорядкованому просторі $\Omega = (M; \sigma)$ множина X обмеженою зверху, знизу; знайдіть (у разі їх існування) для цієї множини найбільший і найменший елементи, мажоранту, міноранту, супремум та інфімум, якщо:

1) $M = [0; 1]$, $a\ \sigma\ b \Leftrightarrow a \le b$, $a, b \in M$ та:

а) $X = (0; 1)$; **б)** $X = [0; \frac{1}{2})$; **в)** $X = (0; \frac{1}{4}]$; **г)** $X = [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$;

д) $X = \{-1\} \bigcup (0; 1)$; **е)** $X = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \bigcup [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$;

є) $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathrm{N}\}$; **ж)** $X = [-1; 1] \bigcap \mathrm{Q}$;

з) $X = [-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0] \bigcap (\mathrm{R} \setminus \mathrm{Q})$; **и)** $X = \{(-\frac{1}{2})^n \mid n \in \mathrm{N}\}$;

і) $X = \{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{4n} \mid n \in \mathrm{N}\}$;

2) $M = (0; 2)$, $a\ \sigma\ b \Leftrightarrow a \le b$, $a, b \in M$ та:

а) $X=(0;1]$; **б)** $X=[\frac{1}{2};\frac{3}{2}]$; **в)** $X=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathrm{N}\}$;

г) $X=[\frac{1}{2};\frac{3}{2}]\bigcap(\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q})$; **д)** $X=[\frac{1}{\sqrt{3}};1]\bigcap(\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q})$;

е) $X=[\frac{1}{2};1)\bigcap\mathrm{Q}$; **є)** $X=[1;2)$; **ж)** $X=\{1\}$;

3) $M=\mathrm{R}^+$, $a\,\sigma\,b\Leftrightarrow a\le b$, $a,b\in M$ та:

а) $X=(0;+\infty)$; **б)** $X=\mathrm{N}$; **в)** $X=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathrm{N}\}$;

г) $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[n;n+\frac{1}{2^n}]$; **д)** $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(2-\frac{1}{n};3+\frac{1}{n}]$;

е) $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n};10-\frac{1}{n}]$; **є)** $X=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(5-\frac{1}{2n};8+\frac{1}{n^2})$;

ж) $X=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n};3+\frac{1}{n}]$; **з)** $X=\{0;1;5;6\}$;

4) $M=\mathrm{Q}$, $a\,\sigma\,b\Leftrightarrow a\le b$, $a,b\in M$ та:

а) $X=\mathrm{Z}^-$; **б)** $X=(-\pi;\pi)\bigcap\mathrm{Q}$; **в)** $X=(-\infty;\sqrt{2})\bigcap\mathrm{Q}$;

5) $M=\mathrm{N}$, $a\,\sigma\,b\Leftrightarrow b\,\vdots\,a$, $a,b\in M$ та:

а) $X=\{1;2;...;10\}$; **б)** $X=\{2^n\mid n\in\mathrm{N}\}$;

в) $X=\{2^n\cdot 3^m\mid n,m\in\mathrm{N}\}$; **г)** $X=\{2;4;8;16\}$;

д) $X=\{2^n\cdot 5^m\mid n=\overline{0,5},\,m=\overline{0,10}\}$;

е) $X=\{2;3;4;5\}$; **є)** X – множина простих чисел;

6) $M=\exp\{1;2;...;10\}$, $a\,\sigma\,b\Leftrightarrow a\subset b$, $a,b\in M$ та:

а) $X=\{1;2;...;9\}$; **б)** $X=\{\{1\};\{2\};...;\{9\}\}$;

в) $X=\{\{1;2\};\{1;3\};...;\{1;10\};\{2;3\};\{2;4\};...;\{9;10\}\}$;

г) $X=\{\{1\};\{1;2\};\{1;2;3\};\,;...;\{1;2;...;10\}\}$;

д) $X=\{\{5;6\};\{6;7\}\}$; **е)** $X=M\setminus\{1\}$;

7) $M=[-10;10]\times[-10;10]$, $a\,\sigma\,b\Leftrightarrow a_1\le b_1\wedge a_2\le b_2$,
$a=(a_1;a_2)$, $b=(b_1;b_2)$, $a,b\in M$ та:

а) $X=[0;1]\times[3;4]$; **б)** $X=[0;1)\times(3;4]$;

в) $X=[0;1)\times[3;4)$; **г)** $X=\{\{1;2\},\{2;1\}\}$;

д) $X=(1;3)\times(3;6)\bigcup\{(0;0),(2;8)\}$;

8) $M=\mathrm{R}\times\mathrm{R}$, $a\,\sigma\,b \Leftrightarrow (a_1<b_1)\vee(a_1=b_1\wedge a_2\le b_2)$, $a=(a_1;a_2)$, $b=(b_1;b_2)$, $a,b\in M$ та:

а) $X=[0;2]\times[3;6]$; **б)** $X=[0;2)\times(3;6]$;

в) $X=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$;

г) $X=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$;

д) $X=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 2\}$;

е) $X=\{(x,y)\,|\,1<x+y<2\}\bigcap\mathrm{R}^+\bigcap\mathrm{R}^+$;

є) $X=\mathrm{N}\times\mathrm{N}$; **ж)** $X=\mathrm{R}\times\{0\}$;

9) $M=\{[x;+\infty)\,|\,x\in\mathrm{R}\}$, $a\,\sigma\,b\Leftrightarrow a\subset b$, $a,b\in M$ та:

а) $X=\{[n;+\infty)\,|\,n\in\mathrm{N}\}$; **б)** $X=\{[\frac{1}{n};+\infty)\,|\,n\in\mathrm{N}\}$;

в) $X=\{[(-1)^n n;+\infty)\,|\,n\in\mathrm{N}\}$;

10) $M=\mathrm{R}$, $a\,\sigma\,b\Leftrightarrow a\le b$, $a,b\in M$ та:

а) $X=\big([0;1]\bigcap(\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q})\big)\bigcup\big([\sqrt{2};\sqrt{3}]\bigcap\mathrm{Q}\big)$;

б) $X=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[n;+\infty)$; **в)** $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[-0,\underbrace{11...1}_{n};0,\underbrace{99...9}_{n}]$;

г) $X=\{\frac{n}{2n^3+1}\,|\,n\in\mathrm{N}\}$; **д)** $X=\{\frac{n^2}{n+1}\,|\,n\in\mathrm{N}\}$;

е) $X=\{\frac{(-1)^n+1}{n}\,|\,n\in\mathrm{N}\}$; **є)** $X=\{\sin n\,|\,n\in\mathrm{Z}^+\}$;

ж) $X=\{\cos n\,|\,n\in\mathrm{Z}^+\}$; **з)** $X=\{\sup\limits_{m\in\mathrm{N}}\frac{m-n}{m+n}\,|\,n\in\mathrm{Z}^+\}$;

и) $X=\{\inf\limits_{m\in\mathrm{N}}\frac{m-n}{m+n}\,|\,n\in\mathrm{Z}^+\}$;

і) X – множина периметрів правильних 2^n-кутників, що вписані в коло радіусом 1, $n\ge 2$;

ї) X – множина периметрів правильних $3\cdot 2^n$-кутників, що описані навколо кола радіусом 1, $n\ge 1$.

33. Які з наведених упорядкованих просторів $\Omega = (M; \sigma)$ є повними, якщо:

1) $a \ \sigma \ b \Leftrightarrow a \le b$, $a, b \in M$ та:

а) $M = R$; **б)** $M = [0; 1]$; **в)** $M = (0; 1)$; **г)** $M = R \setminus Q$;

д) $M = Q$; **е)** $M = N$; **є)** $M = [0; 1) \bigcup (1; 2]$;

2) $a \ \sigma \ b \Leftrightarrow b \ \vdots \ a$, $a, b \in M$ та:

а) $M = N$; **б)** $M = \{2^n \mid n \in N\}$;

в) $M = \{3^n \mid n \in \{1; 2; ...; 100\}\}$;

г) $M = Z$; **д)** $M = \{1; 2; 3; ...; 100\}$?

34. У лінійно упорядкованому просторі $\Omega = (M; \sigma)$ для елементів $p, q \in M$ визначте множини $[p, q]$, $[p, q)$, $(p, q]$, (p, q), $(-\infty, q]$, $(-\infty, q)$, $[p, +\infty)$ та $(p, +\infty)$, якщо:

1) $a \ \sigma \ b \Leftrightarrow a \le b$, $a, b \in M$, $p = \frac{1}{4}, q = \frac{4}{5}$ та:

а) $M = R$; **б)** $M = [0; 1]$; **в)** $M = (0; 1)$;

2) $a \ \sigma \ b \Leftrightarrow b \ \vdots \ a$, $a, b \in M$, $p = 4, q = 32$ та:

а) $M = \{2^n \mid n \in Z^+\}$; **б)** $M = \{2^n \mid n \in \{1; 2; 3; ...; 10\}\}$;

3) $a \ \sigma \ b \Leftrightarrow (a_1 < b_1) \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 \le b_2)$, $a = (a_1; a_2)$, $b = (b_1; b_2)$, $a, b \in M$, $p = (1; 3), q = (2; 4)$ та:

а) $M = R \times R$; **б)** $M = [0; 9] \times [0; 7]$.

35. У повному упорядкованому просторі $\Omega = (M; \le)$ доведіть твердження.

1) Довільна множина $X \subset M$ має властивість:

а) якщо у множині X існує найбільший елемент $x_{\max}$, то $\exists \sup X = x_{\max}$;

б) якщо у множині X існує найменший елемент $x_{\min}$, то $\exists \inf X = x_{\min}$;

в) якщо $\exists b \in M: \ \forall x \in X$ має місце умова $x \le b$, то $\exists \sup X \le b$;

г) якщо $\exists b \in M$: $\forall x \in X$ має місце умова $x \geq b$, то $\exists \inf X \geq b$;

д) якщо X обмежена зверху, то $\overline{x} = \sup X$ тоді й тільки тоді, коли $\overline{x}$ – одночасно мажоранта та точка дотику множини X;

е) якщо X обмежена знизу, то $\underline{x} = \inf X$ тоді й тільки тоді, коли $\underline{x}$ – одночасно мінoранта та точка дотику множини X.

2) Довільні множини $\varnothing \neq X \subset Y \subset M$ мають властивість:

а) якщо множина Y обмежена зверху, то $\sup X \leq \sup Y$;

б) якщо множина Y обмежена знизу, то $\inf X \geq \inf Y$.

36. У лінійно упорядкованому просторі $\Omega = (M; \sigma)$ для множини $X \subset M$ з'ясуйте, чи буде вона відкритою, замкненою; побудуйте $\mathrm{cl} X$ та $\mathrm{int} X$; наведіть принаймні один окіл для елементів $x, y \in X$, якщо:

1) $M = \{2^n \mid n \in \mathrm{Z}^+\}$, $a \,\sigma\, b \Leftrightarrow b \,\vdots\, a$, $a, b \in M$, та:

а) $X = \{1; 2; 4; 16; 128\}$, $x = 4$, $y = 128$;

б) $X = \{1; 2; 4\}$, $x = 1$, $y = 2$;

2) $M = \mathrm{R} \times \mathrm{R}$, $a \,\sigma\, b \Leftrightarrow (a_1 < b_1) \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 \leq b_2)$, $a = (a_1; a_2)$, $b = (b_1; b_2)$, $a, b \in M$, та:

а) $X = [0; 4] \times [2; 9]$, $x = (0; 2)$, $y = (1; 3)$;

б) $X = (-1; 1) \times \mathrm{R}$, $x = (0; 2)$, $y = (0; 3)$.

Розділ 5
ВЛАСТИВОСТІ ДІЙСНОЇ ПРЯМОЇ

Короткі теоретичні відомості

Визначимо на дійсній осі канторові множини K_3 та K_{10}. Розіб'ємо сегмент $[0;1]$ на три рівні частини й видалимо середню з них як інтервал, тобто проміжок $(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$. Кожний із двох проміжків, що утворилися, знову ділимо на три рівні частини й видаляємо середні з них як інтервали – і так до нескінченності. На кожному кроці кожний із сегментів, що утворилися на попередньому кроці, ділимо на три рівні частини та середні видаляємо як інтервали. Точки сегмента $[0;1]$, що залишилися не видаленими, утворюють канторову множину K_3. Аналогічно будуємо множину K_{10}, для цього ділимо сегмент $[0;1]$ на десять рівних частин і видаляємо l-ту з них як інтервал $\left(l \in \{1, 2, ..., 10\}\right)$. Після цього кожний із дев'яти проміжків, що залишилися, знову ділимо на десять рівних частин і видаляємо l-ті з них як інтервали – і так до нескінченності. Точки сегмента $[0;1]$, що залишилися не видаленими, утворюють канторову множину K_{10}.

Побудуємо розширення множини дійсних чисел. Позначимо через $\overline{\mathrm{R}}$ множину, яка складається з множини дійсних чисел R та двох символів $\{-\infty; +\infty\}$. Продовжимо відношення лінійного порядку "$\leq$" із множини R на цю множину $\overline{\mathrm{R}}$ таким чином: $\forall x \in \mathrm{R}\quad -\infty < x < +\infty$. Упорядкована пара $(\overline{\mathrm{R}}, \leq)$ називається розширеною числовою (дійсною) прямою.

Для елементів множини $\overline{\mathrm{R}}$ визначимо основні дії таким чином:

$\forall x, y \in \mathrm{R}$ дії $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$ та $x:y$ (остання при $y \neq 0$) мають той самий зміст, який вони мали на дійсній прямій R;

- $\forall x \in \mathrm{R}$ $(-\infty)+x = x+(-\infty) = -\infty$,

$(+\infty)+x = x+(+\infty) = +\infty$;

- $\forall x \in \mathrm{R}$ $(-\infty)-x = x-(+\infty) = -\infty$,

$(+\infty)-x = x-(-\infty) = +\infty$;

- $\forall x \in \mathrm{R}$

$$(-\infty)\cdot x = x\cdot(-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \textit{якщо } x>0, \\ +\infty, & \textit{якщо } x<0, \end{cases}$$

$$(+\infty)\cdot x = x\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \textit{якщо } x>0, \\ -\infty, & \textit{якщо } x<0; \end{cases}$$

- $\forall x \in \mathrm{R}$ $(-\infty):x = \begin{cases} -\infty, & \textit{якщо } x>0, \\ +\infty, & \textit{якщо } x<0, \end{cases}$

$$(+\infty):x = \begin{cases} +\infty, & \textit{якщо } x>0, \\ -\infty, & \textit{якщо } x<0; \end{cases}$$

- $\forall x \in \mathrm{R}$ $x:(-\infty) = x:(+\infty) = 0$.

Лінійний упорядкований простір $(\overline{\mathrm{R}}, \leq)$ є повним, елементи $\{-\infty; +\infty\}$ відіграють роль найменшого та найбільшого елементів, а тому кожна множина в цьому просторі обмежена й має супремум та інфімум. Якщо множина $X \subset \mathrm{R}$ обмежена зверху (знизу) у просторі $(\mathrm{R}, \leq)$, то $\exists \sup X \in \mathrm{R}$ $\left(\exists \inf X \in \mathrm{R}\right)$. Якщо множина $X \subset \mathrm{R}$ не обмежена зверху (знизу) у просторі $(\mathrm{R}, \leq)$, то, розглядаючи її в просторі $(\overline{\mathrm{R}}, \leq)$, матимемо, що $\exists \sup X = +\infty$ $\left(\exists \inf X = -\infty\right)$.

Множина $U = O(+\infty)$ називається околом "$+\infty$" $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists a \in \mathrm{R}$: $(a; +\infty) \subset U$.

Множина $U = O(-\infty)$ називається околом "$-\infty$" $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists a \in \mathrm{R}$: $(-\infty; a) \subset U$.

Задачі

37. Для заданої множини $A \subset \mathrm{R}$:

1) з'ясуйте, чи буде вона околом точки $x_1 = 0$, точки $x_2 = \frac{1}{2}$, точки $x_3 = 1$;

2) з'ясуйте, чи буде множина A околом $-\infty$, околом $+\infty$;

3) побудуйте $\mathrm{cl}A$ та $\mathrm{int}A$;

4) з'ясуйте, чи буде множина A замкненою, відкритою;

5) з'ясуйте, чи буде множина A скрізь щільною, ніде не щільною, якщо:

а) $A = (-\infty; 1]$; **б)** $A = \mathrm{N}$; **в)** $A = [0; 1]$; **г)** $A = [0; \frac{3}{2})$;

д) $A = \mathrm{Q}$; **е)** $A = \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}$; **є)** $A = (\frac{1}{2}; +\infty)$;

ж) $A = [0; \frac{1}{2}) \bigcup (\frac{1}{2}; 1]$; **з)** $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathrm{N}\}$;

и) $A = [-1; 1] \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathrm{N}\}$; **і)** $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [2n-1; 2n]$;

ї) $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (n; +\infty)$; **й)** $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} [n - \frac{1}{3^n}; n+1+\frac{1}{4^n})$;

к) $A = \mathrm{R} \setminus \{\frac{1}{2} + \frac{1}{4^n} \mid n \in \mathrm{N}\}$; **л)** $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [-\frac{1}{n}; 1+\frac{1}{n}]$;

м) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}; n)$; **н)** $A = \mathrm{R} \setminus \mathrm{N}$; **о)** $A = (\mathrm{R}^- \setminus \mathrm{Z}) \bigcup \mathrm{Q}^+$;

п) $A = \mathrm{R} \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{(-2)^n \mid n \in \mathrm{N}\}$; **р)** $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (-n; n]$;

с) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{2n-2}{2n-1}; \frac{2n-1}{2n}]$; **т)** $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2} - \frac{n+1}{n}; \frac{1}{2} + \frac{n}{n+1})$;

у) $A = (\mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}) \bigcap (-\infty; \frac{1}{2}] \bigcup \mathrm{Q} \setminus (\frac{1}{2}; +\infty)$;

ф) $A = \{\sin n^\circ \mid n \in \mathrm{N}\}$; **х)** $A = \{\sin n \mid n \in \mathrm{N}\}$;

ц) $A = \{|\cos n| \mid n \in \mathrm{N}\}$; **ч)** $A = \{\mathrm{tg}\, n \mid n \in \mathrm{N}\}$;

ш) $A = \{\operatorname{arctg} n \mid n \in \mathrm{N}\}$; **щ)** $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [-|\sin n|;\ |\cos n|]$;

ю) $A = K_3$; **я)** $A = \mathrm{R} \setminus K_{10}$.

38. Для канторових множин K_3 та K_{10} (вважаємо, що видаляємо шості проміжки при побудові множини K_{10}):

1) опишіть точки проміжку $[0;\ 1]$, які:

а) видаляються на n-му кроці при побудові цих множин;

б) належать канторовим множинам;

2) з'ясуйте, які з наведених точок x належать цим множинам:

а) $x = 0$; **б)** $x = \frac{1}{3}$; **в)** $x = \frac{3}{5}$; **г)** $x = \frac{25}{27}$; **д)** $x = \frac{1}{4}$;

е) $x = 0,(123)$; **є)** $x = 0,(1)$; **ж)** $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; **з)** $x = \pi - 3$;

3) знайдіть:

а) сумарну довжину проміжків, що видаляються при побудові канторових множин;

б) $\forall (a;\ b) \subset [0;\ 1]$ знайдіть проміжок $(\alpha;\ \beta) \subset (a;\ b) \bigcap \mathrm{C}K_{10}$;

в) $\forall (a;\ b) \subset [0;\ 1]$ знайдіть проміжок $(\alpha;\ \beta) \subset (a;\ b) \bigcap \mathrm{C}K_3$;

4) доведіть, що:

а) ці множини замкнені;

б) ці множини мають потужність континуум;

в) ці множини ніде не щільні на R;

г) властивості множин, що описані в п. **3)** та **4)**, не зміняться, якщо при побудові канторової множини K_3 видаляти перший (третій) проміжок, а при побудові канторової множини K_{10} – будь-який інший (а не шостий) проміжок розбиття;

д) для кожного $z \in [0;\ 2]$ існують $x,\ y \in K_3$, для яких $x + y = z$;

е) для кожного $z \in [0;\ 1]$ існують $x,\ y \in K_3$, для яких $x - y = z$.

39. Перевірте твердження:

1) множина $A \setminus B$ буде відкритою або замкненою, якщо:

а) $A,\ B$ – відкриті; **б)** $A,\ B$ – замкнені;

в) A – відкрита, B – замкнена;

г) A – замкнена, B – відкрита;

2) завжди замкненою є множина, що дорівнює:

а) $\mathrm{cl}\,A$, де A – довільна множина;

б) перетину скінченної кількості замкнених множин;

в) перетину зліченої кількості замкнених множин;

г) об'єднанням скінченної кількості замкнених множин;

д) об'єднанням зліченної кількості замкнених множин;

3) завжди відкритою є множина, що дорівнює:

а) $\mathrm{int}\,A$, де A – довільна множина;

б) перетину скінченної кількості відкритих множин;

в) перетину зліченної кількості відкритих множин;

г) об'єднанням скінченної кількості відкритих множин;

д) об'єднанням зліченної кількості відкритих множин;

4) множина відкрита тоді й тільки тоді, коли вона або порожня, або збігається з R, або є диз'юнктним об'єднанням проміжків, серед яких не більше двох можуть бути променями, а всі інші – інтервалами;

5) замиканням множини A є:

а) найменша замкнена множина, що містить множину A;

б) перетин усіх замкнених множин, що містять множину A;

в) об'єднання всіх замкнених множин, що містяться у множині A;

6) внутрішністю множини A є:

а) найбільша відкрита множина, що міститься у множині A;

б) перетин усіх відкритих множин, що містять множину A;

в) об'єднання всіх відкритих множин, що містяться у множині A;

7) множина A ніде не щільна тоді й тільки тоді, коли:

а) $\forall(a;\, b)\subset \mathrm{R}\ \ \exists(\alpha;\, \beta)\subset(a;\, b):\ (\alpha;\, \beta)\bigcap A=\varnothing$;

б) для довільної непорожньої відкритої множини $F\subset \mathrm{R}$ існує непорожня відкрита підмножина $G\subset F:\ G\bigcap A=\varnothing$;

в) для довільної непорожньої множини $F\subset \mathrm{R}$ існує непорожня підмножина $G\subset F:\ G\bigcap A=\varnothing$;

г) множина $\mathrm{C}A$ скрізь щільна;

8) існують множини A, B, для яких виконуються умови:

а) $[a; b] = A \coprod B$ та A, B – замкнені;

б) $[a; b] = A \bigcap B$ та A, B – незамкнені;

9) якщо $A \subset B$, то:

а) $\mathrm{int}A \subset \mathrm{int}B$; **б)** $\mathrm{cl}A \subset \mathrm{cl}B$;

10) якщо $\mathrm{cl}A \subset \mathrm{cl}B$, то:

а) $\mathrm{int}A \subset \mathrm{int}B$; **б)** $A \subset B$;

11) якщо $\mathrm{int}A \subset \mathrm{int}\,B$, то:

а) $A \subset B$; **б)** $\mathrm{cl}A \subset \mathrm{cl}B$;

12) для довільної замкненої множини A існує множина B така, що справджується рівність $A = \mathrm{cl}(\mathrm{int}\,A)$;

13) для довільної відкритої множини A існує множина B така, що справджується рівність $A = \mathrm{int}(\mathrm{cl}\,A)$;

14) для довільної множини A рівність: $A = \mathrm{int}(\mathrm{cl}\,A)$ справджується тоді й тільки тоді, коли $\mathrm{C}A = \mathrm{cl}(\mathrm{int}\,\mathrm{C}A)$;

15) кожна нескінченна замкнена множини є замиканням деякої своєї зліченної підмножини;

16) для відкритої множини A та для деякої множини B такої, що $A \bigcap B = \varnothing$, справджується рівність $A \bigcap \mathrm{cl}\,B = \varnothing$;

17) для замкненої множини A та для деякої множини B такої, що $A \bigcup B = \mathrm{R}$, справджується рівність $A \bigcup \mathrm{int}\,B = \mathrm{R}$;

18) для обмеженої відкритої множини A існує інтервал $(a; b)$, для якого не існує іншого інтервалу $(c; d)$ такого, щоб справджувалася умова $(a; b) \subset (c; d) \subset A$;

19) якщо для будь-яких двох точок $x < y$, що належать множині A, існує точка $z \in A$, для якої $x < z < y$, то множина $\mathrm{cl}\,A$ містить принаймні одну внутрішню точку;

20) якщо замкнені множини F_1, F_2 не перетинаються, то існують відкриті множини G_1, G_2, для яких справджуються умови $G_1 \bigcap G_2 = \varnothing$, $F_1 \subset G_1$ та $F_2 \subset G_2$;

21) довільна замкнена множина без внутрішніх точок є ніде не щільною.

40. Перевірте, чи справджується для наведених двох множин X, Y одна з трьох умов: $X = Y$, $X \subset Y \wedge X \neq Y$ чи $X \supset Y \wedge X \neq Y$, де:

1) $X = \mathrm{cl}(A \bigcup B);\ Y = \mathrm{cl}\, A \bigcup \mathrm{cl}\, B$;

2) $X = \mathrm{cl} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i;\ Y = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{cl}\, A_i$;

3) $X = \mathrm{cl}(A \bigcap B);\ Y = \mathrm{cl}\, A \bigcap \mathrm{cl}\, B$;

4) $X = \mathrm{int}(A \bigcap B);\ Y = \mathrm{int}\, A \bigcap \mathrm{int}\, B$;

5) $X = \mathrm{int} \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i;\ Y = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{int}\, A_i$;

6) $X = \mathrm{int}(A \bigcup B);\ Y = \mathrm{int}\, A \bigcup \mathrm{int}\, B$.

7) $X = A;\ Y = \mathrm{cl}(\mathrm{int}\, A)$, де:

а) A – замкнена; **б)** A – відкрита;

8) $X = A;\ Y = \mathrm{int}(\mathrm{cl}\, A)$, де:

а) A – замкнена; **б)** A – відкрита;

9) $X = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}\, A));\ Y = \mathrm{int}\, A$;

10) $X = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}\, A));\ Y = \mathrm{cl}\, A$;

11) $X = \mathrm{C}(\mathrm{int}\, A);\ Y = \mathrm{cl}(\mathrm{C}A)$;

12) $X = \mathrm{C}(\mathrm{cl}\, A);\ Y = \mathrm{int}(\mathrm{C}A)$;

13) $X = \mathrm{int}(\mathrm{int}\, A);\ Y = \mathrm{int}\, A$;

14) $X = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}\, A);\ Y = \mathrm{cl}\, A$;

15) $X = \mathrm{int}\, A \bigcup \mathrm{cl}(\mathrm{C}A),\ Y = \mathrm{R}$;

16) $X = \mathrm{int}(\mathrm{C}A) \bigcup \mathrm{cl}\, A,\ Y = \mathrm{R}$.

41. Побудуйте, якщо це можливо:

1) $\forall a; b \in \mathrm{R}$ – замкнені множини (A_n), $n \in \mathrm{N}$, для яких справджується рівність:

а) $[a; b] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$; **б)** $[a; b] = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$; **в)** $(a; b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$;

г) $(a; b) = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$; **д)** $[a; b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$; **е)** $[a; b) = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$;

є) $(a;+\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$; **ж)** $[a;+\infty)=\coprod_{n=1}^{\infty}A_n$; **з)** $[a;b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$;

и) $(a;b)=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$; **і)** $(a;b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$; **ї)** $K_3=\coprod_{n=1}^{\infty}A_n$;

2) непорожні множини (A_n), $n\in\mathrm{N}$, що задовольняють умову $\forall n\in\mathrm{N}\ \ A_{n+1}\subset A_n$, $A_{n+1}\neq A_n$, а також:

а) $\forall n\in\mathrm{N}\ \ A_n$ – обмежені, замкнені та $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$;

б) $\forall n\in\mathrm{N}\ \ A_n$ – обмежені, відкриті та $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$;

в) $\forall n\in\mathrm{N}\ \ A_n$ – необмежені та $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$;

г) $\forall n\in\mathrm{N}\ \ A_n$ – необмежені та $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=[a;b]$, де $a;b\in\mathrm{R}$;

д) $\forall n\in\mathrm{N}\ \ A_n$ – необмежені та $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ – необмежена;

3) послідовність множин (A_n), $n\in\mathrm{N}$, що задовольняють умову:

а) $\forall n\in\mathrm{N}\ \ A_n\subset A_{n+1}$, A_n – відкриті, $(0;1)\not\subset A_n$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(0;1)$;

б) $\forall n\in\mathrm{N}\ \ A_n\subset \mathrm{int}A_{n+1}$, A_n – замкнені, $(0;1)\not\subset A_n$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(0;1)$;

в) A_n – замкнені, перетин будь-якої скінченної сукупності множин з послідовності (A_n) непорожній і $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$;

г) A_n – відкриті, перетин будь-якої скінченної сукупності множин з послідовності (A_n) непорожній і $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$;

4) множину A, для якої:

а) $\mathrm{cl}A \subset \mathrm{int}A$;

б) усі підмножини A є відкритими;

в) усі підмножини A є замкненими;

5) множину A, для якої наведене включення є строгим:

а) $\mathrm{cl}(\mathrm{int}\, A) \subset A$; **б)** $\mathrm{cl}(\mathrm{int}\, A) \subset \mathrm{cl}A$; **в)** $\mathrm{cl}(\mathrm{int}\, A) \supset A$;

г) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\, A) \supset \mathrm{int}A$; **д)** $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\, A) \subset A$; **е)** $\mathrm{cl}(\mathrm{int}\, A) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$;

є) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\, A) \supset A$; **ж)** $\mathrm{cl}(\mathrm{int}\, A) \supset \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$;

6) множини A, B, для яких $A \bigcup B = \mathrm{R}$, але:

а) $\mathrm{int}\, A \bigcup \mathrm{int}\, B \neq \mathrm{R}$; **б)** $\mathrm{int}\, A \bigcup B \neq \mathrm{R}$; **в)** $\mathrm{int}\, A \bigcup \mathrm{cl}\, B \neq \mathrm{R}$;

7) найбільшу кількість попарно різних множин, яку можна отримати із заданої множини A за допомогою операцій взяття замикання та доповнення (ці операції можна знову застосовувати з утвореними множинами).

Розділ 6

ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ ФУНКЦІЙ ТА ЇХНІ ГРАФІКИ

Короткі теоретичні відомості

Розглянемо властивості функцій дійсного аргументу, тобто відображень типа $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$.

Функцію, що визначено на множині X, називають парною, якщо $\forall x \in X$ виконується рівність $f(-x) = f(x)$; непарною, якщо $\forall x \in X$ виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Функцію $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ називають T-періодичною, де $T > 0$, якщо виконується умова: $\forall x \in D_f \quad f(x) = f(x-T) = f(x+T)$. Число T називають періодом функції. Якщо для деякого $T > 0$ функція є T-періодичною, то її називають періодичною.

Функцію $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ називають неспадною (зростаючою) на множині $X \subset D_f$, якщо $\forall x_1, x_2 \in D_f$ з умови $x_1 < x_2$ випливає умова $f(x_1) \le f(x_2)$ $\left(f(x_1) < f(x_2)\right)$; незростаючою (спадною) на множині $X \subset D_f$, якщо $\forall x_1, x_2 \in D_f$ з умови $x_1 < x_2$ випливає умова $f(x_1) \ge f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$. Усі такі функції називають монотонними (строго монотонними) на множині $X \subset D_f$ (рис. 1).

Декартову (прямокутну) систему координат на площині визначають двома взаємно перпендикулярними осями з визначеними на них одиницями вимірювання, які перетинаються в точці O – початку координат. Кожній

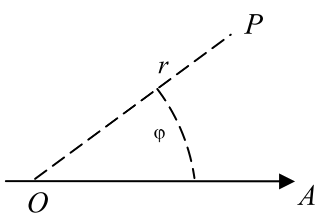


Рис. 1

точці P на площині відповідає упорядкована пара чисел $(x;\ y)$ – координати точки (абсциса та ордината). Точку P при цьому позначають $P(x;\ y)$.

Для визначення полярної системи координат на площині обирають точку O – початок координат і промінь OA – полярну вісь. Полярні координати точки P на площині – це упорядкована пара чисел $(r;\ \varphi)$. Координата r називається полярним радіусом точки й визначається як відстань від точки P до початку координат OP, координата φ – полярний кут, який визначається величиною кута (з урахуванням знака), на який треба повернути полярну вісь до збігу з променем OP (рис. 2). Зазначимо, що для кожної точки $r \geq 0$ при цьому значення $r = 0$ відповідатиме тільки початку координат точці O. Полярний кут для точки O вважають невизначеним. Полярний кут довільної точки, відмінної від початку координат, визначається неоднозначно. Зрозуміло, що полярні координати $(r;\ \varphi)$ та $(r;\ \varphi + 2\pi n)$ $\forall n \in Z$ визначають ту саму точку, при цьому полярний кут може бути від'ємним.

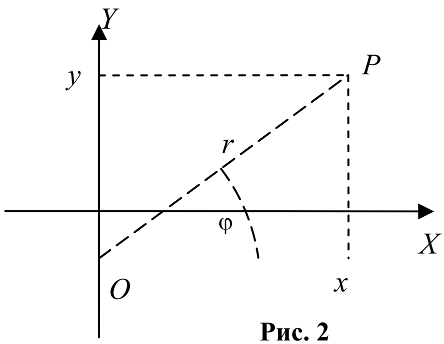


Рис. 2

Якщо сумістити дві системи координат – декартову та полярну – таким чином, щоб їхні центри збіглися, а полярна вісь сумістилась із додатним напрямком осі абсцис (рис. 2), то матимемо такий зв'язок між полярними й декартовими координатами тієї самої точки P $(x;\ y)$ та $(r;\ \varphi)$: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ та $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

Задачі

42. Для наведених функцій $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ з'ясуйте, які з них є парними, які непарними, які не належать до жодного з цих типів, якщо:

1) $f(x)=5x-x^5$;
2) $f(x)=(3-x)^{\frac{2}{5}}+(3+x)^{\frac{2}{5}}$;

3) $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$;
4) $f(x)=\log_2\dfrac{1-x}{1+x}$;

5) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;
6) $f(x)=\sqrt[3]{1+x^3}$;

7) $f(x)=\frac{3}{x-5}-\frac{4}{x-6}-\frac{3}{x+5}+\frac{4}{x+6}$;
8) $f(x)=2^{1+\sin x}+2^{1-\sin x}$;

9) $f(x)=|\sin x-2|$;
10) $f(x)=2^{\mathrm{tg}|x|}$;

11) $f(x)=\sqrt{\log_3 x^2}$;
12) $f(x)=|\mathrm{tg}\,x|+\cos x$;

13) $f(x)=x^3\cdot\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;
14) $f(x)=\dfrac{\cos x}{|\sin x|+|\mathrm{ctg}\,x|}$;

15) $f(x)=\sin x-x^2$;
16) $f(x)=x+|\sin x|$;

17) $f(x)=\log_2\sin x$;
18) $f(x)=\log_3\cos x$;

19) $f(x)=x^5-\arcsin x$;
20) $f(x)=x^2+\arccos x$;

21) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;

22) $f(x)=\mathrm{sgn}\,x$;
23) $f(x)=2^{x+x^3}$;

24) $f(x)=3^{x^2+x^4}$;
25) $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$;

26) $f(x)=\cos x+\sin^2\sqrt{2}x$;
27) $f(x)=\dfrac{x^3+\sin x}{1+x^2}$;

28) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$.

43. Для наведених функцій $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ з'ясуйте, які з них є парними, які непарними, які не належать до жодного з цих типів, якщо:

1) $f(x)=\{x\}$; **2)** $f(x)=\{x-\frac{1}{2}\}$;

3) $f(x)=[x]$; **4)** $f(x)=[x-\frac{1}{2}]$;

5) $f(x)=\dfrac{\{x+\frac{1}{2}\}}{|\mathrm{sgn}\{x-\frac{1}{2}\}|}$; **6)** $f(x)=\dfrac{[x-\frac{1}{2}]}{|\mathrm{sgn}\{x+\frac{1}{2}\}|}$;

7) $f(x)=|[x]|$; **8)** $f(x)=0$;

9) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathrm{Q},\\ 0, & x\in\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q},\end{cases}$; **10)** $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathrm{Q},\\ 0, & x\in\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q},\end{cases}$;

11) $f(x)=\mathrm{tg}x$; **12)** $f(x)=\mathrm{ctg}x$;

13) $f(x)=\mathrm{arctg}x$; **14)** $f(x)=\mathrm{arcctg}x$;

15) $f(x)=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)$; **16)** $f(x)=\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}x)$.

44. Що можна сказати про характер парності функції $\varphi:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, якщо функції $f,g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ мають однакові області визначення і при цьому:

1) обидві функції f, g парні та:

а) $\varphi=f+g$; **б)** $\varphi=f-g$; **в)** $\varphi=f\cdot g$;

г) $\varphi=\frac{f}{g}$; **д)** $\varphi=f\circ g$;

2) обидві функції f, g непарні та:

а) $\varphi=f+g$; **б)** $\varphi=f-g$; **в)** $\varphi=f\cdot g$;

г) $\varphi=\frac{f}{g}$; **д)** $\varphi=f\circ g$;

3) функція f парна, g – непарна та:

а) $\varphi=f+g$; **б)** $\varphi=f-g$; **в)** $\varphi=f\cdot g$;

г) $\varphi=\frac{f}{g}$; **д)** $\varphi=\frac{g}{f}$; **е)** $\varphi=f\circ g$;

є) $\varphi=g\circ f$; **ж)** $\varphi=f^2$; **з)** $\varphi=f^3$;

и) $\varphi=g^2$; **і)** $\varphi=g^3$?

45. Для наведених функцій $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ з'ясуйте, які з них є періодичними, і знайдіть значення будь-якого періоду $T>0$, якщо:

1) $f(x)=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x$, $\alpha\neq 0$; **2)** $f(x)=\sin^2 x$;

3) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$; **4)** $f(x)=\cos(x^2)$;

5) $f(x)=\arcsin\sin^2 x$; **6)** $f(x)=\sin x+\sin\sqrt{2}x$;

7) $f(x)=\sin\sqrt{3}x+\sin\sqrt{5}x$; **8)** $f(x)=|\sin x|$;

9) $f(x)=\cos\sqrt{2}x+\sin\sqrt{8}x$; **10)** $f(x)=\cos^4 x$;

11) $f(x)=\mathrm{tg}(x^3)$; **12)** $f(x)=\cos(\sqrt{x})^2$;

13) $f(x)=\mathrm{ctg}(\ln x)$; **14)** $f(x)=\cos(2^x)$;

15) $f(x)=\cos(\mathrm{e}^{\ln x})$; **16)** $f(x)=\sin\ln(\mathrm{e}^x)$;

17) $f(x)=\cos\arcsin x$; **18)** $f(x)=\arcsin\cos x$;

19) $f(x)=\mathrm{tg}\,\mathrm{arctg}\,x$; **20)** $f(x)=\mathrm{arctg}\,\mathrm{tg}\,x$;

21) $f(x)=\sin^4 x\cdot\cos^4 x$; **22)** $f(x)=\sqrt{\sin x+\cos x}$;

23) $f(x)=2^{\sin(2x-1)}$; **24)** $f(x)=\cos\frac{1}{x}$;

25) $f(x)=\{x\}$; **26)** $f(x)=\{3x+1\}$;

27) $f(x)=\sin x+\{\pi x\}$; **28)** $f(x)=\cos 2x+\{\frac{4x}{\pi}\}$.

46. Що можна сказати про характер монотонності функції $F:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ на множині $[a;\,b]$, якщо про функції $[a;\,b]\xrightarrow{f,\,g}\mathrm{R}$ та $h:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ відомо, що:

1) $F=f+g$ та:

а) f, g – зростаючі (неспадні) на множині $[a;\,b]$;

б) f, g – спадні (незростаючі) на множині $[a;\,b]$;

в) f – зростаюча (неспадна) g – спадна (незростаюча) на множині $[a;\,b]$;

2) $F=-f$ та:

а) f – зростаюча (неспадна) на множині $[a;\,b]$;

б) f – спадна (незростаюча) на множині $[a;\,b]$;

3) $F = fg$ та:

а) f, g – зростаючі (неспадні) на множині $[a; b]$ і $f(a) > 0,\ g(a) > 0$;

б) f, g – зростаючі (неспадні) на множині $[a; b]$ і $f(b) < 0,\ g(b) < 0$;

в) f, g – зростаючі (неспадні) на множині $[a; b]$ і $f(a) > 0,\ g(b) < 0$;

г) f, g – зростаючі (неспадні) на множині $[a; b]$ і $f(a) > 0$, $g(a) < 0$, $g(b) > 0$;

д) f, g – спадні (незростаючі) на множині $[a; b]$; і $f(b) > 0,\ g(b) > 0$

е) f, g – спадні (незростаючі) на множині $[a; b]$ і $f(a) < 0,\ g(a) < 0$;

є) f, g – спадні (незростаючі) на множині $[a; b]$ і $f(b) > 0,\ g(a) < 0$;

ж) f, g – спадні (незростаючі) на множині $[a; b]$ і $f(b) > 0$, $g(a) > 0$, $g(b) < 0$;

з) f – зростаюча (неспадна), g – спадна (не зростаюча) на множині $[a; b]$ і $f(a) > 0,\ g(b) > 0$;

и) f – зростаюча (неспадна), g – спадна (незростаюча) на множині $[a; b]$ і $f(b) < 0,\ g(a) < 0$;

і) f – зростаюча (неспадна), g – спадна (незростаюча) на множині $[a; b]$ і $f(a) > 0,\ g(a) < 0$;

4) $F = \frac{1}{f}$ та:

а) f – зростаюча (неспадна) на множині $[a; b]$ і $f(a) > 0$;

б) f – зростаюча (неспадна) на множині $[a; b]$ і $f(b) < 0$;

в) f – спадна (незростаюча) на множині $[a; b]$ і $f(b) > 0$;

г) f – спадна (незростаюча) на множині $[a; b]$ і $f(a) < 0$;

5) $F = f^{-1}$ (обернена функція) та:

а) f – зростаюча на множині $[a;\, b]$;

б) f – спадна на множині $[a;\, b]$;

6) $F = h \circ f$ та:

а) f – зростаюча (неспадна) на множині $[a;\, b]$, h – зростаюча (неспадна) на множині $[f(a);\, f(b)]$;

б) f – зростаюча (неспадна) на множині $[a;\, b]$, h – спадна (незростаюча) на множині $[f(a);\, f(b)]$;

в) f – спадна (незростаюча) на множині $[a;\, b]$, h – зростаюча (неспадна) на множині $[f(b);\, f(a)]$;

г) f – спадна (незростаюча) на множині $[a;\, b]$, h – спадна (незростаюча) на множині $[f(b);\, f(a)]$.

47. Для функції $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ без застосування похідної вкажіть проміжки зростання та спадання на D_f, якщо:

1) $f(x) = x^3 + 3x - 5$; **2)** $f(x) = 2x + \sin x$;

3) $f(x) = \sin x$; **4)** $f(x) = \cos x$;

5) $f(x) = \mathrm{tg}\, x$; **6)** $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$;

7) $f(x) = \arccos x$; **8)** $f(x) = \mathrm{cosec}\, x$;

9) $f(x) = x^2 + px + q$; **10)** $f(x) = \dfrac{x+a}{x+b}$, $a > b$;

11) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; **12)** $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$;

13) $f(x) = x^4 + 6x^2 + 1$; **14)** $f(x) = [x]$;

15) $f(x) = \mathrm{sgn}\, x$; **16)** $f(x) = \{x\}$.

48. Для функції $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ доведіть твердження.

1) f – періодична, якщо $D_f = \mathrm{R}$ та існує $a > 0$, для якого справджується умова:

а) $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$;

б) $f(x+a)=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$;

в) $f(x+a)+f(x-a)=\sqrt{2}f(x)$;

г) $f(x+a)=\dfrac{1}{2}+\sqrt[3]{-\dfrac{f(x)}{3}+f^2(x)-f^3(x)}$.

2) Відмінна від сталої функція $R\xrightarrow{f}R$:

а) не може мати своїм періодом довільне дійсне число;

б) не може мати своїм періодом довільне ірраціональне число;

в) може мати своїм періодом довільне раціональне число;

3) Довільну функцію, у якої область визначення симетрична відносно нульової точки, можна подати у вигляді суми парної та непарної функцій.

49. Знаючи ескіз графіка функції $y=f(x),\ x\in R$, побудуйте ескіз графіка функції $y=g(x),\ x\in R$, якщо:

1) $g(x)=f(x)+a$, де:

а) $a=2$; **б)** $a=-1$;

2) $g(x)=f(x+a)$, де:

а) $a=2$; **б)** $a=-1$;

3) $g(x)=kf(x)$, де:

а) $k=3$; **б)** $k=\frac{1}{2}$;

4) $g(x)=f(kx)$, де:

а) $k=3$; **б)** $k=\frac{1}{2}$;

5) $g(x)=-f(x)$; **6)** $g(x)=f(-x)$; **7)** $g(x)=|f(x)|$;

8) $g(x)=f(|x|)$; **9)** $g(x)=f^m(x)$:

а) $n=3$; **б)** $n=2$; **в)** $n=\frac{1}{3}$; **г)** $n=\frac{1}{2}$; **д)** $n=-1$;

10) $g(x)=2^{f(x)}$; **11)** $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$;

12) $g(x)=\log_2 f(x)$; **13)** $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} f(x)$;

14) $g(x)=\operatorname{arctg} f(x)$; **15)** $g(x)=\operatorname{arcctg} f(x)$;

16) $g(x)=[f(x)]$; **17)** $g(x)=f([x])$;

18) $g(x)=\{f(x)\}$; **19)** $g(x)=f(\{x\})$.

50. Побудуйте ескіз графіка дробово-лінійної функції $y=f(x),\ x\in\mathrm{R}$, якщо:

1) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$; **2)** $f(x)=\dfrac{4x-1}{x+1}$; **3)** $f(x)=\dfrac{6x-1}{2-2x}$;

4) $f(x)=\dfrac{x+1}{2-4x}$; **5)** $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$; **6)** $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$;

7) $f(x)=\dfrac{7-x}{2x}$; **8)** $f(x)=\dfrac{4}{3-x}$; **9)** $f(x)=\dfrac{5}{3+6x}$;

10) $f(x)=\dfrac{4x}{x+1}$; **11)** $f(x)=\dfrac{x}{2x+3}$; **12)** $f(x)=\dfrac{6+x}{x}$.

51. Шляхом додавання побудуйте ескіз графіка функції $y=f(x),\ x\in\mathrm{R}$, якщо:

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; **2)** $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$; **3)** $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$;

4) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$; **5)** $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$; **6)** $f(x)=x^2+\dfrac{1}{|x|}$;

7) $f(x)=\mathrm{sh}\,x=\dfrac{\mathrm{e}^x-e^{-x}}{2}$ e; **8)** $f(x)=\mathrm{ch}\,x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$;

9) $f(x)=|x|+\dfrac{1}{x}$; **10)** $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$;

11) $f(x)=\dfrac{4x+1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+3)^2}$; **12)** $f(x)=\dfrac{x-1}{x+4}-\dfrac{1}{x^2}$;

13) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}-\dfrac{1}{(x-2)^2}$; **14)** $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+3}+\dfrac{6x-1}{2-x}$;

15) $f(x)=\dfrac{x+1}{3x-2}+\dfrac{x}{x+1}$; **16)** $f(x)=\dfrac{2-x}{1-x}+\dfrac{3+2x}{2+x}$;

17) $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}+\dfrac{1+x}{x+2}$; **18)** $f(x)=\left|\dfrac{2-3x}{x}+\dfrac{2x}{2+x}\right|$;

19) $f(x)=\left|\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{2-3x}{2x+2}\right|$; **20)** $f(x)=\left|\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{2x-1}{1-x}\right|$;

21) $f(x)=\left|\dfrac{2-x}{2x+2}-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right|$; **22)** $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{1+x}$;

23) $f(x)=\dfrac{x+1}{1-x}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1-x}{1+x}$.

52. Побудуйте ескіз графіка функції $y=f(x)$, $x\in \mathrm{R}$, якщо:

1) $f(x)=\sin(\arcsin x)$; **2)** $f(x)=\arcsin(\sin x)$;

3) $f(x)=\cos(\arccos x)$; **4)** $f(x)=\arccos(\cos x)$;

5) $f(x)=\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x)$; **6)** $f(x)=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x)$;

7) $f(x)=\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x)$; **8)** $f(x)=\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x)$;

9) $f(x)=\sin(\arccos x)$; **10)** $f(x)=\arccos(\sin x)$;

11) $f(x)=\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}\, x)$; **12)** $f(x)=\mathrm{arcctg}(\mathrm{tg}\, x)$;

13) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$; **14)** $f(x)=\cos\frac{1}{x}$;

15) $f(x)=\arcsin\frac{1}{x}$; **16)** $f(x)=\arccos\frac{1}{x}$;

17) $f(x)=\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$; **18)** $f(x)=\mathrm{arcctg}\frac{1}{x}$;

19) $f(x)=\sin x^2$; **20)** $f(x)=\cos\sqrt{x}$;

21) $f(x)=\dfrac{1}{\arcsin x}$; **22)** $f(x)=\dfrac{1}{\arccos x}$;

23) $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{arctg}\, x}$; **24)** $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{arcctg}\, x}$;

25) $f(x)=\mathrm{th}\, x=\dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$; **26)** $f(x)=\mathrm{cth}\, x=\dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}$.

53. Шляхом множення побудуйте ескіз графіка функції $y = f(x),\ x \in \mathrm{R}$, якщо:

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+x^2}$; **2)** $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$;

3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; **4)** $f(x) = x\sin x$;

5) $f(x) = 2^x \cos x$; **6)** $f(x) = 3^{-|x|} \sin x$;

7) $f(x) = \mathrm{arctg} x \cdot \sin x$; **8)** $f(x) = \mathrm{arcctg} x \cdot \cos x$;

9) $f(x) = \ln|x| \cdot \cos\frac{1}{x}$; **10)** $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$;

11) $f(x) = 2^x \cdot \sin\frac{1}{x}$; **12)** $f(x) = e^{-|x|} \cdot \cos\frac{1}{x}$.

54. Побудуйте ескіз графіка функції $y = f(x),\ x \in \mathrm{R}$, якщо:

1) $f(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}}$; **2)** $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2+3x}{x-1}}$;

3) $f(x) = \ln\dfrac{2-x}{1-x}$; **4)** $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left|\dfrac{1-2x}{2+x}\right|$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$; **6)** $f(x) = \dfrac{1}{3^{\frac{2x-1}{x}}-3}$;

7) $f(x) = \ln\left(\mathrm{arcctg}\left(\dfrac{1}{(x+3)^2} + \dfrac{2x-1}{2-x}\right)\right)$;

8) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{2-x}{1-x}+\frac{3+2x}{2-x}} - \dfrac{1}{2}\right)$;

9) $f(x) = \log_2\left(\mathrm{arctg}\left(\dfrac{2x+3}{x+2} + \dfrac{6x-1}{1-2x}\right) + \dfrac{\pi}{2}\right)$;

10) $f(x) = \ln\left(\log_2\left(\dfrac{1}{(x+3)^2} + \dfrac{4x+1}{x+1}\right) - 1\right)$;

11) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{2-3x}{1+x}+\dfrac{2x+2}{x}\right)+\dfrac{\pi}{4}}$;

12) $f(x)=\operatorname{th}\left(\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{1}{(x-2)^2}\right)\right)$;

13) $f(x)=\log_2\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{4-2x}{x-4}+\frac{1}{(2+x)^2}}-4\right)$;

14) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}\left(\log_2\left|\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2x+1}{x+1}\right|-1\right)}$;

15) $f(x)=2^{\operatorname{arctg}\left(\log_2\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)\right)}$;

16) $f(x)=\operatorname{arcctg}\left(\ln\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}+\dfrac{1}{(x-2)^2}\right)\right)$;

17) $f(x)=\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{2^{\frac{x}{x+3}+\frac{1}{x^2}}-4}\right)$;

18) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{4x+2}+\frac{x}{x+1}\right)}$;

19) $f(x)=\operatorname{arcctg}\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3x+2}{x-2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)\right)$;

20) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}+\dfrac{x}{3-x}\right)}$;

21) $f(x)=\log_{\sin x}\cos x$;

с) $f(x)=(\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$;

22) $f(x)=x^{\sin x}$;

у) $f(x)=(\ln x)^{\cos x}$.

55. Побудуйте ескіз графіка рівняння $r=f(\varphi),\ \varphi\in\mathrm{R}$, заданого в полярних координатах, розташувавши центр полярної системи координат у центрі декартової системи, а полярну вісь – у додатному напрямку осі абсцис, якщо:

1) $f(\varphi)=\varphi$;

2) $f(\varphi)=\dfrac{\varphi}{\pi}$;

3) $f(\varphi)=\varphi-\pi$;

4) $f(\varphi)=\dfrac{\varphi}{\varphi+1}$;

5) $f(\varphi)=\dfrac{\varphi-\pi}{\varphi+\pi}$;

6) $f(\varphi)=\dfrac{2\pi-\varphi}{\varphi}$;

7) $f(\varphi)=\dfrac{\pi}{\varphi}$;

8) $f(\varphi)=\dfrac{\pi}{\varphi+\pi}$;

9) $f(\varphi)=2\sin\varphi$;

10) $f(\varphi)=3\sin 2\varphi$;

11) $f(\varphi)=4\cos 4\varphi$;

12) $f(\varphi)=\cos 5\varphi$;

13) $f(\varphi)=4\sin^2 3\varphi$;

14) $f(\varphi)=\cos^2 4\varphi$;

15) $f(\varphi)=\sin^2 2\varphi$;

16) $f(\varphi)=\sqrt[4]{\sin 3\varphi}$;

17) $f(\varphi)=\sqrt{\cos 2\varphi}$;

18) $f(\varphi)=\dfrac{1}{\sin\varphi}$;

19) $f(\varphi)=\dfrac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}$;

20) $f(\varphi)=\dfrac{1}{2\cos\varphi-3\sin\varphi}$;

21) $f(\varphi)=\dfrac{2}{\cos\varphi}$;

22) $f(\varphi)=2+\dfrac{1}{\cos\varphi}$;

23) $f(\varphi)=2-\dfrac{1}{\cos\varphi-\sin\varphi}$;

24) $f(\varphi)=4-\dfrac{2}{\sin\varphi}$;

25) $f(\varphi)=2\operatorname{tg}\varphi$; \`

26) $f(\varphi)=\operatorname{ctg}\varphi$;

27) $f(\varphi)=1+\operatorname{tg}\varphi$; **28)** $f(\varphi)=2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$;

29) $f(\varphi)=3^{\frac{\pi}{\varphi}}$; **30)** $f(\varphi)=3^{\sin\varphi}$;

31) $f(\varphi)=\sin^3\frac{\varphi}{3}$; **32)** $f(\varphi)=\cos^4\frac{\varphi}{4}$.

56. Побудуйте ескіз графіка рівняння $r=f(\varphi),\ \varphi\in\mathrm{R}$, заданого в полярних координатах, розташувавши центр полярної системи координат у центрі декартової системи, а полярну вісь – у додатному напрямку осі абсцис, якщо:

1) $f(\varphi)=1+\cos\varphi$; **2)** $f(\varphi)=2+\sin\varphi$;

3) $f(\varphi)=1-2\sin\varphi$; **4)** $f(\varphi)=2-3\cos\varphi$;

5) $f(\varphi)=3+2\sin\varphi$; **6)** $f(\varphi)=1-\sin\varphi$;

7) $f(\varphi)=\dfrac{1}{1-2\cos\varphi}$; **8)** $f(\varphi)=\dfrac{2}{1+\sin\varphi}$;

9) $f(\varphi)=\dfrac{1}{3+2\cos2\varphi}$; **10)** $f(\varphi)=\dfrac{2}{1-\sqrt{2}\sin2\varphi}$.

Розділ 7
ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Короткі теоретичні відомості

Нехай X – довільна множина. Відображення $\mathrm{N} \xrightarrow{f} X$ називається послідовністю елементів множини X і позначається символом (x_n) або $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$, якщо $\forall n \in \mathrm{N} \ \ x_n = f(n)$. Іноді послідовність записують у вигляді $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ У цьому розділі розглядатимемо випадки числових послідовностей, тобто дійсних чисел, коли $X = \mathrm{R}$.

Число $x \in \mathrm{R}$ називається границею послідовності (x_n), якщо

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \ \ |x_n - x| < \varepsilon$.

При цьому пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, або $x_n \to x$ при $n \to \infty$ (*метричне означення границі*).

Якщо для послідовності (x_n) справджується умова

$\forall \mathrm{E} > 0 \ \ \exists n_\mathrm{E} : \forall n \geq n_\mathrm{E} \ \ x_n > \mathrm{E} \ \ \left(x_n < -\mathrm{E}\right)$,

то пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$) і кажуть, що (x_n) збігається до $+\infty$ ($-\infty$).

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$, то пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ і кажуть, що послідовність (x_n) є нескінченно великою.

Послідовність (x_n), що має скінченну границю, називають збіжною, інакше вона називається розбіжною. Якщо послідовність має скінченну границю, або збігається до $+\infty$ чи $-\infty$, то кажуть, що вона збіжна в $\overline{\mathrm{R}}$.

Число або символ $x \in \overline{\mathrm{R}}$ називається границею послідовності (x_n), якщо

$$\forall O(x)\ \ \exists n_1 : \forall n \ge n_1\ \ x_n \in O(x)$$
(*топологічне означення границі послідовності*). У цьому означенні однаково записується означення як скінченної, так і нескінченної границі послідовності.

Теорема 1 (*еквівалентність означень границі послідовності*).
Метричне й топологічне означення границі послідовності еквівалентні.

Послідовність (x_n) називається обмеженою, якщо $\exists M > 0$: $\forall n \in \mathrm{N}\ \ |x_n| \le M$. У цьому випадку пишуть $x_n = O(1)$. Послідовність (x_n) називається обмеженою зверху (знизу), якщо $\exists M > 0 :\ \forall n \in \mathrm{N}\ \ x_n \le M\ \ \left(-x_n \le M\right)$.

Послідовність (x_n) називають нескінченно малою, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. При цьому пишуть $x_n = o(1)$. Символи $O(1), o(1)$ називають *символами Ландау*.

Властивості (*символів Ландау*).
1. $O(1) + O(1) = O(1)$.
2. $O(1) \cdot O(1) = O(1)$.
3. $O(1) + o(1) = O(1)$.
4. $O(1) \cdot o(1) = o(1)$.
5. $o(1) + o(1) = o(1)$.
6. $o(1) \cdot o(1) = o(1)$.

Пишуть, що послідовність $x_n = o(y_n)$ $\left(x_n = O(y_n)\right)$, якщо $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = o(1)$ $\left(\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = O(1)\right)$. Якщо для суми кількох послідовностей $a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \ldots + a_n^{(k)}$ виконуються співвідношення $a_n^{(i)} = o(a_n^{(1)})$, $i = \overline{2, k}$, то послідовність $a_n^{(1)}$ називають головним членом цієї суми. Якщо для двох послідовностей a_n, b_n одночасно виконуються умови $a_n = O(b_n)$ та $b_n = O(a_n)$, то їх називають послідовностями одного порядку.

Теорема 2 (*арифметичні властивості границі послідовності*).

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $\{x, y\} \subset \mathrm{R}$, то:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = x \pm y$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = xy$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$, якщо $\forall n \in \mathrm{N}$ $y_n \neq 0$ та $y \neq 0$.

Теорема 3 (*перехід до границі в нерівностях*).

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $\{x, y\} \subset \mathrm{R}$ і $\forall n \in \mathrm{N}$ $x_n \le y_n$, то $x \le y$.

Наслідок (*про єдиність границі*).

Якщо послідовність збіжна, то її границя єдина.

Теорема 4 (*про двох поліцаїв*).

Якщо $\forall n \in \mathrm{N}$ члени послідовностей (x_n), (y_n), (z_n) задовольняють нерівності $x_n \le y_n \le z_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \in \overline{\mathrm{R}}$, то і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Послідовність (x_n) називається неспадною (зростаючою), якщо $\forall n \in \mathrm{N}$ $x_n \le x_{n+1}$ $\left(x_n < x_{n+1}\right)$. Послідовність (x_n) називається незростаючою (спадною), якщо $\forall n \in \mathrm{N}$ $x_n \ge x_{n+1}$ $\left(x_n > x_{n+1}\right)$. Такі послідовності називаються монотонними, зокрема зростаючі та спадні послідовності називаються строго монотонними.

Теорема 5 (*про монотонні послідовності*).

Кожна неспадна (незростаюча) послідовність (x_n) збігається в $\overline{\mathrm{R}}$, причому для її границі справджується рівність $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in N} x_n$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in N} x_n$).

Наслідок (*теорема Вейєрштрасса*).

Кожна монотонна й обмежена послідовність збіжна.

Границю послідовності $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ позначають числом e – основа натуральних логарифмів.

Послідовність (x_n) називається фундаментальною, якщо

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon : \forall(n \ge n_\varepsilon, p \in \mathrm{N}) \;\; \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon.$$

Теорема 6 (*критерій Коші*).

Послідовність (x_n) збіжна тоді й тільки тоді, коли вона фундаментальна.

Теорема 7 (*винесення о-малого за знак суми*).

Нехай для послідовностей (x_n), (y_n) виконуються умови: $\forall k \in \mathrm{N} \;\; y_k \ge 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} y_k = +\infty$ і $x_n = o(y_n)$, тоді $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = o\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)$.

Наслідок (*про відношення часткових сум*).

Нехай для послідовностей (x_n), (y_n) виконуються умови: $\forall k \in \mathrm{N} \;\; y_k \ge 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} y_k = +\infty$. Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathrm{R}}$, то існує $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k} = l$.

Теорема 8 (*Штольца*).

Нехай для послідовностей (x_n), (y_n) виконуються умови: послідовність (y_n) монотонно прямує до $+\infty$ при $n \to \infty$ та існує $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \overline{\mathrm{R}}$, тоді існує $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = l$.

Нехай (x_n) – деяка послідовність, $(n_k)_{k\in\mathrm{N}}$ – зростаюча послідовність натуральних чисел. Послідовність (y_k), де $y_k = x_{n_k}$ $\forall k \in \mathrm{N}$, називається підпослідовністю послідовності (x_n).

Теорема 9 (*підпослідовності збіжної послідовності*).

Якщо послідовність (x_n) збігається в $\overline{\mathrm{R}}$, то будь-яка її підпослідовність x_{n_k} також збіжна в $\overline{\mathrm{R}}$ і $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Нехай $a \in \overline{\mathrm{R}}$. Якщо в послідовності (x_n) існує підпослідовність (x_{n_k}): $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, то a називається частковою границею послідовності (x_n). Множина $A \subset \overline{\mathrm{R}}$ усіх часткових границь будь-якої послідовності (x_n) не порожня.

Нехай послідовність (x_n) обмежена, тоді $\forall n \in \mathrm{N}$ множина $A_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$ також обмежена та існує число $\overline{x_n} = \sup A_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k \in \mathrm{R}$. Згідно із властивістю верхньої межі $\left(A_{n+1} \subset A_n\right)$ послідовність $(\overline{x_n})$ монотонно незростаюча й обмежена, тому за теоремою Вейєрштрасса має границю, яка називається верхньою границею послідовності (x_n) і позначається $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Якщо послідовність (x_n) необмежена зверху, то $\forall n \in \mathrm{N}$ множина $A_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$ необмежена зверху, тому $\forall n \in \mathrm{N}$ $\overline{x_n} = \sup A_n = +\infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{x_n} = +\infty$, тобто $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$. Таким чином, для будь-якої послідовності (x_n) існує

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k \in \overline{\mathrm{R}}.$$

Повністю аналогічно визначається нижня границя послідовності:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k \in \overline{\mathrm{R}}.$$

Теорема 10 (*про монотонні підпослідовності*).

З будь-якої послідовності (x_n) можна виділити монотонну підпослідовність.

Теорема 11 (*Больцано – Вейєрштрасса*).

З кожної обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.

Нехай послідовності (a_n), (b_n) збігаються відповідно до a та b із $\overline{\mathrm{R}}$. Співвідношення $f(a_n, b_n)$ між ними називають невизначеністю $f(a,b)$, якщо неможливо знайти $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n, b_n)$ без урахування конкретного вигляду послідовностей (a_n), (b_n). Основними типами невизначеностей вважають такі відношення: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$ (раціональні невизначеності), $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ (степенево-показникові невизначеності).

Виходячи з того, що збіжність чи розбіжність послідовності визначає поведінка її членів, починаючи з деякого номера, надалі питання дослідження на збіжність числової послідовності можна (треба) вивчати, нехтуючи будь-якою скінченною кількістю її членів (наприклад, при визначенні збіжності частини послідовності можна не зважати на той факт, що кілька її перших членів можуть бути невизначеними). Однак таким чином розглядати послідовності можна за умови, що вони досліджуються лише на збіжність. При вивченні інших властивостей, якщо інше не вказано окремо, вважаємо, що $(x_n) \subset \mathrm{R}$.

Задачі

57. Використовуючи означення границі послідовності, знайдіть границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}$, $k \in \mathrm{N}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} 2$; **4)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{n+3}}$; **6)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1}$; **8)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n-11}}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{5n^2-1}$; **10)** $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\sqrt[3]{n}}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2^n(n+1)}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-3}{4n+5}$; 14) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-\sqrt{n}}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$; 16) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{n-1}{n^2-2}}$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2 \dfrac{n}{2n+1}$; 18) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos\, n}{\operatorname{ch}\, n}$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+5n+6}{n^3-n+3}$; 20) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3n^2+1}{n^4-2n+2}$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2n^5-3n+2}{2n^5+n^4-6n^2+7}}$; 22) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[5]{\dfrac{n^3-2n^2+3n}{n^4-6n+11}}$;

23) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{n^3+1}{n^3-2n}}$; 24) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n^4+1}{n^3-n^2+2n-1}}$;

25) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2 \dfrac{n^2-2n+3}{n^3-2n^2+20}$; 26) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{4n^3-2n+6}{n^3-n^2+n+5}$.

58. Використовуючи різні методи, знайдіть границі послідовностей (в усіх задачах параметри $a>0$, $p\in \mathrm{R}$):

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n}$, $(a>1)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^p}{a^n}$, $(a>1)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} n\, p^n$, $(|p|<1)$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^a}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2^k}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^p n}{a^n}$; **12)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n^2)}{2^n}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt[2^k]{2}$; **14)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[\sqrt{n}]{n}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_2 n}{\log_{\frac{1}{2}} n}$; **16)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^p}{n!}$.

59. Нехай α – деяке ірраціональне число. Розглянемо зліченну множину точок $M=\left\{\alpha n+k \,\middle|\, n\in \mathrm{Z},\ k\in \mathrm{Z}\right\}$. Доведіть твердження:

1) $\forall x\in X\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \exists m\in M\setminus\{x\}:\ |x-m|<\varepsilon$;

2) $\forall x\in X$ існує послідовність точок $(x_n)\subset M\setminus\{x\}:\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

60. Доведіть за означенням границі послідовності, що число $a\in\overline{\mathrm{R}}$ не є границею послідовності (x_n), якщо:

1) $x_n=\dfrac{n}{n+1}$ та:

а) $a=0$; **б)** $a=\frac{1}{2}$; **в)** $a=+\infty$;

2) $x_n=\dfrac{n^2}{2n^2+1}$ та:

а) $a=0$; **б)** $a=1$; **в)** $a=+\infty$;

3) $x_n=\dfrac{2^n}{n}$ та:

а) $a=1000$; **б)** $a=1$; **в)** $a=2$;

4) $x_n=(-1)^n$ та:

а) $a=0$; **б)** $a=1$; **в)** $a=-1$;

5) $x_n=\sin n$ та:

а) $a=0$; **б)** $a=-1$; **в)** $a=\frac{1}{2}$;

6) $x_n=\operatorname{arctg} n$ та:

а) $a=0$; **б)** $a=\frac{\pi}{4}$; **в)** $a=\frac{3}{2}$.

61. Доведіть твердження:

1) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathrm{R}}$. Тоді:

а) якщо $x \in \mathrm{R}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{x_n} = \mathrm{e}^x$;

б) якщо $x = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{x_n} = 0$;

в) якщо $x = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{x_n} = +\infty$;

г) якщо $x = 0 \wedge x_n > 0 \ \ \forall n \in \mathrm{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = -\infty$;

д) якщо $x = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = +\infty$.

2) Нехай для послідовності (x_n) додатних чисел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathrm{R}}$, а для послідовності (y_n) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathrm{R}}$. Тоді послідовність $\left(x_n^{\ y_n}\right)$ збігається до:

а) x^y, якщо $x > 0,\ x,\ y \in \mathrm{R}$;

б) $+\infty$, якщо $x > 1, y = +\infty$;

в) 0, якщо $x > 1, y = -\infty$;

г) 0, якщо $0 \le x < 1, y = +\infty$;

д) $+\infty$, якщо $0 \le x < 1, y = -\infty$.

3) Нехай послідовності додатних чисел $(x_n),(y_n)$, де $\forall n \in \mathrm{N} \quad x_n \ne 1$, збігаються відповідно до чисел $x,\ y \in \overline{\mathrm{R}^+}$. Тоді послідовність $\log_{x_n} y_n$ збігається до:

а) $\log_x y$, якщо $x,\ y \in \mathrm{R},\ x \notin \{0;1\},\ y > 0$;

б) $-\infty$, якщо $x \in (0,1),\ y = +\infty$;

в) $+\infty$, якщо $x \in (1,+\infty),\ y = +\infty$;

г) 0, якщо $x \in \{0,+\infty\},\ y \in \mathrm{R}$;

д) ∞, якщо $x = 1,\ y \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$.

4) Нехай $x_n \to x \in \mathrm{R},\ n \to \infty$. Тоді при $n \to \infty$:

а) $\sin x_n \to \sin x$; **б)** $\cos x_n \to \cos x$;

в) $\operatorname{tg} x_n \to \operatorname{tg} x$ $\left(\forall n \in \mathrm{N}\ x_n \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathrm{Z}\right)$;

г) $\operatorname{ctg} x_n \to \operatorname{ctg} x$ $\left(\forall n \in \mathrm{N}\ x_n \neq k\pi,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathrm{Z}\right)$;

д) $\operatorname{arctg} x_n \to \operatorname{arctg} x$; **е)** $\operatorname{arcctg} x_n \to \operatorname{arcctg} x$.

5) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2} + k\pi$, де k – фіксоване ціле число. Тоді при $n \to \infty$:

а) $\operatorname{tg} x_n \to +\infty$, якщо $\forall n \in \mathrm{N}$ $\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + k\pi$;

б) $\operatorname{tg} x_n \to -\infty$, якщо $\forall n \in \mathrm{N}$ $\frac{\pi}{2} + k\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi$.

6) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = k\pi$, де k – фіксоване ціле число. Тоді при $n \to \infty$:

а) $\operatorname{ctg} x_n \to +\infty$, якщо $k\pi < x_n < (k+1)\pi$;

б) $\operatorname{ctg} x_n \to -\infty$, якщо $(k-1)\pi < x_n < k\pi$.

7) Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} x_n = \frac{\pi}{2}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arcctg} x_n = 0$.

8) Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} x_n = -\frac{\pi}{2}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arcctg} x_n = \pi$.

62. Використовуючи означення збіжної й обмеженої послідовності, доведіть такі твердження:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow x_n - x = o(1)$;

2) послідовність (x_n) , яка має не більше ніж скінченну кількість нульових членів, є нескінченно малою тоді й тільки тоді, коли $\frac{1}{x_n}$ є нескінченно великою;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тоді:

а) якщо $a < b$, то $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n < b$;

б) якщо $a > b$, то $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n > b$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$; тоді якщо $a < b$, то $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n < y_n$;

5) нерівність $x_n \le y_n$ виконується для нескінченної кількості індексів n; тоді якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $a \le b$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathrm{R}$, тоді якщо:

а) послідовність (x_n) має верхню межу, то $a \le \sup x_n$, при цьому $a = \sup x_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathrm{N}\ \ x_n \le a$;

б) послідовність (x_n) має нижню межу, то $a \le \inf x_n$, при цьому $a = \inf x_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathrm{N}\ \ x_n \ge a$;

7) якщо послідовність збіжна, то вона обмежена;

8) послідовність $x_n = o(y_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_\varepsilon : \forall n \ge n_\varepsilon\ \ |x_n| < \varepsilon |y_n|$;

9) якщо для послідовностей (x_n), (y_n) виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$, то послідовності $(x_n), (y_n)$ – одного порядку.

63. Чи є вказані послідовності (x_n) обмеженими, нескінченно великими? На множині R знайдіть найбільший і найменший члени послідовностей, якщо вони існують:

1) $x_n = \dfrac{1000\,n}{0{,}001\,n + 1}$; **2)** $x_n = \dfrac{n!}{10^{50n}}$;

3) $x_n = n \cos n$; **4)** $x_n = (2n+1)\sin \pi n$;

5) $x_n = n \cdot \sin\frac{n\pi}{2}$; **6)** $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\cos \pi n}$;

7) $x_n = \dfrac{n}{n^3 + 1000}$; **8)** $x_n = \dfrac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$;

9) $x_n = \dfrac{(\sqrt{39})^n}{n!}$; **10)** $x_n = \sin\frac{n\pi}{2}$;

11) $x_n = \dfrac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2 + 1}}$; **12)** $x_n = n^{(-1)^n}$;

13) $x_n = \dfrac{100 - n^3}{n^2 - 10}$; **14)** $x_n = \dfrac{n}{n^2 + 9}$;

15) $x_n = n + \frac{5}{n}$; **16)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$;

17) $x_n = \frac{5^{2n+1} + 2^n}{1 - 25^n}$; **18)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$;

19) $x_n = \left(1 + (-1)^n\right) n$; **20)** $x_n = \sqrt{n^4 + n^3 + 1} - \sqrt{n^4 - n^3 + 1}$;

21) x_n – кількість дільників числа n;

22) x_n – найбільше просте число, що є меншим за число $(n+2)$;

23) $x_n = \left(2^n + (-3)^n\right)$; **24)** $x_n = \sin n$;

25) $x_n = \cos n$; **26)** $x_n = \operatorname{tg} n$;

27) $x_n = \operatorname{arctg} n$; **28)** $x_n = 5^n - 4^n$.

64. Знайдіть границі послідовностей (x_n) шляхом спрощення:

1) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; **2)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$;

3) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$; **4)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+m)}$, $m \in \mathrm{N}$;

5) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sqrt{k} + \sqrt{k+1}\right)\sqrt{k(k+1)}}$; **6)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{m} \frac{1}{k+i}$, $m \in \mathrm{N}$;

7) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$; **8)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3 + 6k^2 + 11k + 5}{(k+3)!}$;

9) $x_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$; **10)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!}$;

11) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)(3k+7)}$; **12)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2 + 2k - 1}{(2k+1)!}$;

13) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2 + 6k + 1}{(2k+2)!}$; **14)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2 + 8k + 2}{(2k+3)!!}$;

15) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{(2k+2)!!}$; **16)** $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$;

17) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{2k+1}{k^2+k}\sin\frac{1}{k^2+k}$;

18) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{2k+1}{k^2+k}\sin\frac{1}{k^2+k}$.

65. Знайдіть серед наведених співвідношень невизначеності й за можливості зведіть їх до невизначеності $\frac{0}{0}$:

1) $\frac{0}{0}$; **2)** $\frac{\infty}{5}$; **3)** $\frac{\infty}{\infty}$; **4)** $\frac{0}{\infty}$;

5) $\infty-\infty$; **6)** $3^{-\infty}$; **7)** 1^{∞}; **8)** $(+\infty)^1$;

9) $0\cdot\infty$; **10)** 1000^{0}; **11)** 0^{0}; **12)** $(+\infty)^{-5}$;

13) ∞^0; **14)** $\log_0 0$; **15)** $\log_1(+\infty)$; **16)** $0^{-\infty}$;

17) $\log_{+\infty}1$; **18)** $7-\infty$; **19)** 1^0.

66. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\overline{\mathrm{R}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\in\overline{\mathrm{R}}$. Знайдіть границю послідовності (c_n) (якщо це можливо), де:

1) $c_n=a_n+b_n$; **2)** $c_n=a_n-b_n$; **3)** $c_n=b_n-a_n$;

4) $c_n=a_n\cdot b_n$; **5)** $c_n=\frac{a_n}{b_n}$; **6)** $c_n=\frac{b_n}{a_n}$;

7) $c_n=(a_n)^{b_n}$; **8)** $c_n=(b_n)^{a_n}$; **9)** $c_n=\log_{a_n}b_n$;

10) $c_n=\log_{b_n}a_n$, якщо:

а) $a=b=-\infty$; **б)** $a=-\infty, b=-1$; **в)** $a=-\infty$, $b=0$;

г) $a=-\infty, b=\frac{1}{2}$; **д)** $a=-\infty, b=1$; **е)** $a=-\infty$, $b=4$;

є) $a=-\infty$, $b=+\infty$; **ж)** $a=b=-1$; **з)** $a=-1, b=0$;

и) $a=-1, b=\frac{1}{2}$; **і)** $a=-1, b=1$; **ї)** $a=-1, b=4$;

й) $a=-1, b=+\infty$; **к)** $a=b=0$; **л)** $a=0, b=\frac{1}{2}$;

м) $a=0, b=1$; **н)** $a=0, b=4$; **о)** $a=0, b=+\infty$;

п) $a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2}$; **р)** $a=\frac{1}{4}, b=1$; **с)** $a=\frac{1}{4}, b=4$;

т) $a=\frac{1}{4}, b=+\infty$; **у)** $a=1, b=1$; **ф)** $a=1, b=4$;

х) $a=1, b=+\infty$; **ц)** $a=9, b=4$; **ч)** $a=9, b=+\infty$;

ш) $a=b=+\infty$.

67. Задані послідовності $a_n^{(k)}$ перенумерувати послідовними натуральними числами $1, 2, 3, \ldots$ таким чином, щоб послідовність $a_n^{(k)}$ мала менший номер порівняно з послідовністю $a_n^{(l)}$, якщо виконується умова $a_n^{(l)}=o(a_n^{(k)})$; послідовності одного порядку повинні мати однаковий номер у цій нумерації, де:

$a_n^{(1)}=n!$, $a_n^{(2)}=(2n)!$, $a_n^{(3)}=(2n)!!$,

$a_n^{(4)}=\frac{1}{n!}$, $a_n^{(5)}=2^n$, $a_n^{(6)}=5^n$,

$a_n^{(7)}=3^n+4^n$, $a_n^{(8)}=\sqrt{1+17^n}$, $a_n^{(9)}=\sqrt{9^n+11^n}$,

$a_n^{(10)}=\sqrt[n]{2^n+3^{n^2}}$, $a_n^{(11)}=\sqrt[n]{n+7^n}$, $a_n^{(12)}=\frac{1}{3^n}$,

$a_n^{(13)}=\frac{1}{2^n+4^n}$, $a_n^{(14)}=n\sqrt{n}$, $a_n^{(15)}=1+n+n^{\frac{7}{3}}$,

$a_n^{(16)}=n^2+\sqrt{n^5}$, $a_n^{(17)}=\frac{n^2+n\sqrt[3]{n}}{n-\pi}$, $a_n^{(18)}=\log_2(n^3+3n)$,

$a_n^{(19)}=\frac{1}{n^3+n}$, $a_n^{(20)}=\frac{1}{n^2\sqrt{n}}$, $a_n^{(21)}=\log_3(n^2+3n^5)$,

$a_n^{(22)}=\log_2(n^5+2^n)$, $a_n^{(23)}=\log_2(5^n+3^n)$, $a_n^{(24)}=\log_3\frac{2^n}{n+n^2}$,

$a_n^{(25)}=\log_3\frac{1}{n}$, $a_n^{(26)}=\log_3\frac{3^n}{n^{1000}+2^n}$, $a_n^{(27)}=\log_3\frac{1}{n^{1000}}$,

$a_n^{(28)}=\frac{1}{\ln n}$, $a_n^{(29)}=\log_2(\log_3(n^7+n))$, $a_n^{(30)}=\log_3\frac{n^2+1}{n^{10}+2}$.

68. Знайдіть границі, користуючись теоремами про збіжні послідовності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{m}a_k n^k}{\sum\limits_{k=0}^{l}b_k n^k}$, $m, l\in\mathrm{N}$, $a_m\cdot b_l\neq 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\cdot\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$;   **6)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}2n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;   **8)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{n^4-n^2}-n\right)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}}$;   **10)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}2^k}{\sum\limits_{k=1}^{n}3^k}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n}\sin\left(n^3\right)-\dfrac{3n}{6n+1}\right)$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{n^3}{2n+1}\right)+\dfrac{\sin(1-n)}{1-4n}\right)$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2n^2-1}\cdot\cos\dfrac{n+1}{2n-1}-\dfrac{n}{1-2n}\cdot\dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}\right)$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[an]}{n}$, $a\in\mathrm{R}$;   **15)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}+\dfrac{\left\{n^3-\frac{2}{3}n\right\}}{\ln(n+1)}+1\right)$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{2n^2-1}\cos\dfrac{n+1}{2n-(-1)^n}$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[7]{1+\dfrac{\operatorname{arctg}(\ln n)}{\sqrt{n}}}$; **18)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cdot\operatorname{arctg} n}{n^2-2}$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}$; **20)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\lg n+2^n}{n^2-\lg n-2^n}$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{a^n+1}$, $a\neq-1$; **22)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+2^n)+\lg(n^2+3^n)}{n+\log_2(\ln n+4^n)}$;

23) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!-e^n+n^{10}+\ln(n+1)}{5^n-25^n+n^4+1}$;

24) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n-25^n+\ln(3+n^n)-(2n)!}{\sin(n^3)+26^n+(2n)!!}$;

25) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}-\ln(n^{15}+n)+\ln(n+2^n)}{\log_2(1+n^{16})-2\cdot\sqrt[3]{n}+\sin n}$;

26) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(n^{10})-\sqrt[5]{n-\frac{3}{2}}-\ln(21n^3+5)}{\log_{10}(1+n)+\operatorname{arctg}(5-2^n)}$;

27) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{22}-n^3+3n^2-3^n+\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}{\log_{10}(n^3+n^2)+\ln(n+3^n)-(e+1)^n}$;

28) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-e^n+\ln(n^{10}+n^{20}+n^{30})-\sqrt[3]{n+1}}{2^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-5^n+n^{1000}+1}$;

29) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[n^3]-\{n^2\}+\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{\ln(n+n^4)+\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{4}{3}\right)^n+\left(\frac{5}{4}\right)^n}$.

69. Знайдіть границі послідовностей, користуючись теоремою про двох поліцаїв:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{k=0}^{n} k\cdot 2^{n-k+1}\cdot 3^{k-1}}$; **4)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{k=0}^{n} k^{p}}$, $p>0$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}}$; **6)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^5+k^2}}$; **8)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5+k^2-1}}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n^6+k^2+1}}$; **10)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2-3k+6}{k-n^4+1}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_1|^n+|a_2|^n+\ldots+|a_m|^n}$, $m\in\mathrm{N}$, $\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}\subset\mathrm{R}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a_1^n}+\frac{1}{a_2^n}+\ldots+\frac{1}{a_m^n}}$, $m\in\mathrm{N}$, $\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}\subset(0,+\infty)$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}}$, де (a_n) – довільна послідовність додатних чисел;

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2$, де послідовність додатних чисел (a_n) така, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=0$.

70. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\in\overline{\mathrm{R}}$. Дослідити на збіжність послідовність (b_n), де:

1) $b_n=|a_n|$; **2)** $b_n=\min\left\{a_n,\frac{1}{a_n}\right\}$; **3)** $b_n=[a_n]$;

4) $b_n=\{a_n\}$; **5)** $b_n=\operatorname{sgn} a_n$; **6)** $b_n=\sqrt{a_n a_{n+1}}$;

7) $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$; **8)** $b_n=(a_n)^{a_{n+1}}$; **9)** $b_n=\max\left\{a_n, a_n^2\right\}$.

71. Нехай послідовність додатних чисел (a_n) така, що $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n a_{n+1} = a \in \mathrm{R}^+$. Які з наведених послідовностей завжди збіжні й до якої границі, а які можуть бути розбіжними? Окремо розгляньте випадок $a = 0$.

1) $(n a_n)$; **2)** $(n^2 a_n a_{n+2})$;

3) $(n^2 a_n a_{n+3})$; **4)** $\left(\dfrac{n^2 a_n a_{n+1}}{(n+1)a_{n+1}}\right)$.

72. Користуючись критерієм Коші, дослідити на збіжність послідовності:

1) (x_n) – послідовність, що задовольняє умову:

а) $\exists C \in \mathrm{R}: \ \forall n \in \mathrm{N} \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| < C$ (така послідовність називається послідовністю з обмеженою варіацією);

б) $\exists \alpha \in (0,1) \ \exists m \in \mathrm{N}: \ \forall n \geq m \ |x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \alpha |x_{n+1} - x_n|$;

в) існує функція f, яка має область визначення $[1,+\infty)$ та є монотонно зростаючою й обмеженою на D_f, і $\exists m \in \mathrm{N} \ \ \forall n \geq m$ виконується нерівність $|x_{n+1} - x_n| \leq f(n+1) - f(n)$;

2) $x_1 = \dfrac{a}{2}$, $x_{n+1} = \dfrac{a}{2} - \dfrac{x_n^2}{2}$, $a \in [0,1]$; **3)** $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}$;

4) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos k}{2^k}$; **5)** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k!)}{k(k+1)}$;

6) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$; **7)** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin k$;

8) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos k$; **9)** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k$;

10) $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k$; **11)** $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{(-1)^n n}$;

12) $x_n = \dfrac{n\cos(\pi n) - 1}{2n}$;

13) $x_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$;

14) $x_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$;

15) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$;

16) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k$;

17) $x_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{\ln k}$;

18) $x_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k \ln^2 k}$;

19) $x_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{\ln^a k}$, $a \in \mathrm{R}$.

73. Доведіть твердження:

1) послідовність $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ монотонно зростаюча та обмежена;

2) послідовність $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонно спадна, обмежена та має границею число e;

3) послідовність $z_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ монотонно зростаюча, обмежена та має границею число e;

4) $\forall n \in \mathrm{N}$ справджуються нерівності:

а) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$; **б)** $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}} > \mathrm{e}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{mn + k} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{mn + k - 1}$ $\forall m \in \mathrm{N}$;

5) якщо послідовність $p_n \to +\infty$ (або $p_n \to -\infty$) при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \mathrm{e}$;

6) послідовність $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ монотонно зростаюча та необмежена.

74. Доведіть збіжність наведених послідовностей:

1) $x_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$; **2)** $x_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$;

3) $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$; **4)** $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$;

5) $x_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$; **6)** $x_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$;

7) $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^k}$; **8)** $x_n = \left(1+\frac{1}{n+m}\right)^n$, $m \in \mathrm{R} \setminus Z^-$;

9) $x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; **10)** $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}n}$;

11) $x_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{3}{2}n}$; **12)** $x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$;

13) $x_n = \left(1+\frac{1}{nm}\right)^{m+n}$, $m \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$;

14) $x_n = \left(1+\frac{m}{n}\right)^n$, $m \in \mathrm{R}$;

15) $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}$; **16)** $x_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2+1}\right)$;

17) $x_n = \prod_{k=1}^{n}\sin k$; **18)** $x_n = \prod_{k=1}^{n}\cos k$.

75. Дослідіть, чи є послідовність (x_n) монотонною або стає монотонною, починаючи з деякого номера, а також характер цієї монотонності:

1) $x_n = \frac{an+b}{cn+d}$, $\{a,b,c,d\} \subset \mathrm{R}$; **2)** $x_n = \frac{\lg n}{n}$;

3) $x_n = n^2 + (-1)^n$; **4)** $x_n = \sqrt{n} + (-1)^n$;

5) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - (-1)^n}$;

6) $x_n = \dfrac{n}{n - (-1)^n}$;

7) $x_n = n + (-1)^n$;

8) $x_n = \sin n$;

9) $x_n = \dfrac{n^2}{n^2 - (-1)^n}$;

10) $x_n = \dfrac{\ln n}{n}$;

11) $x_n = \sin n^\circ$;

12) $x_n = \ln n - n$;

13) $x_n = \dfrac{a^n - 1}{n}$, $a \in R$;

14) $x_n = \dfrac{(3n+1)^2}{3^n}$;

15) $x_1 = -10$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{n+1}$;

16) $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$;

17) $x_1 = 4$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 2}{3x_n}$;

18) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$;

19) $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{2} - 1$, де:

а) $x_1 = 2$;

б) $x_1 = 3$;

20) $x_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} y_k$, де (y_k) – зростаюча послідовність.

76. Знайдіть границі послідовностей, що задані рекурентно:

1) $x_1 = 5$, $x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n}$;

2) $x_1 = \dfrac{a}{2}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + a}{2}$, $a \in [0; 1]$;

3) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{4x_n}$;

4) $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_{n+1}^2 = 3x_n - 2$, $x_n > 0$;

5) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{4(1 - x_n)}$;

6) $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 + a$, $a \in \left[0; \dfrac{1}{4}\right]$;

7) $x_1 = \sqrt{3}$, $x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}$;

8) $x_1 \in (1{,}2)$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$;

9) $x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - x_n^2$, де:

а) $x_1 = \frac{1}{6}$; б) $x_1 = \frac{1}{2}$; в) $x_1 = \frac{7}{6}$;

10) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$; 11) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 4$;

12) $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} - 1$; 13) $x_1 = \frac{9}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 8x_n + 20$;

14) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{6}{5} - \frac{1}{5x_n}$; 15) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2(\sqrt{3} - x_n)}$;

16) $x_1 = 10$, $x_{n+1} = \sqrt{4x_n + 1}$; 17) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$;

18) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3x_n}$; 19) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{10} + 2x_n^2$;

20) $x_1 = 4$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$;

21) $x_1 \in (2{,}3)$, $x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6$;

22) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = x_n + (x_n - c)^2$, $c \in (0{,}1)$;

23) $x_{n+1} = x_n^2 - 6x_n + 12$, де:

а) $x_1 = 3$; б) $x_1 = 4$; в) $x_1 = \pi$; г) $x_1 = 2$;

д) $x_1 = 1$; е) $x_1 = -2$; є) $x_1 = 5$.

77. Знайдіть границі послідовностей (x_n) (в усіх задачах параметри $a > 0$, $m \in \mathrm{N}$), де:

1) $x_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$; 2) $x_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2}{\sum_{k=1}^{n}(2k)^2}$;

3) $x_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{1}{k}}{\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{1}{k}}$; **4)** $x_n = \dfrac{n}{a^n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a^{k-1}}{k}$;

5) $x_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$; **6)** $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$;

7) $x_n = \dfrac{1}{na^n} \sum_{k=1}^{n} ka^k$; **8)** $x_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$;

9) $x_n = \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$; **10)** $x_n = \dfrac{1}{n^7} \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^5$;

11) $x_n = \left(\sum_{k=1}^{n} k^k \right)^{\frac{2}{3n}}$; **12)** $x_n = \dfrac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} k^k$;

13) $x_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} \frac{1}{k}$; **14)** $x_n = \dfrac{1}{n^{m+1}} \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^m$;

15) $x_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k!}{\sum_{k=1}^{n} k^k}$; **16)** $x_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)...(k+m-1)}{n(n+1)...(n+m)}$;

17) $x_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)...(k+m-1)}{\sum_{k=1}^{n} k^m}$; **18)** $x_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k^m}{n^{m+1}} - \dfrac{n}{m+1}$;

19) $x_n = \dfrac{(n+1)\ln(n!) - 2\ln\left(\prod_{k=1}^{n} k! \right)}{n^2+n}$; **20)** $x_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$;

21) $x_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n\sqrt{n}+(-1)^n n}$; **22)** $x_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n+\sin n}$;

23) $x_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k\sqrt{k}+(-1)^n n}{n^2\sqrt{n}+(-1)^{n+1}(n+1)^2}$; **24)** $x_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(k+m)!}{k!}}{n^{m+1}}$.

78. Знайдіть границі послідовностей (x_n):

1) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \ln n$; **2)** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$;

3) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2n+2k-1}$; **4)** $x_n = \dfrac{1}{\ln n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$;

5) $x_n = \dfrac{1}{\ln n}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\dfrac{1}{k}$; **6)** $x_n = \dfrac{1}{\ln n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1}$;

7) $x_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{2^n}\dfrac{1}{k}$; **8)** $x_n = \dfrac{1}{\ln n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4k-1}$;

9) $x_n = \dfrac{1}{\ln n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4k-3}$; **10)** $x_n = \dfrac{1}{\ln n}\sum\limits_{k=n^l+1}^{n^m}\dfrac{1}{k}$, $l, m \in \mathrm{N}$;

11) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{3k-2}+\dfrac{1}{3k-1}-\dfrac{1}{3k}\right)$.

79. Для послідовностей (x_n) знайдіть $\inf\limits_{n\in N} x_n$, $\sup\limits_{n\in N} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ на $\overline{\mathrm{R}}$, якщо:

1) $x_n = 1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$; **2)** $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

3) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$; **4)** $x_n = 1+n\sin\dfrac{n\pi}{2}$;

5) $x_n = \dfrac{1}{n-7{,}3}$; **6)** $x_n = \sqrt[n]{1+2^{(-n)^n}}$;

7) $x_n = \dfrac{n^2}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$; **8)** $x_n = \left(-1-\dfrac{1}{n}\right)^n + \sin\dfrac{n\pi}{4}$;

9) $x_n = \cos^n\dfrac{2n\pi}{3}$; **10)** $x_n = \dfrac{n}{n+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$;

11) $x_n = -n\left(2+(-1)^n\right)$; **12)** $x_n = \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$;

13) $x_n = \{n\alpha\}$; **14)** $x_n = \{\sin^2 n\alpha\}$;

15) $x_n = \sin n^\circ$; **16)** $x_n = \sin n$;

17) $x_n = \cos n$; **18)** $x_n = \mathrm{tg}\, n$;

19) $x_n = \mathrm{arcctg}\,(n^2 - 12n + 35)$;

20) $x_n = \mathrm{arctg}\, n$; **21)** $x_n = \mathrm{arctg}\,(n^2 + n - 1)$.

80. Знайдіть множину часткових границь послідовностей (x_n) на множині $\overline{\mathrm{R}}$:

1) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{7}{8}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{2^n-1}{2^n}, \ldots$;

2) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \ldots$

3) $1, \dfrac{1}{2}, 1+\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, 1+\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, 1+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}, \ldots$
$\dfrac{1}{n}, 1+\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n+1}, \ldots$;

4) $x_n -$ n -те число за довільної нумерації всіх раціональних чисел;

5) $x_n = \sin\dfrac{n\pi p}{q}$, де $\dfrac{p}{q} \in \mathrm{Q} \setminus \mathrm{Z}$ – нескоротний дріб, $p \in \mathrm{Z}$, $q \in \mathrm{N}$;

6) $x_n = \mathrm{tg}\, n$; **7)** $x_n = \sin n$;

8) $x_n = \sin n^\circ$; **9)** $x_n = \{n\alpha\}$;

10) $x_n = [\sqrt{2}\, n]^2$; **11)** $x_n = n^{(-1)^n}$;

12) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}-(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n+1}$; **13)** $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

14) $x_n = (-n)^n$;

15) x_n – кількість дільників числа n;

16) x_n – сума дільників числа n;

17) x_n – найбільший спільний дільник чисел n та 12.

81. Побудуйте, якщо це можливо, послідовність $(x_n)\subset \mathrm{R}$, множиною часткових границь якої є задана множина з $\overline{\mathrm{R}}$:

1) $\{1\}$; **2)** $\{1; 2; 3; ...; n\}$;

3) $\left\{1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; ...\right\}$; **4)** $\left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}; ...; \dfrac{1}{n}; ...\right\}$;

5) $\left\{1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}; ...\right\}$; **6)** $[0; 1]$;

7) $(0; 1)$; **8)** N; **9)** $\mathrm{N}\bigcup\{+\infty\}$;

10) Q; **11)** $(0; +\infty)$; **12)** $\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}$;

13) $\overline{\mathrm{R}}$; **14)** $[0; 1]\bigcup\{2\}$; **15)** R;

16) $[0; 1]\bigcup[2; 3]$; **17)** $[0; 1)\bigcup(1; 3]$.

82. Нехай усі члени послідовності (x_n) – додатні числа. Доведіть такі твердження:

1) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \overline{\mathrm{R}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = l$, де через γ_n, η_n, ξ_n позначені відповідно середнє гармонічне, геометричне та арифметичне чисел $x_1, x_2, ..., x_n$;

2) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathrm{R}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$;

3) твердження, обернене до попереднього, може не справджуватись;

4) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

83. Знайдіть границі послідовностей (x_n):

1) $x_n=\left(\dfrac{n!}{n^n e^{-n}}\right)^{1/n}$; **2)** $x_n=\left(\dfrac{(n!)^2}{n^{2n}}\right)^{1/n}$; **3)** $x_n=\left(\dfrac{n^{3n}}{(n!)^3}\right)^{1/n}$;

4) $x_n=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[n]{n!}}$; **5)** $x_n=\dfrac{1}{n}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{1/n}$; **6)** $x_n=\dfrac{n}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^2}$.

84. Нехай послідовності (x_n) та (y_n) обмежені. Доведіть твердження:

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n\le\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n\le\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) якщо (x_n) та (y_n) – послідовності додатних чисел, то:

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n\le\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)\le\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n\le\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)\le\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$, якщо послідовність (x_n) збіжна;

5) якщо для довільної послідовності (y_n) виконується рівність $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$, то (x_n) – збіжна;

6) з умови $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$ випливає, що будь-яке число $\alpha\in\left[\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n,\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n\right]$ є частковою границею послідовності (x_n);

7) якщо (x_n) послідовність додатних чисел і $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=1$, то послідовність (x_n) – збіжна.

85. Наведіть приклади послідовностей (x_n) та (y_n), для яких виконуються умови:

1) жодна з підпослідовностей (x_{pk+q}) не є монотонною;

2) (x_n) та (y_n) мають рівно по одній частковій границі на R, а послідовність $\left(x_n+y_n\right)$ на R:

а) не має часткових границь;

б) має рівно одну часткову границю;

в) має рівно 2 часткових границі;

г) має більше двох часткових границь;

3) усі нерівності в задачі 81 п. **1)–3)** є строгими;

4) послідовності (x_n) та (y_n) необмежені, а послідовність $x_n y_n = o(1)$.

86. Дослідіть на збіжність послідовності (x_n), $n \in \mathrm{N}$ $(n \in \mathrm{Z}^+)$, що задані рекурентно (в усіх задачах параметри $a, b, c \in \mathrm{R}$, $\alpha > 0$):

1) $x_0 = a$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_{n+1} = \frac{5}{2}x_n - \frac{1}{2}x_{n-1} - x_{n-2}$, $n \geq 2$;

2) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n - \frac{9}{16}x_{n-1} + \frac{1}{16}x_{n-2}$, $n \geq 2$;

3) $x_1 = a$, $x_{n+1} = 1 + bx_n$, $n \geq 1$;

4) $x_0 = 0$, $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $n \geq 1$;

5) $x_0 = 0$, $x_1 = a$, $x_2 = b$ $x_{n+1} = -5x_n - 4x_{n-1} - x_{n-2}$, $n \geq 2$;

6) $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{4}x_{n-1}$, $n \geq 1$;

7) $x_{n+1} = \frac{5}{4}x_n - \frac{1}{4}x_{n-1}$, $n \geq 2$:

а) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; **б)** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

8) $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = c$, $x_{n+1} = -\frac{1}{3}x_n + \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{1}{12}x_{n-2}$, $n \geq 2$;

9) $x_0 = a$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_{n+1} = -x_n + \frac{1}{9}x_{n-1} + \frac{1}{9}x_{n-2}$, $n \geq 2$;

10) $x_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{6}x_{n-2}$, $n \geq 2$:

а) $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; **б)** $x_0 = 3$, $x_1 = a$, $x_2 = 1$;

11) $x_1 = a$, $x_2 = b$:

а) $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_{n-1}$, $n \geq 2$; **б)** $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2}$;

в) $x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n-1}}$;

12) $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$:

а) $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n^2 + y_n^2}{2}}$, $n \ge 1$;

б) $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, $n \ge 1$;

в) $x_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, $n \ge 1$;

13) $x_1 = 25$, $x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n$, $n \ge 1$;

14) $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_{n+1} = -\dfrac{x_{n+1}}{n+1} + \dfrac{n-1}{n} x_{n-1}$, $n \ge 2$;

15) $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{\alpha}{x_n}\right)$, $n \ge 1$;

16) $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{a}{x_n^2}\right)$, $n \ge 1$;

17) $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n(x_n^2 + 3\alpha)}{3x_n^2 + \alpha}$, $n \ge 1$;

18) $x_1 > 0$, $x_{n+1} = x_n(2 - \alpha x_n)$, $n \ge 1$.

87. Доведіть твердження:

1) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathrm{R}$, то:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k = \dfrac{a}{2}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{\sqrt{k}} = 2a$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b^{n-k} = \dfrac{a}{1-b}$, якщо $|b| < 1$;

2) якщо $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a \in \mathrm{R}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = a$;

3) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = b \in \mathrm{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_{n+1} - a_n) = c \in \mathrm{R}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b + c$;

4) зі збіжності послідовності $(a_n + a_{n+1})$ не обов'язково випливає, що послідовність (a_n) збіжна;

5) якщо $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n - a_{n-1}) = a \in \mathrm{R}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{a}{3}$;

6) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathrm{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathrm{R}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n} = ab;$$

7) послідовність (a_n) збіжна тоді й тільки тоді, коли для довільної біекції $\mathrm{N} \overset{f}{\leftrightarrow} \mathrm{N}$ збігається послідовність $a_{f(n)}$;

8) якщо $\forall m, n \in \mathrm{N}$ виконується нерівність $0 \le a_{m+n} \le a_m + a_n$, то послідовність $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ – збіжна;

9) якщо для деякої послідовності (a_n) визначимо послідовності $(\overline{a_n})$, $(\underline{a_n})$ за правилом $\overline{a_n} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\underline{a_n} = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $\forall n \in \mathrm{N}$, то виконуються умови:

а) $\sup\limits_{n\in\mathrm{N}} a_n = \sup\limits_{n\in\mathrm{N}} \overline{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{a_n}$; **б)** $\inf\limits_{n\in\mathrm{N}} a_n = \inf\limits_{n\in\mathrm{N}} \underline{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{a_n}$;

10) для довільної послідовності (a_n) виконуються умови:

а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\ge n} a_k = \inf\limits_{n\in N} \sup\limits_{k\ge n} a_k$;

б) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\ge n} a_k = \sup\limits_{n\in N} \inf\limits_{k\ge n} a_k$.

88. Побудуйте графіки функцій $f: R \to R$:

1) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $x \ge 0$; **2)** $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n + x^{-n}}{x^n - x^{-n}}$, $x \ne 0$;

3) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$; **4)** $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n}$, $x \ge 0$;

5) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^x + x^n}$, $x \ge 0$;

6) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, $x\geq 0$;

7) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{4^n+x^{2n}}}$, $x\geq 0$;

8) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}$, $x\geq 0$;

9) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(5^n+x^n)}{\ln(4^n+(x+1)^n)}$, $x\geq 0$;

10) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(2x^2-2)^n}$, $x\geq 0$;

11) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^{2n}}{2+x^{4n}}$;

12) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sin x)^{2n+2}+(\cos x)^{2n+2}}{(\sin x)^{2n}+(\cos x)^{2n}}$;

13) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}+(1-x)^{2n}}{[x]^{2n}}$;

14) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n+x^{2n}}{(x+1)^n+4^n}}$, $x\geq 0$;

15) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg} nx$;

16) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n\sqrt{x+\frac{1}{n}-\sqrt{x}}$, $x\geq 0$;

17) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$;

18) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left((x+1)^n+3^n\right)}{\ln(x^{2n}+4^n)}$, $x\geq 0$;

19) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$;

20) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(5^n+x^n+\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)}{2n}$, $x>0$;

21) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}(x^n)$;

22) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(3^n+\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)}{\ln\left(x^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}$, $x>0$;

23) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n x$;

24) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+2^n+\left(\frac{1}{x}\right)^n}$, $x>0$;

25) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg}x))$;

26) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{x^{2n}+3^n+\left(\frac{1}{2x}\right)^n}{x^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$, $x>0$;

27) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}$;

28) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln\left(x^{2n}+(x+1)^n+2^n\right)}$, $x\geq 0$;

29) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n} x$.

89. Знайдіть границі $\forall x\in\mathrm{R}$:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}x\operatorname{sgn}\left|\sin^2(n!\pi x)\right|$; **2)** $f(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}(\pi x m!)\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{m\to\infty}\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(m\sin^2(\pi x n!)\right)\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi\mathrm{e}n!)$; **5)** $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\ldots\sin x}_{n}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\dfrac{x^k}{k!}$; **7)** $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)$, $|x|<1$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\cos\dfrac{x}{2^k}$; **9)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

90. Що можна сказати про властивості послідовності $(x_n)\subset\overline{\mathrm{R}}$, якщо для фіксованого $a\in\mathrm{R}$ виконуються умови:

1) $\forall\varepsilon>0\ \ \forall n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \forall n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|<\varepsilon$;

2) $\forall\varepsilon>0\ \ \forall n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \forall n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|\ge\varepsilon$;

3) $\forall\varepsilon>0\ \ \forall n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \exists n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|<\varepsilon$;

4) $\forall\varepsilon>0\ \ \forall n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \exists n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|\ge\varepsilon$;

5) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \forall n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|<\varepsilon$;

6) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \forall n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|\ge\varepsilon$;

7) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \exists n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|<\varepsilon$;

8) $\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \exists n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|\ge\varepsilon$;

9) $\exists\varepsilon>0\ \ \forall n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \forall n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|<\varepsilon$;

10) $\exists\varepsilon>0\ \ \forall n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \forall n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|\ge\varepsilon$;

11) $\exists\varepsilon>0\ \ \forall n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \exists n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|<\varepsilon$;

12) $\exists\varepsilon>0\ \ \forall n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \exists n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|\ge\varepsilon$;

13) $\exists\varepsilon>0\ \ \exists n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \forall n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|<\varepsilon$;

14) $\exists\varepsilon>0\ \ \exists n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \forall n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|\ge\varepsilon$;

15) $\exists\varepsilon>0\ \ \exists n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \exists n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|<\varepsilon$;

16) $\exists\varepsilon>0\ \ \exists n_\varepsilon\in\mathrm{N}\ \ \exists n\ge n_\varepsilon\ \ |x_n-a|\ge\varepsilon$.

91. Чи можна стверджувати, що послідовності $u_n=x_n+y_n$, $v_n=x_ny_n$ обов'язково мають властивість P, якщо про послідовності (x_n), (y_n) відомо, що:

1) обидві ці послідовності мають властивість P;

2) (x_n) має властивість P, а (y_n) не має цієї властивості;

3) обидві послідовності не мають властивості P, і властивість P є такою:

а) обмежена послідовність;

б) фундаментальна послідовність;

в) послідовність збігається до деякого дійсного числа;

г) послідовність збігається до дійсного ненульового числа;

д) послідовність збігається до $+\infty$;

е) послідовність збігається до ∞;

є) послідовність монотонно зростає;

ж) послідовність додатних чисел зростає;

з) послідовність строго монотонна.

92. Доведіть нерівності для послідовностей (x_n), (y_n):

1) $\max\limits_{n\in N}|x_n + y_n| \le \max\limits_{n\in N}|x_n| + \max\limits_{n\in N}|y_n|$ за умови, що обидві послідовності збігаються до нуля;

2) $\sup\limits_{n\in N}|x_n + y_n| \le \sup\limits_{n\in N}|x_n| + \sup\limits_{n\in N}|y_n|$ за умови, що обидві послідовності є:

а) збіжними; **б)** обмеженими;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, якщо $p\ge 1$ і послідовності $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)$ та $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)$ – обмежені.

Розділ 8
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Короткі теоретичні відомості

Для довільної точки $x_0 \in \mathrm{R}$ та $\forall \varepsilon > 0$ множину $O_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) \subset \mathrm{R}$ називають ε-околом точки x_0. Для довільного $E > 0$ множини $O_E(+\infty) = (E,\ +\infty)$ та $O_E(-\infty) = (-\infty,\ -E)$ називають E-околами $+\infty$ та $-\infty$, відповідно. Множину $O_E(\infty) = (-\infty,\ -E) \bigcup (E,\ +\infty)$ називають E-околом ∞. Множину $O_\varepsilon(x_0) \bigcap X$ називають ε-околом точки x_0 у множині $X \subset \mathrm{R}$. Проколотим ε-околом точки $x_0 \in \mathrm{R}$ називають множину $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0) = O_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Точка $x_0 \in \overline{\mathrm{R}}$ називається граничною точкою множини $X \subset \mathrm{R}$, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0) \bigcap X \neq \varnothing$. Сукупність граничних точок множини X, що належать R, називають похідною множиною та позначають X'. Множину $X^{(n)}$ називають n-ю похідною множини X, якщо вона визначається умовою $X^{(n)} \overset{\mathrm{def}}{=} (X^{(n-1)})'$. Множину $X \subset \mathrm{R}$, для якої справджується рівність $X = X'$, називають досконалою. Точку дотику множини $X \subset \mathrm{R}$, яка не є граничною, називають ізольованою точкою цієї множини.

Нехай задана функція $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, точка x_0 є граничною точкою множини D_f. Число $\alpha \in \overline{\mathrm{R}}$ називають частковою границею функції f у точці x_0, якщо $\exists (x_n) \subset D_f \setminus \{x_0\}$, яка задовольняє умову $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$. Множину часткових границь функції f у точці x_0 позначають $E_f(x_0)$, при цьому

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \sup E_f(x_0), \ \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \inf E_f(x_0).$$

Якщо $E_f(x_0) = \{\alpha\}$, тобто $\forall (x_n) \subset D_f \setminus \{x_0\}: \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$, то число α називають границею функції f у точці x_0 у розумінні Гейне і позначають $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.

Число α називають границею функції f у точці x_0 у розумінні Коші, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) \bigcap D_f \ \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Теорема 1 (*еквівалентність означень границі за Коші та Гейне*).

Означення границі функції в точці за Коші та за Гейне еквівалентні.

Теорема 2 (*арифметичні дії з функціями, що мають границю в точці*).

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ та $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \beta$, де x_0 є граничною точкою множини $D_f = D_g$ та $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$. Тоді:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \alpha\beta$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$, якщо $\beta \neq 0$.

Теорема 3 (*границя композиції*).

Нехай t_0 є граничною точкою множини $D_{f\circ g}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$ та $\exists \overset{\circ}{O}_\delta(t_0)\subset D_g:\ g(\overset{\circ}{O}_\delta(t_0))\subset D_f\setminus\{x_0\}$, тоді $\lim\limits_{t\to t_0}(f\circ g)(t)=\alpha$.

Для функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ точка x_0 є граничною точкою множини $D_f\cap(x_0,+\infty)$. Позначимо через $g=f\Big|_{D_f\cap(x_0,+\infty)}$ звуження функції f. Покладемо значення, якщо воно існує,

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)\overset{\text{def}}{=}\lim_{x\to x_0} g(x),$$

яке називають правою границею функції f у точці x_0.

Аналогічно все відбувається, якщо точка x_0 є граничною точкою множини $D_f\cap(-\infty,x_0)$. Позначимо через $h=f\Big|_{D_f\cap(-\infty,x_0)}$ звуження функції f. Покладемо значення, якщо воно існує,

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)\overset{\text{def}}{=}\lim_{x\to x_0} h(x),$$

яке називають лівою границею функції f у точці x_0.

Теорема 4 (*критерій існування границі функції в точці*).

Для функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ точка x_0 є граничною точкою множини $D_f\cap(x_0,+\infty)$ та $D_f\cap(-\infty,x_0)$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існує тоді й тільки тоді, коли існують та рівні значення $f(x_0+0)=f(x_0-0)$.

Теорема 5 *(односторонні границі монотонної функції).*

Якщо функція $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ монотонна на D_f, то для кожної точки x_0, що є граничною для множини $D_f\bigcap(-\infty, x_0)$ ($D_f\bigcap(x_0, +\infty)$), існують значення $f(x_0-0)\in\overline{\mathrm{R}}$ ($f(x_0+0)\in\overline{\mathrm{R}}$).

Нехай для функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ точка $x_0\in\overline{\mathrm{R}}$ є граничною для D_f; якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, то функцію f називають нескінченно малою при $x\to x_0$. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$, то функцію f називають нескінченно великою при $x\to x_0$ і пишуть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Для вивчення поведінки функцій в околі граничної точки області визначення, де сама функція може бути невизначеною, визначають символи Ландау, аналогічні тим, що були визначені при вивченні послідовностей.

Нехай функції $f, g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ і точка $x_0\in\overline{\mathrm{R}}$ гранична для множин $D_f=D_g$. Кажуть, що:

функція $f=O(g)$ ("O" велике) у точці x_0 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists M>0$ $\exists\delta>0:\ \forall x\in\overset{\circ}{O}_\delta(x_0)\ \ |f(x)|\le M|g(x)|$;

функції f та g одного порядку в точці x_0 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f=O(g)\wedge g=O(f)$;

функція $f=o(g)$ ("o" мале) у точці x_0 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:$ $\forall x\in\overset{\circ}{O}_\delta(x_0)\ \ |f(x)|<\varepsilon|g(x)|$;

функції $f\sim g$ (еквівалентні) у точці x_0 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f-g=o(g)$;

функція ag, $a\ne 0$ є головною частиною функції f у точці x_0 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f\sim ag$.

Функцію $f = O(1)$ називають обмеженою в точці x_0, інакше – необмеженою.

Функція $f = o(1)$ є нескінченно малою в точці x_0. Якщо в точці x_0 $f = o(1)$, $g = o(1)$ та $g = o(f)$, то функцію g називають нескінченно малою вищого порядку порівняно з функцією f у точці x_0.

Теорема 6 (*критерій існування границі функції в точці через нескінченно малу*).

Нехай x_0 є граничною точкою множини D_f, тоді

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \in \mathrm{R} \iff f - \alpha = o(1) \text{ у точці } x_0.$$

Теорема 7 (*перша та друга чудові границі*).

$$\lim_{x\to 0} = \frac{\sin x}{x} = 1, \ \lim_{x\to 0} = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

Задачі

93. Для кожної точки x_0 множини $A = \{0; \frac{1}{2}; 1; +\infty\}$ побудуйте $O_\varepsilon(x_0)$, а також ε-окіл у множині X, якщо:

1) $X = [-1; 1]$; **2)** $X = (0; 1)$;

3) $X = \mathrm{R}^+$; **4)** $X = \{\frac{1}{n} | \, n \in \mathrm{N}\}$;

5) $X = \mathrm{N}$ та:

а) $\varepsilon = \frac{1}{10}$; **б)** $\varepsilon = 1$; **в)** $\varepsilon = 10$.

94. Визначте, для яких із наведених множин $X \subset \mathrm{R}$ точка $x_0 \in \overline{\mathrm{R}}$ є граничною, якщо:

1) $x_0 = 0$; **2)** $x_0 = 1$; **3)** $x_0 = +\infty$:

а) $X = \mathrm{Z}$; **б)** $X = \mathrm{Q}$;

в) $X = \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}$; **г)** $X = \mathrm{R} \setminus \mathrm{N}$;

д) $X = \{\frac{1}{n} | \, n \in \mathrm{N}\}$; **е)** $X = (0; 1)$;

є) $X=[0;\frac{1}{2}]\bigcup\{1\}$; **ж)** $X=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2n+1};\frac{1}{2n})$;

з) $X=\{\frac{n^3-2n^2+1}{n^3+3n+5}|\, n\in\mathrm{N}\}$; **и)** $X=\{\frac{1}{2}(1+(-1)^n)|\, n\in\mathrm{N}\}$;

і) $X=\{n^{(-1)^n}\ |\, n\in\mathrm{N}\}$; **ї)** $X=\{\cos n|\, n\in\mathrm{N}\}$;

й) $X=\{\mathrm{tg}\ n|\, n\in\mathrm{N}\}$; **к)** $X=\{\mathrm{arcctg}\ n\ |\, n\in\mathrm{N}\}$.

95. Для множини $X\subset\mathrm{R}$ знайдіть похідну множину X', якщо:

1) $X=[-1;1]$; **2)** $X=(0;1)$; **3)** $X=\{\frac{1}{n}|\, n\in\mathrm{N}\}$;

4) $X=\{\frac{2k+1}{2^m}|\, k,\, m\in\mathrm{N}\}$; **5)** $X=\{\mathrm{tg}\, n|\, n\in\mathrm{N}\}$;

6) $X=\{\cos n|\, n\in\mathrm{N}\}$; **7)** $X=\mathrm{Q}$; **8)** $X=\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}$;

9) $X=\{1\}$; **10)** $X=\{\cos n^\circ|\, n\in\mathrm{N}\}$;

11) $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(n;\, n+\frac{1}{n})$; **12)** $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^3};\frac{1}{n^2})$;

13) $X=\{\mathrm{arctg}\, n|\, n\in\mathrm{Z}\}$; **14)** $X=(0;1)\bigcup\{2\}$;

15) $X=\{(1+\frac{1}{n})^n\, |\, n\in\mathrm{N}\}$; **16)** $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n};\, n)$;

17) $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{2n-1}{2n-1};\frac{2n-1}{2n})$; **18)** $X=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(0;\, 1+\frac{1}{n})$.

96. Для множини $X\subset\mathrm{R}$ знайдіть $\forall n\in\mathrm{N}$ множину $X^{(n)}$, якщо:

1) $X=[-1;1]$; **2)** $X=(0;1)$; **3)** $X=\{\frac{1}{n}|\, n\in\mathrm{N}\}$;

4) $X=\{\mathrm{arctg}\ n\ |\, n\in\mathrm{N}\}$; **5)** $X=\{\mathrm{tg}\, n|\, n\in\mathrm{N}\}$;

6) $X=\{\cos n|\, n\in\mathrm{N}\}$; **7)** $X=\mathrm{Q}$; **8)** $X=\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}$;

9) $X=\{1\}$; **10)** $X=\{\cos n^\circ|\, n\in\mathrm{N}\}$;

11) $X=\{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}|\, n,\, k\in\mathrm{N}\}$.

97. Перевірте, чи справджуються твердження.

1) Множина X зліченна тоді й тільки тоді, коли множина X' також зліченна.

2) Замкнена множина $X\subset\mathrm{R}$ досконала тоді й тільки тоді, коли її доповнення не містить інтервалів із суміжними краями.

3) Множини K_3 та K_{10} є досконалими.

4) Для довільної множини $X \subset \mathrm{R}$:

а) X' – замкнена; **б)** $X \subset X'$;

в) $X \supset X'$; **г)** $\forall n \in \mathrm{N} \ \ X' \supset X'' \supset ... \supset X^{(n)}$.

5) Якщо всі множини $X_k \subset \mathrm{R}$, $k \in \mathrm{N}$ досконалі, то досконалою також буде множина:

а) $\forall n \in \mathrm{N} \ \ X = \bigcup_{k=1}^{n} X_k$; **б)** $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$.

6) Множина X замкнена тоді й тільки тоді, коли вона містить усі свої граничні точки.

7) Для довільної замкненої множини $X \subset \mathrm{R}$ існує така послідовність (x_n), що множина її часткових границь збігається з множиною X .

98. Наведіть приклад множини $X \subset \mathrm{R}$, якщо це можливо, для якої справджується наведена умова:

1) $X' = (0; 1)$; **2)** $X' = \mathrm{Q}$;

3) $X' = \mathrm{N}$; **4)** $X' = K_3$;

5) $X = \{\sin n \mid n \in \mathrm{N}\}$; **6)** $X = \{\sin n^\circ \mid n = \overline{1, 360}\}$;

7) $X \neq \varnothing$, $X' \neq \varnothing$; **8)** $X' \neq \varnothing$, $X'' \neq \varnothing$;

9) для деякого $n \in \mathrm{N}$ $X' \neq \varnothing$, $X'' \neq \varnothing$,…, $X^{(n-1)} \neq \varnothing$, $X^{(n)} = \varnothing$;

10) усі точки множини X ізольовані, $X \neq \varnothing$ та $\inf\limits_{x,\, y \in X} |x - y| = 0$;

11) $X \not\subset X' \wedge X' \not\subset X$; **12)** $X \subset X' \wedge X \neq X'$;

13) $X' \subset X \wedge X \neq X'$.

99. Записати визначення за Коші таких тверджень для функції $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, якщо a та $+\infty$ – граничні точки множини $D_f \bigcap (a, +\infty)$, a та $-\infty$ – граничні точки множини та $D_f \bigcap (-\infty, a)$, $a, b \in \mathrm{R}$:

1) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$; **2)** $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$; **3)** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$; **5)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$; **6)** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$;

7) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$; **8)** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$; **9)** $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$;

10) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$; **11)** $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$;

12) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$; **13)** $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$;

14) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$; **15)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$; **17)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$;

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$; **19)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$;

20) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; **21)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$;

22) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; **23)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

100. Записати визначення за Коші таких тверджень для функції $x\mapsto y(x)$, якщо a та $+\infty$ є граничними точками множини $D_f\bigcap(a,+\infty)$, a та $-\infty$ – граничними точками множини та $D_f\bigcap(-\infty,a)$, $a,b\in\mathrm{R}$:

1) $y\to b-0$;

а) $x\to a$; **б)** $x\to a-0$; **в)** $x\to a+0$;
г) $x\to\infty$; **д)** $x\to-\infty$; **е)** $x\to+\infty$;

2) $y\to b+0$;

а) $x\to a$; **б)** $x\to a-0$; **в)** $x\to a+0$;
г) $x\to\infty$; **д)** $x\to-\infty$; **е)** $x\to+\infty$.

101. Перевірити, чи справджуються твердження:

1) Нехай t_0 є граничною точкою множини $D_{f\circ g}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$ та $\exists \overset{\circ}{O}_\delta(t_0)\subset D_g:\ g(\overset{\circ}{O}_\delta(t_0))\subset D_f$, тоді $\lim\limits_{t\to t_0}(f\circ g)(t)=\alpha$ (*узагальнення теореми про границю композиції*).

2) Границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існує тоді й тільки тоді, коли:

а) у точці x_0 функція f задовольняє умову Коші, тобто

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x_1, x_2 \in D_f \bigcap \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

(*критерій Коші існування границі функції в точці*);

б) $\forall (x_n)\subset D_f\setminus\{x_0\}:\ x_n\to x_0$ послідовність $f(x_n)$ збіжна;

в) $\exists a\in \mathrm{R}:\ \forall (x_n)\subset D_f\setminus\{x_0\}:\ x_n\to x_0$ існує підпослідовність (x_{n_k}), для якої $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=a$.

3) Існує скінченна границя функції $h:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ при $x\to x_0$ ($\lim\limits_{x\to x_0} h(x)\in\mathrm{R}$), якщо:

а) функції $f, g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ мають однакові області визначення, існують скінченні границі обох функцій f, g при $x\to x_0$ та $h=f+g$;

б) функції $f, g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ мають однакові області визначення, існують скінченні границі обох функцій f, g при $x\to x_0$ та $h=f\cdot g$;

в) функції $f, g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ мають однакові області визначення, для функції f існує скінченна границя при $x\to x_0$, а для функції g скінченної границі не існує та $h=f+g$;

г) функції $f, g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ мають однакові області визначення, для функції f існує скінченна границя при $x\to x_0$, а для функції g скінченної границі не існує та $h=f\cdot g$;

д) функції $f, g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ мають скінченні границі $\lim\limits_{x\to g(x_0)} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ та $h=f\circ g$;

е) функція $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ має скінченну границю $\lim\limits_{x\to g(x_0)} f(x)$, а для функції $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ не існує скінченної границі $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ та $h=f\circ g$;

є) функція $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ має скінченну границю $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, а для функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ не існує скінченної границі $\lim\limits_{x\to g(x_0)} f(x)$ та $h=f\circ g$.

4) Якщо функція $(a;+\infty)\xrightarrow{f}\mathrm{R}$ обмежена на проміжку $(a;b)$ для довільного $b>a$, то:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$, де $\exists c>0:\ \forall x>a\ f(x)\ge c$.

5) Якщо для функції $(a;+\infty)\xrightarrow{f}\mathrm{R}$ та деякого $n\in\mathrm{N}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{1}{n+1}$.

6) Якщо функція $(a;b)\xrightarrow{f}\mathrm{R}$ монотонна, то $\forall x_0\in(a;b)$ $\exists f(x_0-0),\ f(x_0+0)\in\mathrm{R}$.

102. Для заданої функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ і точки $x_0\in\overline{\mathrm{R}}$ знайдіть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b\in\overline{\mathrm{R}}$, а також для заданого $\varepsilon>0$ знайдіть таке $\delta>0$, щоб з умови $x\in D_f\bigcap\overset{\circ}{O}_\delta(x_0)$ випливало, що $f(x)\in O_\varepsilon(b)$, якщо:

1) $f(x)=x^3$, $x_0=2$ та:

а) $\varepsilon=0{,}1$; **б)** $\varepsilon=0{,}01$; **в)** $\varepsilon=0{,}001$;

2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, $x_0=2$ та:

а) $\varepsilon=0{,}1$; **б)** $\varepsilon=0{,}01$; **в)** $\varepsilon=0{,}001$;

3) $f(x)=\frac{x-1}{2x+1}$, $x_0=3$ та:

а) $\varepsilon=0{,}1$; **б)** $\varepsilon=0{,}01$; **в)** $\varepsilon=0{,}001$;

4) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$ та $\varepsilon=0{,}01$;

5) $f(x)=\mathrm{tg}\ x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$ та $\varepsilon=0{,}1$;

6) $f(x)=\ln(1+x)$, $x_0=0$ та $\varepsilon=0{,}01$;

7) $f(x)=\text{arctg}\ x$, $x_0=0$ та $\varepsilon=0{,}01$;

8) $f(x)=\text{sgn}\,x$, $x_0=0{,}001$ та $\varepsilon=0{,}1$;

9) $f(x)=\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$ та $\varepsilon=0{,}1$;

10) $f(x)=\frac{x^3-3x^2}{x-3}$, $x_0=3$ та $\varepsilon=0{,}01$;

11) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x_0=+\infty$ та $\varepsilon=0{,}2$;

12) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4}$, $x_0=+\infty$ та $\varepsilon=0{,}1$;

13) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $x_0=+\infty$ та $\varepsilon=0{,}01$;

14) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $x_0=+\infty$ та $\varepsilon=0{,}1$;

15) $f(x)=\text{sgn}(\text{arctg}\ x)$, $x_0=-\infty$ та $\varepsilon=0{,}01$.

103. Доведіть рівності:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$, $x_0\geq 0$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x_0}$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}x^n=x_0^m$, $m\in \mathrm{Z}$; 4) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0}$, $m\in \mathrm{Z}$, $x_0\geq 0$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$; 6) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$;

7) $\lim\limits_{x\to x_0}\text{arctg}\,x=\text{arctg}\,x_0$; 8) $\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin x=\arcsin x_0$, $|x_0|\leq 1$;

9) $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$, $a>0$; 10) $\lim\limits_{x\to x_0}\log_a x=\log_a x_0$, $a>1, x_0>0$.

104. Для функцій $f, g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ і точки $x_0\in\overline{\mathrm{R}}$ справджуються умови: $\exists\varepsilon>0:\ \overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0)\subset(D_f\cap D_g)$ та $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\in\overline{\mathrm{R}}$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b\in\overline{\mathrm{R}}$. Знайдіть, якщо це можливо, такі границі (див. задачу № 65):

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}(g(x)-f(x))$; 4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$; **6)** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}$;

7) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}$; **8)** $\lim\limits_{x\to x_0}(g(x))^{f(x)}$,

якщо:

а) $a=b=-\infty$; **б)** $a=-\infty,\ b=-1$; **в)** $a=-\infty,\ b=0$;

г) $a=-\infty,\ b=\frac{1}{2}$; **д)** $a=-\infty,\ b=1$; **е)** $a=-\infty,\ b=4$;

є) $a=-\infty,\ b=+\infty$; **ж)** $a=b=-1$; **з)** $a=-1,\ b=0$;

и) $a=-1,\ b=\frac{1}{2}$; **і)** $a=-1,\ b=1$; **ї)** $a=-1,\ b=4$;

й) $a=-1,\ b=+\infty$; **к)** $a=b=0$; **л)** $a=0,\ b=\frac{1}{2}$;

м) $a=0,\ b=1$; **н)** $a=0,\ b=4$; **о)** $a=0,\ b=+\infty$;

п) $a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{2}$; **р)** $a=\frac{1}{4},\ b=1$; **с)** $a=\frac{1}{4},\ b=4$;

т) $a=\frac{1}{4},\ b=+\infty$; **у)** $a=1,\ b=1$; **ф)** $a=1,\ b=4$;

х) $a=1,\ b=+\infty$; **ц)** $a=9,\ b=4$; **ч)** $a=9,\ b=+\infty$;

ш) $a=b=+\infty$.

105. Функції $f,g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ визначені в деякому околі $\overset{\circ}{O}(x_0)$ точки $x_0\in\overline{\mathrm{R}}$. Доведіть, що при $x\to x_0$ справджуються співвідношення:

1) $o(f)+o(f)=o(f)$; **2)** $o(f)+O(f)=O(f)$;

3) $O(f)+O(f)=O(f)$; **4)** $o(f)\cdot o(f)=o(f^2)$;

5) $o(f)\cdot O(f)=o(f^2)$; **6)** $O(f)\cdot O(f)=O(f^2)$;

7) $o(f^a)=(o(f))^a,\ a>0$; **8)** $O(o(f))=o(f)$;

9) $o(O(f))=o(f)$; **10)** $o(f+o(f))=o(f)$;

11) якщо $g=O(f)$, то:

а) $o(f)+o(g)=o(f)$; **б)** $O(f)+O(g)=O(f)$;

в) $o(f)+O(g)=O(f)$; **г)** $o(f)+O(g)=O(f)$;

12) якщо $g \sim f$, то:

а) $o(f)+o(g)=o(f)$; **б)** $O(f)+O(g)=O(f)$;

в) $o(f)+O(g)=O(f)$; **г)** $o(f)+O(g)=O(f)$;

13) $o(f)\cdot o(g)=o(fg)$; **14)** $o(f)\cdot O(g)=o(fg)$;

15) $O(f)\cdot O(g)=O(fg)$; **16)** $f\cdot O(g)=O(fg)$;

17) $f\cdot o(g)=o(fg)$.

106. Доведіть, що при $x\to 0$ (тобто в точці $x_0=0$) справджуються співвідношення ($m>n$, $C=\text{const}$, $C\neq 0$):

1) $x^m=o(x^n)$; **2)** $o(x^m)=o(x^n)$;

3) $o(o(x^n))=o(x^n)$; **4)** $o(x^m)+o(x^n)=o(x^n)$;

5) $C\cdot o(x^n)=o(x^n)$; **6)** $o(C\cdot x^n)=o(x^n)$;

7) $O(x^m)=O(x^n)$; **8)** $O(x^m)+O(x^n)=O(x^n)$;

9) $x^k\cdot o(x^n)=o(x^{k+n})$; **10)** $O(x^k)\cdot o(x^n)=o(x^{k+n})$;

11) $o(x^k)\cdot o(x^n)=o(x^{k+n})$; **12)** $o(x^m+C\cdot x^n)=o(x^n)$.

107. Виконайте перетворення при $x\to 0$:

1) $(x-x^2+x^3+o(x^4))(1-2x+3x^3+o(x^4))$;

2) $(x+x^3+o(x^3))(2+x^2+x^3+o(x^4))$;

3) $(2x-x^2+x^3+o(x^3))(1-x^2+x^4+o(x^5))$;

4) $(x+x^2+\alpha(x))(1-x^2+2x^3+3x^4+o(x^5))$, де:

а) $\alpha(x)=o(x^2)$; **б)** $\alpha(x)=o(x^3)$; **в)** $\alpha(x)=o(x^4)$;

5) $(x-x^2+x^3+o(x^3))(1+x-2x^2+o(x^3))+\alpha(x)$, де:

а) $\alpha(x)=-2x^3+o(x^3)$; **б)** $\alpha(x)=x^2-2x^3+o(x^3)$;

в) $\alpha(x)=o(x^3)$;

6) $(1-x^2+o(x^4))(1+x^2+\alpha(x))-(1+x^3)(1+x^5+o(x^5))$, де:

а) $\alpha(x)=o(x^2)$; **б)** $\alpha(x)=-x^3+o(x^3)$;

в) $\alpha(x)=-x^3-x^4+o(x^4)$;

7) $(x+x^2+3x^3+o(x^3))(x-x^2-2x^3+o(x^3))+\alpha(x)$, де:

а) $\alpha(x)=x^2+o(x^4)$; **б)** $\alpha(x)=x^2+o(x^3)$;

в) $\alpha(x)=o(x^3)$.

108. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, якщо:

1) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+o(x^3)}{6x^2+o(x^3)}$; **2)** $f(x)=\dfrac{x^2+x^3+o(x^3)}{2x^3+3x^2+o(x^2)}$;

3) $f(x)=\dfrac{x^3+o(x^3)}{x^2+o(x^2)}$; **4)** $f(x)=\dfrac{6x-3x^2+o(x^2)}{5x^3-x+o(x^3)}$;

5) $f(x)=\dfrac{x^2+3x^4+o(x^4)}{6x^3+3x^4+o(x^4)}$; **6)** $f(x)=\dfrac{7x^3-x^4+o(x^5)}{7x^3-x+o(x^4)}$;

7) $f(x)=\dfrac{o(x^2)}{o(x)}$; **8)** $f(x)=\dfrac{x^3+o(x)}{x^3+o(x^2)}$;

9) $f(x)=\dfrac{3x^2+x^3+o(x^3)}{x+x^3+o(x^3)}$; **10)** $f(x)=\dfrac{x^2+x^4+o(x^2)}{x^5-3x^2+o(x^2)}$;

11) $f(x)=\dfrac{3x-x^3+o(x^3)}{o(x^2)}$; **12)** $f(x)=\dfrac{x^2+x^3+x^4+o(x^4)}{x^3+x^2+x+o(x^3)}$;

13) $f(x)=\dfrac{x^3+o(x)}{2x^2+o(x)}$; **14)** $f(x)=\dfrac{x^4-x^3+o(x^4)}{3x^3+x^4+o(x^3)}$;

15) $f(x)=\dfrac{x^2+o(x)}{2x^3+o(x)-1}$; **16)** $f(x)=\dfrac{3x^3+o(x^3)}{2x^4+o(x^4)}$;

17) $f(x)=\dfrac{3x^3+o(x^3)}{2x^3+o(x^3)}$; **18)** $f(x)=\dfrac{3x^3+o(x^3)}{2x^2+o(x^2)}$.

109. Доведіть, що при $x\to 0$ справджуються рівності:

1) $\sin x = x+o(x^2)$; **2)** $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$;

3) $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$; **4)** $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^n)$;

5) $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2} + o(x^2)$; **6)** $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$;

7) $a^x = 1 + x\ln a + \frac{x^2 \ln^2 a}{2} + o(x^2)$; **8)** $\operatorname{sh} x = x + o(x^2)$;

9) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$; **10)** $\operatorname{th} x = x + o(x^2)$;

11) $\arcsin x = x + o(x^2)$; **12)** $\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$;

13) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x + o(x^2)$; **14)** $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - x + o(x^2)$.

У задачах № 111–117 параметри b, c, d вважаються додатними, інші параметри можуть мати довільні дійсні значення.

110. Знайдіть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}{x^2-16}$; **4)** $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2+(x-8)^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$; **6)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-1-5x}{x^5+x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}+\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[7]{1+2x}}{\sqrt[4]{1+2x}+x-\sqrt[6]{1+x}}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$; **9)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}-2}{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$; **11)** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$;

12) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+1}{(x-1)^2}$; **13)** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3+(4x-16)^3}{\sqrt{x}-2}$;

14) $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; **15)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

16) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; **17)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$; **19)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[2]{1+3x}-\sqrt[4]{1+4x}}{1-\sqrt{1+2x}}$;

20) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; **21)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+x)}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$;

22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x(1-x)}$; **23)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x-x^2}-(1+x)}{x^2+x^3+x^4+x^5}$;

24) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$;

26) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-x^{m+1}+x^m-nx+n-1}{(x-1)^2}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{x}$;

28) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{(1+x+\frac{x^2}{2})^{\frac{3}{2}}-1-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2}{x^3}$;

29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n+(1+x)^{-n}-2}{x^2+x^{\frac{7}{3}}}$;

30) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{(x-2)^3+\sqrt[4]{14+x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{7+x}-3\sqrt{x-1})\sqrt{x-2}}$;

31) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x})\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{1+x}-(1+x)^4}$; **32)** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+x^3}}$.

111. Знайдіть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x}{x^2-x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$; 4) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\cos x-\cos\alpha}{x-\alpha}$;

5) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\alpha}{x-\alpha}$; 6) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}\alpha}{x-\alpha}$;

7) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sec x-\sec\alpha}{x-\alpha}$; 8) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\operatorname{cosec}x-\operatorname{cosec}\alpha}{x-\alpha}$;

9) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; 10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}(x+x^3)}{x^2-x}$;

11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\alpha+2x)+\sin\alpha-2\sin(\alpha+x)}{x^2}$;

12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; 13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 4x}{1-\cos x}$;

14) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$; 15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt2}{2}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt2}{2}}$;

16) $\lim\limits_{x\to\pi+0}\dfrac{\sin x+2\sqrt{x-\pi}\cdot\operatorname{tg}x}{(\pi-x)\sin\frac{x}{2}}$;

17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}(1+x)\operatorname{tg}(1-x)-\operatorname{tg}^2 1}{\operatorname{tg}^2 x}$;

18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$; 19) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$;

20) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{\operatorname{tg}^2x+1-\cos 2x}$; 21) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}(\sin(\operatorname{tg}x))}{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}(\sin x))}$;

22) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x\sin(2x\sin 3x))}{x^3}$;

23) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\sin(\operatorname{tg}^2 x)-1}{\operatorname{tg}(\cos^2 x-1)}$;

24) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos\sqrt{x})(1-\cos x)}{(\cos x-\cos 2x)\sin x}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x\sin x)-\sin(x\,\mathrm{tg}\,x)}{(1-\cos x\cos 2x)(1-\cos 3x)}$;

26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\alpha+2x)\sin(\alpha+x)-\sin^2\alpha}{x}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin x\cdot \mathrm{tg}\,x}$;   28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}\,x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$;

29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$;   30) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt[4]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$;

31) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$;   32) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

112. Знайдіть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos(x^2)}}{1-\cos x}$;   2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$;   4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2-x^4}$;   6) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{tg}\,x}-\sqrt{1+\mathrm{tg}\,x}}{\sin 2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi}{\cos x}-2x\cdot \mathrm{tg}\,x\right)$;   8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{x}{\sin x}\right)$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x-\sin 2x}$;   10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos\frac{3}{2}x}-\sqrt{1+\mathrm{tg}\,x}}{(1+x)^{\frac{3}{7}}-\cos^{\frac{3}{2}}x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\cos x)}{\sin\sqrt{\cos x}-\sin\sqrt[4]{\cos 2x}}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-\cos x+(1+x)^{\frac{5}{4}}-1}{x}$;

13) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+4x+5}\right)$;

14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x^3-x}-\sqrt{x^2+25}\right)$;

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}\right)$;

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+2x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-3x}\right)$;

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[5]{x^5+5x^4}\right)$;

18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+2x^4}-\sqrt[4]{x^4-x^3+x^2}\right)$;

19) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-|x|\right)$;

20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}\right)$.

113. Знайдіть границі:

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a}{x-a}$;

2) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\ln x-\ln b}{x-b}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\operatorname{ch}x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th}x}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{b^x-x^b}{x-b}$;

6) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{x^x-b^b}{x-b}$;

7) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{b^{b^x}-b^{x^b}}{x^b-b^x}$;

8) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{b^{b^x}-x^{b^b}}{x-b}$;

9) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{b^{x^b}-b^{b^x}}{x-b}$;

10) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{x^{x^b}-b^{x^x}}{x-b}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-1-\frac{3}{2}x}{\cos x-\operatorname{ch}x}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin 2x}-\mathrm{e}^{\sin x}}{\operatorname{th}x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot \operatorname{sh} x-\cos x\cdot \operatorname{ch} x+e^{x^2}}{(4+x^2+x\cdot\sqrt[3]{x}-x^3)^{\frac{5}{2}}-32\cos x}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\cos x}-\mathrm{e}^{1+\ln(1+x)}}{\sqrt{9+2x}-3}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(\mathrm{e}+\sin x)-\mathrm{e}^x-\cos x}{x}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x\cos 2x}-(x^2-1)^2}{\mathrm{e}^{\operatorname{tg}(x^2)}-\cos x}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos 3x}\cdot\sqrt[4]{\cos 4x}}{\sqrt{\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} 3x\cdot \operatorname{ch}^2 4x}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[4]{16-x}-\mathrm{e}^x}{\ln(1+\mathrm{e}^x-\cos x)}$; 20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{2-x}$;

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x+2\cos 2x+\sqrt[3]{x-8}}{\mathrm{e}^{\sin x}-\cos x}$; 22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin 3x)}{3^{\operatorname{tg} x}-1}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos 2x)}{\ln^2(1+\sin 3x)}$; 24) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$;

25) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x^c)}{\sin(\pi x^b)}$; 26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{mx}-e^{nx}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c^{x^2}-b^{x^2}}{(c^x-b^x)^2}$; 28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$;

29) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\operatorname{sh} x-\operatorname{sh}\alpha}{x-\alpha}$; 30) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\operatorname{ch} x-\operatorname{ch}\alpha}{x-\alpha}$;

31) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\operatorname{th} x-\operatorname{th}\alpha}{x-\alpha}$; 32) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\operatorname{cth} x-\operatorname{cth}\alpha}{x-\alpha}$.

114. Знайдіть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\mathrm{e}^x-\cos x)-\ln(\mathrm{e}+x^2)}{\cos x\cos^2 2x\cos^3 3x-(1+x^2)^{\pi}(1-x^2)^{\mathrm{e}}}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\ln \operatorname{ch}(x^2)}$; **3)** $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{2\sin\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}-\ln(1+x)}{x+\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

4) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}+x^3-1}{\ln\cos x}$; **5)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch} x}$;

6) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x-x^2}}{1-\operatorname{ch} x}$;

7) $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{\operatorname{sh}(x^2+x)-\operatorname{sh}(x^2-x)}{1-\operatorname{ch} x}$;

8) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{x^3\cdot\sqrt[9]{x}\cdot\cos x+\sin^3 x}{1-\sqrt{1+x^3}}$;

9) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln(x+x^2+x^3)-\ln x}{\cos x\cos^2 2x-\mathrm{e}^{\sin^2 x}}$; **10)** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln\operatorname{ch} ax}{\ln\cos bx}$;

11) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{(1+x+\frac{x^2}{2})^{\frac{3}{2}}-1-\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}x^2}{x^2}$;

12) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1+x)^n+(1+x)^{-n}-2}{x^2+x^{\frac{7}{3}}}$;

13) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1+\cos x)^{\frac{5}{2}}-(1-\operatorname{ch} x)^{\frac{5}{2}}}{\operatorname{tg}^3 x-\sin(x^3)}$;

14) $\lim\limits_{x\to2-0} \left(\dfrac{1}{x(x-2)}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$;

15) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\arcsin x+\sin\frac{1}{2}x+e^x-(1+x)^{\frac{5}{2}}}{(1+\sqrt{x})^{\sqrt{x}}-1}$;

16) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1-\sin 3x)}{3^{\operatorname{tg} x}-1}$; **17)** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x-\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x-\cos x}{(1+x)^x-\cos x}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{th}x-\sin(\operatorname{sh}(e^{x}-\cos x))}{(1+x)^{x}-\cos x}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\operatorname{ch}x})}{e^{x}-\ln(1+x)+(1+\frac{x^2}{4})^{\frac{5}{3}}}$;

20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\cos x-\sin x}{(1+x)^{\sqrt{x}}-(1+\sqrt{x}\,)^{x}}$.

115. Знайдіть границі:

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}}$, де:

а) $a=0$; **б)** $a=1$; **в)** $a=+\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{x}$, де:

а) $a=0$; **б)** $a=\frac{\pi}{2}$; **в)** $a=+\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^3-x+1}\right)^{\frac{3x+1}{x+1}}$, де:

а) $a=0$; **б)** $a=1$; **в)** $a=+\infty$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[4]{x^2+1}-1}\right)^{\left(\frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)^{\frac{x+1}{x^4+1}}}$, де:

а) $a=+0$; **б)** $a=1$; **в)** $a=+\infty$;

5) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^4+2}{x^2}\right)^{\left(\frac{x^4+2}{(x-1)^2}\right)^{\frac{x^4+2}{(x-2)^2}}}$, де:

а) $a=0$; **б)** $a=1$; **в)** $a=2$;

6) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{|x|}{x^2+1}\right)^{\left(\frac{|x-1|}{x^2+1}\right)^{\frac{|x-2|}{x^2+1}}}$, де:

а) $a=0$; **б)** $a=1$; **в)** $a=2$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; **8)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x})^x$;

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$; **10)** $\lim\limits_{x\to+0}(1+\sqrt{x}+x)^{\frac{1}{\cos x-1}}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}(2\operatorname{ch} x-\operatorname{sh}^2 x-1)^{\frac{1}{x}}$; **12)** $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ch} x+\operatorname{sh}^2 x)^{\operatorname{ctg}^3 x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$; **14)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$;

15) $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})^x$; **16)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}^2 x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{b^x+c^x+d^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$; **18)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{b^{x+1}+c^{x+1}+d^{x+1}}{b+c+d}\right)^{\frac{1}{x}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x+2x^2}{2+x-2x^2}\right)^{\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}}$; **20)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)\cos x}$;

21) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$; **22)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg} x}$; **24)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos 2x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

25) $\lim\limits_{x\to+0}x^x$; **26)** $\lim\limits_{x\to+0}x^{x^{x-1}}$;

27) $\lim\limits_{x\to+0}x^{x^x-1}$; **28)** $\lim\limits_{x\to+0}x^{x^x}-1$;

29) $\lim\limits_{x\to+0}(1+\sin x)^{(\sin x)^{\operatorname{tg} x}}$; **30)** $\lim\limits_{x\to+0}(\cos x)^{x^{\sin x}}$;

31) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x^3}\right)^{x\sin x}$; **32)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\mathrm{e}^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

116. Знайдіть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi-4\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$; **4)** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$; **6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin\frac{3}{5}-\arcsin\left(\frac{3}{5}+x\right)}$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{4}-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+x\right)}{x}$; **8)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2+x}-9^{1+x}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^{x^2}+\mathrm{e}^x+1\right)^{\frac{1}{1+x}}$; **10)** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{\ln x}}$;

11) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg} x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$; **12)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin^x\left(\dfrac{2\pi x}{3x+1}\right)$;

13) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\operatorname{ch} x-\cos x}{\operatorname{sh} x+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$, де:

а) $a=+0$; **б)** $a=+\infty$;

14) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\operatorname{ch} x-\cos x}{\operatorname{sh} x+\sin x}\right)^{x}$, де:

а) $a=+0$; **б)** $a=+\infty$;

15) $\lim\limits_{x\to-0}\left(\dfrac{1}{\arccos x-\frac{\pi}{2}}\right)^{x}$; **16)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\mathit{arctg}\,7x)^{\frac{1}{x^2-2x}}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\operatorname{arctg}^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}}$;

18) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{\cos 2x}\cdot\cos x)^{\frac{\operatorname{tg} x}{\sin(x^2)(1-\mathrm{e}^x)}}$.

117. Знайдіть границі:

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-\cos x}{1-\operatorname{ch} x}$; **3)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-\operatorname{sh} x}{x+\operatorname{sh} x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{\mathrm{e}^{\cos x}-1}$; **5)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+\sin x)-\sin x}{\ln(1+\cos x)-\cos x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x-x}{\sin\cos x-x}$; **7)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x}{x}$:

а) $a=1$; **б)** $a=+\infty$;

8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$:

а) $a=+\infty$; **б)** $a=-\infty$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sin x}$; **10)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{\ln(1-x)-x}$; **12)** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{e^x-1-x}{1-\cos\sqrt{x}}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\mathrm{e}^{\cos x}-1-x}$; **14)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x+\operatorname{sh} x}{\cos x-\operatorname{ch} x}$;

15) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2^x}{4-3^{-\frac{1}{x}}}$:

а) $a=+0$; **б)** $a=-0$;

16) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sqrt{|\cos\frac{1}{x}|}$; **17)** $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot[\frac{1}{x}]$;

18) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\{\frac{1}{x}\}$; **19)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\{\frac{1}{x}\}$;

20) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, де $f(x)=\begin{cases} x, & x\in \mathrm{Q}, \\ 0, & x\in \mathrm{R}\setminus \mathrm{Q}, \end{cases}$ та:

а) $a=0$; **б)** $a=1$; **в)** $a=\pi$;

21) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, де $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in \mathrm{Q}, \\ 1, & x\in \mathrm{R}\setminus \mathrm{Q}, \end{cases}$ та:

а) $a=-1$; **б)** $a=0$; **в)** $a=\pi$;

22) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, де $f(x)=\begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, & x>0, \\ \cos x, & x\le 0, \end{cases}$ та:

а) $a=-\frac{\pi}{2}$; **б)** $a=0$; **в)** $a=\pi$;

23) $\lim\limits_{x\to a}(x+1)\operatorname{sgn}(x^2-1)$ та:

а) $a=-1$; **б)** rde; **в)** $a=1$;

24) $\lim\limits_{x\to a}(x+1)\operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} x)$ та:

а) $a=-1$; **б)** $a=0$;

25) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, де

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n} - \text{нескоротний дріб, } m\in \mathrm{Z}\setminus\{0\},\ n\in \mathrm{N}, \\ 0, & x\in(\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q})\bigcup\{0\}, \end{cases}$$ та:

а) $a=1$; **б)** $a=0$; **в)** $a=\pi$;

26) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$ та:

а) $a=0$; **б)** $a=1$; **в)** $a=+\infty$;

27) $\lim\limits_{x\to a}\frac{[x]}{x}$ та:

а) $a=0$; **б)** $a=\frac{5}{2}$; **в)** $a=3$;

г) $a=\pi$; **д)** $a=+\infty$;

28) $\lim\limits_{x\to a}\{x\}([x]+1)$ та:

а) $a=-1$; **б)** $a=0$; **в)** $a=1$;

г) $a=\pi$; **д)** $a=+\infty$;

29) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\{x\}}{[x]}$ та:

а) $a=-1$; **б)** $a=0$; **в)** $a=+\infty$;

30) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} x)$ та:

а) $a=-\frac{\pi}{4}$; **б)** $a=0$; **в)** $a=\frac{\pi}{2}$;

г) $a=\pi$; **д)** $a=+\infty$.

118. Для функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ знайдіть множину часткових границь $E_f(x_0)$, якщо:

1) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=+\infty$;

2) $f(x)=\cos\frac{1}{x}$:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=\frac{2}{\pi}$;

3) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathrm{Q},\\ 0, & x\in\mathrm{R}\backslash\mathrm{Q}:\end{cases}$

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=\pi$;

4) $f(x)=\begin{cases}n, & x=\frac{m}{n}-\text{нескоротний дріб},\ m\in\mathrm{Z}\backslash\{0\},\ n\in\mathrm{N},\\ 0, & x\in(\mathrm{R}\backslash\mathrm{Q})\bigcup\{0\}:\end{cases}$

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=\pi$;

в) $x_0=4$; **г)** $x_0=+\infty$;

5) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n}-\text{нескоротний дріб},\ m\in\mathrm{Z}\backslash\{0\},\ n\in\mathrm{N},\\ 0, & x\in(\mathrm{R}\backslash\mathrm{Q})\bigcup\{0\}:\end{cases}$

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=\pi$;

в) $x_0=4$; **г)** $x_0=+\infty$;

6) $f(x)=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=\frac{2}{\pi}$;

7) $f(x)=\mathrm{e}^{\cos\frac{1}{x^2}}$:

а) $x_0=0$; б) $x_0=+\infty$;

8) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$:

а) $x_0=0$; б) $x_0=+\infty$;

9) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}$:

а) $x_0=0$; б) $x_0=-1$;

10) $f(x)=\left\{\frac{1}{x}\right\}$:

а) $x_0=0$; б) $x_0=-1$;

в) $x_0=\frac{1}{\pi}$; г) $x_0=+\infty$;

11) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$:

а) $x_0=0$; б) $x_0=+\infty$;

12) $f(x)=\frac{\cos x}{x}$:

а) $x_0=0$; б) $x_0=+\infty$:

13) $f(x)=(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$:

а) $x_0=0$; б) $x_0=\frac{\pi}{2}$;

14) $f(x)=[x]$:

а) $x_0=0$; б) $x_0=1{,}001$;

в) $x_0=\pi$; г) $x_0=+\infty$;

15) $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$:

а) $x_0=0$; б) $x_0=\pi$;

16) $f(x)=[x]\cdot\{x\}$:

а) $x_0=0$; б) $x_0=1$;

в) $x_0=-1$; г) $x_0=+\infty$;

17) $f(x)=[2x]-[x]$:

а) $x_0=0$; б) $x_0=1$;

в) $x_0=\frac{3}{2}$; г) $x_0=+\infty$.

119. Для функції $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ знайдіть односторонні границі $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, якщо:

1) $f(x) = [x]$ та:

а) $x_0 = 1$; **б)** $x_0 = 1{,}001$; **в)** $x_0 = \pi$;

2) $f(x) = \{x\}$ та:

а) $x_0 = 0$; **б)** $x_0 = \frac{1}{2}$; **в)** $x_0 = \sqrt{2}$;

3) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ та:

а) $x_0 = 0$; **б)** $x_0 = -1$; **в)** $x_0 = \sqrt{2}$;

4) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ та:

а) $x_0 = 0$; **б)** $x_0 = 1$;

5) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$ та:

а) $x_0 = 0$; **б)** $x_0 = 1$; **в)** $x_0 = 2$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$ та:

а) $x_0 = 0$; **б)** $x_0 = 1$;

7) $f(x) = x \cdot [\frac{1}{x}]$ та:

а) $x_0 = 0$; **б)** $x_0 = 1$; **в)** $x_0 = -1$;

8) $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{\sin x} - 1}$ та:

а) $x_0 = 0$; **б)** $x_0 = \pi$;

9) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + 3^{-\frac{1}{x}}$ та:

а) $x_0 = 0$; **б)** $x_0 = 1$;

10) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\{x\}} - 1}$ та:

а) $x_0 = 0$; **б)** $x_0 = \frac{1}{2}$;

11) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{1-x^2}}}$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=1$; **в)** $x_0=-1$;

12) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)$ та:

а) $x_0=\frac{3}{2}$; **б)** $x_0=1$; **в)** $x_0=-1$;

13) $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=1$;

14) $f(x)=\dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=1$; **в)** $x_0=-1$;

15) $f(x)=\frac{x^2}{|x|-1}$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=1$; **в)** $x_0=-1$;

16) $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=\frac{1}{3}$; **в)** $x_0=1$;

17) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in R\backslash Q\end{cases}$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=\sqrt{2}$;

18) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in Q,\\ 0, & x\in R\backslash Q\end{cases}$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=\sqrt{2}$;

19) $f(x)=\operatorname{th}\frac{1}{x}$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=1$;

20) $f(x)=\frac{2(1-x^2)+|1-x^2|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=1$;

21) $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=\frac{\pi}{2}$;

22) $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=\frac{\pi}{2}$;

23) $f(x)=\dfrac{1}{x-3^{\frac{x-1}{1+x}}}$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=1$; **в)** $x_0=-1$;

24) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=1$; **в)** $x_0=2$;

25) $f(x)=\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^x$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=1$;

26) $f(x)=\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ та:

а) $x_0=0$; **б)** $x_0=\frac{\pi}{4}$.

120. Для всіх функцій $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ із задачі 118 знайдіть границі $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ та $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, якщо $-\infty$ та $+\infty$ відповідно є граничними точками D_f.

121. Перевірте, які з наведених функцій $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ мають такі властивості:

1) є обмеженою зверху, обмеженою знизу, обмеженою на D_f;

2) є нескінченно великою при $x\to+\infty$, при $x\to-\infty$;

3) існує точка $x_0\in(D_f)'$, у якій функція є нескінченно великою;

4) існує точка $x_0\in(D_f)'$, у якій функція є необмеженою, але не є нескінченно великою,

якщо:

а) $f(x)=\begin{cases} m+n, & x=\frac{m}{n}-\text{нескоротний дріб, } m\in\mathrm{Z}\backslash\{0\},\ n\in\mathrm{N},\\ 1, & x\in(\mathrm{R}\backslash\mathrm{Q})\bigcup\{0\};\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n}-\text{нескоротний дріб, } m\in \mathrm{Z}\backslash\{0\},\ n\in \mathrm{N},\\ 0, & x\in(\mathrm{R}\backslash\mathrm{Q})\bigcup\{0\};\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}n, & x=\frac{m}{n}-\text{нескоротний дріб, } m\in \mathrm{Z}\backslash\{0\},\ n\in \mathrm{N},\\ 0, & x\in(\mathrm{R}\backslash\mathrm{Q})\bigcup\{0\};\end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ **д)** $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\ln(x^2)}, & x\notin\{0;\ \pm 1\},\\ 1, & x\in\{0;\ \pm 1\};\end{cases}$

е) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$; **є)** $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$;

ж) $f(x)=x\ln|x|$; **з)** $f(x)=2^x\arcsin\sin x$;

и) $f(x)=x\sin x$; **і)** $f(x)=x^2(2-\cos x)$;

ї) $f(x)=\ln\sin x$; **й)** $f(x)=2^{x\cos x}$;

к) $f(x)=x\,\mathrm{arctg}\,x$; **л)** $f(x)=x\{x\}$;

м) $f(x)=\frac{x}{\mathrm{arcctg}\,x}$; **н)** $f(x)=\frac{x}{\sin x}$.

122. Для функції $f: X\to \mathrm{R}$ знайдіть $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ та $\inf\limits_{x\in X} f(x)$, якщо:

1) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ та:

а) $X=(1;\ +\infty)$; **б)** $X=\mathrm{R}$;

2) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ та:

а) $X=(2;\ +\infty)$; **б)** $X=(\frac{1}{2};\ +\infty)$; **в)** $X=(-\infty;\ 0)$;

3) $f(x)=\sin x$ та:

а) $X=\mathrm{R}$; **б)** $X=(0;\ \pi)$;

4) $f(x)=[x]$ та:

а) $X=(0;\ 10)$; **б)** $X=[-1;\ 1]$; **в)** $X=[4;\ 5)$;

4) $f(x)=\{x\}$ та:

а) $X=\mathrm{R}$; **б)** $X=[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}]$; **в)** $X=(0;\ 1)$;

5) $f(x)=\begin{cases} x, & x\in \mathrm{Q}, \\ 0, & x\in \mathrm{R}\backslash \mathrm{Q} \end{cases}$ та:

а) $X=\mathrm{R}$; **б)** $X=[1;\,10]$; **в)** $X=(-2;\,-1)$;

г) $X=\mathrm{R}\setminus \mathrm{Q}$; **д)** $X=[1;\,10]\bigcap \mathrm{Q}$;

6) $f(x)=\frac{[x]}{\{x\}}$ та:

а) $X=(0;\,1)$; **б)** $X=(-1;\,0)$; **в)** $X=(1;\,2)$.

123. Будемо казати, що функції $X\xrightarrow{f,\,g}\mathrm{R}$ порівнянні в точці $x_0=0$, якщо справджується принаймні одна з умов: $f=O(g)$, $g=O(f)$, f,g – одного порядку, $f=o(g)$, $g=o(f)$, $f\sim g$, $f\sim ag$ для деякого $a\neq 0$, якщо:

1) $f(x)=\sin\frac{1}{x}+2$, $g(x)=\cos\frac{1}{x}+5$ та $X=\mathrm{R}\setminus\{0\}$;

2) $f(x)=\cos x$, $g(x)=\frac{1}{x^2}(\mathrm{ch}\,x-1)$ та $X=\mathrm{R}\setminus\{0\}$;

3) $f(x)=\mathrm{tg}\,x$, $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ та $X=(-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2})\setminus\{0\}$;

4) $f(x)=\frac{1}{x}(\cos x-1)$, $g(x)=\mathrm{th}\,x$ та $X=\mathrm{R}\setminus\{0\}$;

5) $f(x)=1-\cos x$, $g(x)=\mathrm{ch}\,x-1$ та $X=\mathrm{R}$;

6) $f(x)=[x]$, $g(x)=\{x\}$ та:

а) $X=\mathrm{R}$; **б)** $X=\mathrm{R}^+$; **в)** $X=\mathrm{R}^-$;

7) $f(x)=[x]$, $g(x)=\sin x$ та:

а) $X=\mathrm{R}$; **б)** $X=\mathrm{R}^+$; **в)** $X=\mathrm{R}^-$;

8) $f(x)=\{x\}$, $g(x)=\mathrm{e}^x-1$ та:

а) $X=\mathrm{R}$; **б)** $X=\mathrm{R}^+$; **в)** $X=\mathrm{R}^-$;

9) $f(x)=[x]$, $g(x)=\cos x$ та:

а) $X=\mathrm{R}$; **б)** $X=\mathrm{R}^+$; **в)** $X=\mathrm{R}^-$;

10) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$ та $X=\mathrm{R}\setminus\{0\}$;

11) $f(x)=\ln|x|$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$ та $X=\mathrm{R}\setminus\{0\}$;

12) $f(x)=\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=\mathrm{tg}\,x$ та $X=(-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2})\setminus\{0\}$;

13) $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $g(x)=1+\frac{1}{x}$ та:

а) $X=\mathrm{R}\setminus\{0\}$; **б)** $X=\mathrm{R}^{+}\setminus\{0\}$; **в)** $X=\mathrm{R}^{-}\setminus\{0\}$;

14) $f(x)=[\frac{1}{x}]$, $g(x)=\frac{1}{x}$ та:

а) $X=\mathrm{R}\setminus\{0\}$; **б)** $X=\mathrm{R}^{+}\setminus\{0\}$; **в)** $X=\mathrm{R}^{-}\setminus\{0\}$;

15) $f(x)=1-\cos x$, $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$ та $X=\mathrm{R}$;

16) $f(x)=x^{-n}$, $n\in\mathrm{N}$, $g(x)=2^{\frac{1}{x}}$ та:

а) $X=\mathrm{R}\setminus\{0\}$; **б)** $X=\mathrm{R}^{+}\setminus\{0\}$; **в)** $X=\mathrm{R}^{-}\setminus\{0\}$;

17) $f(x)=\frac{1}{x}(e^{x}-1)$, $g(x)=\frac{\sin x}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}$ та $X=\mathrm{R}\setminus\{0\}$;

18) $f(x)=100x+x\sin x$, $g(x)=x$ та $X=\mathrm{R}$;

19) $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$, $g(x)=x\sin\frac{1}{x}$ та $X=\mathrm{R}\setminus\{0\}$;

20) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $g(x)=\frac{\cos x}{x}$ та $X=\mathrm{R}\setminus\{0\}$;

21) $f(x)=x^{x}$, $g(x)=\cos x$ та $X=\mathrm{R}^{+}\setminus\{0\}$;

22) $f(x)=x^{x^{x}}$, $g(x)=\sin x$ та $X=\mathrm{R}^{+}\setminus\{0\}$;

23) $f(x)=x(2+\sin\frac{1}{x})$, $g(x)=2x$ та $X=\mathrm{R}\setminus\{0\}$;

24) $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}$, $g(x)=|x|^{\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ та $X=\mathrm{R}\setminus\{0\}$.

124. Для заданої функції $\overset{\circ}{O}_{\varepsilon}(x_0)\xrightarrow{f}\mathrm{R}$, $\varepsilon\in(0;1)$ знайдіть таку функцію $g=cx^{n}$, де константа $c\neq 0$, для якої в точці $x_0=0$ справджується умова $f\sim cx^{n}$, якщо:

1) $f(x)=\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(\mathrm{e}^{x}-1)^2}$; **2)** $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}-1$;

3) $f(x)=\sqrt{1+x}-1$; **4)** $f(x)=x\sin\sqrt{x}$;

5) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; **6)** $f(x)=\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$, $x>0$;

7) $f(x)=\frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}$; **8)** $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;

9) $f(x)=\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$; 10) $f(x)=x+\sqrt[3]{\sin x}$;

11) $f(x)=\mathrm{tg}\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}$; 12) $f(x)=\cos(\sin x)-\mathrm{e}^{x^2}$;

13) $f(x)=\frac{1+\sin x}{\cos x}-\mathrm{e}^{x^4}$; 14) $f(x)=\mathrm{arctg}(\cos x-\mathrm{e}^{x})$;

15) $f(x)=\ln(\cos\sqrt{x})$; 16) $f(x)=\cos(\cos x)-1$;

17) $f(x)=\sin(\mathrm{e}^{x})-\mathrm{e}^{x}$; 18) $f(x)=\sin x\cdot\ln x$, $x>0$;

19) $f(x)=x\,\mathrm{tg}\,x$; 20) $f(x)=\sin(\sin x)+\cos x-1$;

21) $f(x)=\sqrt{x+9}-\sqrt[3]{x+27}$; 22) $f(x)=(\cos x)^{\sin x}-1$;

23) $f(x)=(1+\sqrt{x})^2-\cos x$; 24) $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x}$;

25) $f(x)=\ln(\cos(\mathrm{ch}\,x))$; 26) $f(x)=\ln(1+x-x^3)-\sin x$;

27) $f(x)=(1+\sqrt{x})^{\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{x}$; 28) $f(x)=\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}^{\cos x}$;

29) $f(x)=x-\frac{1}{x}$; 30) $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}+x}-\cos\sqrt{x}$;

31) $f(x)=\sqrt{\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}$; 32) $f(x)=(1+x)^{1+x}-1$.

125. Знайдіть усі можливі значення параметрів $a, b\in\mathrm{R}$, для яких справджується рівність $f=o(1)$, якщо:

1) $f(x)=x^a\sin(x^b)$, $x\to+0$;

2) $f(x)=x^a\,\mathrm{arctg}(x^b)$, $x\to+0$;

3) $f(x)=x^a\ln(1+x^b)$, $x\to+0$;

4) $f(x)=(1+x^a)^b-1$, $x\to+0$;

5) $f(x)=\sin x^a\cos(x^b)$, $x\to+0$;

6) $f(x)=x^{x^a}-b$, $x\to+0$;

7) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}+ax+b$ та:

а) $x\to+\infty$; б) $x\to 0$;

8) $f(x)=(4-x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+ax+b$ та:

а) $x\to 0$; **б)** $x\to +0$;

9) $f(x)=\frac{x^2}{1+x}-ax-b$, $x\to +\infty$;

10) $f(x)=\operatorname{ctg} x+\frac{a}{x}+b$, $x\to 0$;

11) $f(x)=\frac{x\mathrm{e}^x}{1+x}-ax-b$ та:

а) $x\to +\infty$; **б)** $x\to -\infty$;

12) $f(x)=\frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x}-ax-b$ та:

а) $x\to +\infty$; **б)** $x\to -\infty$;

13) $f(x)=\ln(1+\mathrm{e}^{3x})-ax-b$ та:

а) $x\to +\infty$; **б)** $x\to 0$; **в)** $x\to -\infty$;

14) $f(x)=2e^{x^4}+(\cos x-1)^2+x^5-2-ax^b$, $x\to 0$;

15) $f(x)=\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+x+2}-ax^2-bx$, $x\to +\infty$;

16) $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x^2-x}-ax-b$, $x\to +\infty$;

17) $f(x)=x^{(\sin x)^{\cos x}}-\frac{a}{x}-b$, $x\to +0$;

18) $f(x)=\frac{\sin\cos x-\cos\sin x}{x^2}-\frac{a}{x^2}-b$, $x\to +0$;

19) $f(x)=\frac{1}{x}(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\arcsin x-b)-a$:

а) $x\to 0$; **б)** $x\to +0$.

Розділ 9
НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Короткі теоретичні відомості

Функцію $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ називають неперервною в точці $x_0\in D_f$, якщо $\forall (x_n)\subset D_f$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ справджується умова $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$ (неперервність за Гейне).

Функцію $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ називають неперервною в точці $x_0\in D_f$, якщо $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0$: $\forall x\in O_\delta(x_0)\bigcap D_f \ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (неперервність за Коші).

Як і у випадку визначення границі функції в точці, неперервність за Коші та Гейне еквівалентні.

Згідно з цими означеннями в ізольованій точці області визначення будь-яка функція неперервна. Якщо ж точка $x_0\in D_f$ є граничною точкою області визначення функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, то ця функція неперервна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Функцію називають неперервною на множині $X\subset D_f$, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини. Позначатимемо це таким чином: $x_0\in D_f$. Якщо функція f неперервна в точці x_0, то цей факт будемо позначати так: $f\in C(x_0)$. Якщо функція неперервна в кожній точці області визначення, то її називають просто неперервною. Якщо функція не є неперервною в точці $x_0\in D_f$, то її називають розривною в цій точці й позначають $f\notin C(x_0)$.

Теорема 1 (*арифметичні дії з неперервними функціями*).

Нехай функції f та g неперервні в точці $x_0 \in D_f = D_g$. Тоді неперервними в точці x_0 будуть також функції $f+g$, $f-g$ та fg. Якщо при цьому $g(x_0) \neq 0$, то неперервною буде також функція $\frac{f}{g}$.

Теорема 2 (*неперервність композиції*).

Нехай функція f неперервна в точці x_0, а функція g неперервна в точці t_0. Якщо $g(t_0) = x_0$, то композиція $f \circ g$ неперервна в точці t_0.

Функція $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, для якої точка $x_0 \in D_f$ є граничною точкою множини $D_f \bigcap (x_0, +\infty)$ $(D_f \bigcap (-\infty, x_0))$, називається неперервною справа (зліва) у точці x_0, якщо справджується рівність $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ $(f(x_0 - 0) = f(x_0))$.

Теорема 3 (*критерій неперервності функції в точці*).

Для функції $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ точка $x_0 \in D_f$ є граничною точкою множин $D_f \bigcap (x_0, +\infty)$ та $D_f \bigcap (-\infty, x_0)$. Тоді f неперервна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли має місце рівність

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0).$$

Нехай для функції $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ точка x_0 є граничною точкою множин $D_f \bigcap (x_0, +\infty)$ та $D_f \bigcap (-\infty, x_0)$, причому не принципово, чи визначена сама функція в цій точці. Тоді, якщо f не є неперервною в цій точці, то визначається така класифікація точок розриву зазначеної функції:

- Якщо існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \mathrm{R}$, яка не збігається зі значенням функції в точці x_0, то точку x_0 називають точкою усувного розриву. Прикладом функції з усувним розривом у точці $x_0 = 0$ є функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

• Якщо існують скінченні границі $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то точку x_0 називають точкою розриву першого роду, або стрибком. Значення $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$ називається стрибком функції f у точці x_0. Прикладом функції з розривом першого роду у точці $x_0=0$ є функція $f(x)=[x]$.

• Якщо існують границі $f(x_0-0), f(x_0+0)$, причому принаймні одна з них нескінченна, то точку x_0 називають точкою розриву другого роду, або полюсом. Прикладом функції з розривом другого роду в точці $x_0=0$ є функція $f(x)=\frac{1}{x}$.

• У всіх інших випадках точку x_0 називають точкою розриву другого роду, або суттєвою точкою розриву. Прикладом функції з розривом другого роду в точці $x_0=0$ є функція $f(x)=\frac{1}{x}$.

Зауважимо, що поняття точки розриву функції та точки, у якій функція розривна, загалом різні.

Теорема 4 *(типи та кількість розривів монотонної функції).*

Монотонна функція $(a,b)\xrightarrow{f}R$ неперервна скрізь, за винятком не більш ніж зліченної множини точок, у яких можуть бути лише розриви першого роду.

Функція $[a,b]\xrightarrow{f}\mathrm{R}$ називається кусково-неперервною, якщо вона неперервна в усіх внутрішніх точках сегмента $[a,b]$ за виключенням, можливо, скінченної кількості точок, у кожній з яких вона має скінченні односторонні границі. Крім того, мають існувати скінченні значення $f(a+0)$ та $f(b-0)$.

Теорема 5 (*про стійкість нерівності для неперервної функції*).

Нехай функція $f\in C(x_0)$, де x_0 є граничною точкою множини D_f та для деякого $c\in\mathrm{R}$ справджується нерівність $f(x_0)>c$ $(f(x_0)<c)$. Тоді існує $\varepsilon>0$, для якого $\forall x\in O_\varepsilon(x_0)\bigcap D_f$ має місце нерівність: $f(x)>c$ $(f(x)<c)$.

Множина $K \subset \mathrm{R}$ називається компактною в собі, або компактом, якщо з будь-якої послідовності точок $(x_n) \subset K$ можна виділити підпослідовність (x_{n_k}), яка збігається до деякого значення $x_0 \in K$.

Теорема 6 (*критерій компакта*).

Множина $K \subset \mathrm{R}$ є компактом тоді й тільки тоді, коли множина K замкнена та обмежена.

Теорема 7 (*екстремальні властивості компакта*).

Якщо множина $K \subset \mathrm{R}$ є компактом, то вона має найбільший і найменший елементи.

Теорема 8 (*неперервний образ компакта*).

Якщо у функції $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ множина D_f є компактом, то множина E_f також є компактом.

Теорема 9 (*Вейєрштрасса*).

Якщо функція $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ неперервна на компакті $K \subset D_f$, то вона обмежена на цій множині й досягає свого найбільшого та найменшого значень.

Теорема 10 (*неперервність оберненої функції*).

Якщо функція $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ неперервна на компакті $K \subset D_f$ та оборотна, то обернена функція f^{-1} неперервна на E_f.

Визначимо для функції $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ і множини $X \subset D_f$ значення $M = \sup\limits_{x \in X} f(x)$ та $m = \inf\limits_{x \in X} f(x)$. Коливанням функції f на множині X називається різниця $\omega(f, X) = M - m$. Якщо $\omega(f, X) = +\infty$, то кажуть, що f має нескінченне коливання на X. Нехай $x_0 \in D_f \cap D'_f$. Для додатного $\delta > 0$ позначимо множину $X_\delta = D_f \cap O_\delta(x_0)$, тоді коливанням функції f у точці x_0 називається границя $\omega(f, x_0) = \lim\limits_{\delta \to 0} \omega(f, X_\delta)$.

Теорема 11 *(критерій Бера неперервності функції в точці).*

Функція $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ неперервна в точці $x_0 \in D_f$, граничній для D_f, тоді й тільки тоді, коли $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ на множині $X_\delta = D_f \bigcap O_\delta(x_0)$ $\omega(f, X_\delta) < \varepsilon$ або $\omega(f, x_0) = 0$.

Нехай $M \subset \mathrm{R}$ – довільна множина. Сукупність множин (B_α), $\alpha \in A$ називається покриттям цієї множини, якщо $M \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha$.

Теорема 12 (*лема Гейне – Бореля*).

Якщо компакт $K \subset \mathrm{R}$ має покриття сукупністю відкритих множин (I_α), $\alpha \in A$, то з цієї сукупності можна виділити скінченну кількість множин, які також утворюють покриття компакта K.

Теорема 13 (*Коші про проміжні значення*).

Якщо функція $f \in C[a, b]$, то вона набуває усіх проміжних значень між числами $f(a)$ та $f(b)$, тобто $\forall C \in [f(a), f(b)]$ $(\forall C \in [f(b), f(a)])$ $\exists c \in [a,b]:\ f(c) = C$.

Задачі

126. Для функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ і точки $x_0 \in D_f \bigcap D'_f$ сформулювати означення за Коші таких понять:

1) неперервності функції f у точці x_0:

а) ліворуч; **б)** праворуч;

2) розривності функції f у точці x_0;

3) розривності функції f у точці x_0:

а) ліворуч; **б)** праворуч.

127. Яка властивість функції $(a, b)\xrightarrow{f}\mathrm{R}$ $(a, b \in \overline{\mathrm{R}})$ у точці $x_0 \in (a, b)$ визначається наведеним означенням? Наведіть приклади, якщо це можливо, функцій $\mathrm{R}\xrightarrow{f}\mathrm{R}$ та $(-1, 1)\xrightarrow{f}\mathrm{R}$, що розривні в точці x_0 та задовольняють це означення:

1) $\forall\varepsilon>0\ \ \forall\delta>0\ \ \forall x\in D_f\ \ |x_0-x|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;

2) $\exists\varepsilon>0\ \ \forall\delta>0\ \ \forall x\in D_f\ \ |x_0-x|<\varepsilon\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\delta$;

3) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f\ \ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \Rightarrow\ |x_0-x|<\delta$;

4) $\forall\delta>0\ \ \exists\varepsilon>0\ \ \forall x\in D_f\ \ |x_0-x|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;

5) $\exists\varepsilon>0\ \ \forall\delta>0\ \ \forall x\in D_f\ \ |x_0-x|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;

6) $\forall\delta>0\ \ \exists\varepsilon>0\ \ \forall x\in D_f\ \ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \Rightarrow\ |x_0-x|<\delta$;

7) $\exists\varepsilon>0\ \ \forall\delta>0\ \ \forall x\in D_f\ \ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \Rightarrow\ |x_0-x|<\delta$;

8) $\exists\delta>0\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \forall x\in D_f\ \ |x_0-x|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;

9) $\exists\delta>0\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \forall x\in D_f\ \ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \Rightarrow\ |x_0-x|<\delta$;

10) $\exists\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \forall x\in D_f\ \ |x_0-x|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;

11) $\exists\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \forall x\in D_f\ \ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \Rightarrow\ |x_0-x|<\delta$.

128. Перевірте, чи справджуються твердження:

1) якщо для функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ у точці $x_0\in D_f\bigcap D_f'$ справджується умова $\forall\varepsilon\in M\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in D_f:\ \ |x_0-x|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, то $f\in C(x_0)$, де:

а) $M=[1;+\infty)$; **б)** $M=\{\frac{1}{i}|\ i=\overline{1,1000}\}$;

в) $M=\{\frac{1}{i}|\ i\in\mathrm{N}\}$; **г)** $M=(0;1)$;

2) якщо функції f,g мають однакову область визначення, $x_0\in D_f\bigcap D_f'$, то функція $h=f+g\notin C(x_0)$, де:

а) $f,g\notin C(x_0)$; **б)** $f\in C(x_0),\ g\notin C(x_0)$;

3) якщо функції f,g мають однакову область визначення, $x_0\in D_f\bigcap D_f'$, то функція $h=f\cdot g\notin C(x_0)$, де:

а) $f,g\notin C(x_0)$; **б)** $f\in C(x_0),\ g\notin C(x_0)$;

4) якщо для функції $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ точка $t_0\in D_g\bigcap D_g'$, а для функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ точка $x_0=g(t_0)\in D_f\bigcap D_f'$, то функція $h=f\circ g\notin C(x_0)$, де:

а) $f \notin C(x_0),\ g \in C(t_0)$; **б)** $f \in C(x_0),\ g \notin C(t_0)$;

в) $f \notin C(x_0),\ g \notin C(t_0)$;

5) якщо $f,\ g \in C(X)$, то функція $h \in C(X)$, де:

а) $h(x) = \max\{f(x),\ g(x)\}$; **б)** $h(x) = \min\{f(x),\ g(x)\}$;

6) якщо $f \in C(X)$, то функція $g \in C(X)$, де:

а) $g(x) = |f(x)|$; **б)** $g(x) = f(|x|)$;

в) $g(x) = [f(x)]$; **г)** $g(x) = f([x])$;

д) $g(x) = \{f(x)\}$; **е)** $g(x) = f(\{x\})$;

є) $g(x) = f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \ge 0, \\ 0, & f(x) < 0; \end{cases}$

ж) $g(x) = f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0, \\ 0, & f(x) \ge 0; \end{cases}$

з) $g(x) = \sup\limits_{t<x} f(t)$; **и)** $g(x) = \inf\limits_{t<x} f(t)$;

і) $g(x) = \begin{cases} C, & f(x) > C, \\ f(x), & |f(x)| < C, \\ -C, & f(x) < -C. \end{cases}$

129. За означенням Коші доведіть неперервність функції $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ на D_f, де:

1) $f(x) = x$; **2)** $f(x) = x^2$; **3)** $f(x) = x^3$;

4) $f(x) = \sqrt{x}$; **5)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$; **6)** $f(x) = \frac{1}{x}$;

7) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; **8)** $f(x) = \sin x$; **9)** $f(x) = \cos x$;

10) $f(x) = \operatorname{tg} x$; **11)** $f(x) = \operatorname{ctg} x$; **12)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

13) $f(x) = \arcsin x$; **14)** $f(x) = x^2 - 3x - 1$;

15) $f(x) = \mathrm{e}^x$; **16)** $f(x) = 2^x$;

17) $f(x) = \ln x$; **18)** $f(x) = \lg x$.

130. Для функцій $f, g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ дослідити на неперервність на області визначення композиції функцій $f \circ g$ та $g \circ f$, якщо:

1) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ та:

а) $g(x) = 1 + x^2$; **б)** $g(x) = x(1 - x^2)$;

в) $g(x) = 1 + x - [x]$; **г)** $g(x) = x - \sin x$;

2) $f(x) = \begin{cases} x, \, x \in \mathrm{Q}, \\ -x, \, x \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}, \end{cases}$ та:

а) $g(x) = 1 + x$; **б)** $g(x) = \operatorname{sgn}^2 x$;

в) $g(x) = \begin{cases} -x, \, x \in \mathrm{Q}, \\ x, \, x \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}, \end{cases}$ **г)** $g(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, \, x \in \mathrm{Q}, \\ 0, \, x \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}, \end{cases}$

3) $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1)$ та $g(x) = \operatorname{sgn}(x + 1)$.

131. Для функції $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ і точок, що є одночасно граничними для множин $D_f \bigcap (x_0, +\infty)$ та $D_f \bigcap (-\infty, x_0)$, знайдіть точки розриву та вкажіть їхній тип, якщо:

1) $f(x) = \begin{cases} x, \quad x \le 0, \\ 1 - x, \, 0 < x \le 1, \\ \frac{1}{1-x}, \quad x > 1; \end{cases}$ **2)** $f(x) = \begin{cases} x^2, \quad x < 0, \\ 1, \, x = 0, \\ \operatorname{tg} x, \quad x > 0; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}, \, x \ne 1, \\ 0, \quad x = 1; \end{cases}$ **4)** $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \, |x| \ge 5, \\ \ln(x + 5), \, |x| < 5; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{4}, \quad x \le -\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, \, -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \\ \cos x, \quad x \ge \frac{\pi}{4}; \end{cases}$ **6)** $f(x) = \begin{cases} e^x, \quad x \le -1, \\ 1, \, -1 < x \le 0, \\ \frac{1}{x-1}, \quad x > 0; \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x}, \quad x < 0, \\ 2x + 1, \, 0 \le x < 2, \\ x^2 + 1, \quad x \ge 2; \end{cases}$ **8)** $f(x) = \begin{cases} -2x + 1, \quad x \le -3, \\ -x^3, \, -3 < x \le 0, \\ \operatorname{arctg} x, \quad x > 0; \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \operatorname{ctg} x, & x>0;\end{cases}$ 10) $f(x)=\begin{cases}\log_{0,5}(1-x), & x<1,\\ 1-x, & 1\le x\le 3,\\ x^2-11, & x>3;\end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ 12) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0;\end{cases}$

13) $f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{arctg}|x|}{|\operatorname{arctg} x|}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ 14) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

15) $f(x)=\frac{1}{x-[x]}$; 16) $f(x)=\frac{x-\pi}{\sin x}$;

17) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\ne 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$ 18) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\ne 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

19) $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}\cos\frac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ 20) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

21) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}$; 22) $f(x)=\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}$;

23) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}}-\dfrac{1}{x}$; 24) $f(x)=\dfrac{2}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$;

25) $f(x)=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-\cos\sqrt{|x|}}{\operatorname{tg}(\arcsin x)}$; 26) $f(x)=\dfrac{\operatorname{ch}(x^{\frac{3}{2}})-\cos x}{\operatorname{sh}(\arcsin x)}$;

27) $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$; 28) $f(x)=\operatorname{sgn}\frac{1}{x}$;

29) $f(x)=\arcsin(\sin x)$; 30) $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;

31) $f(x)=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$; 32) $f(x)=\operatorname{sgn} x-\operatorname{sgn}\frac{1}{x}$.

132. Для функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ і точок, що є одночасно граничними для множин $D_f\bigcap(x_0,+\infty)$ та $D_f\bigcap(-\infty,x_0)$, знайдіть точки розриву та вкажіть їхній тип, якщо:

1) $f(x)=x[x]$; 2) $f(x)=x\{x-1\}$;

3) $f(x)=[x+1]\cdot[x]$; 4) $f(x)=[x+1]\cdot[1-x]$;

5) $f(x) = x\cdot[\frac{1}{x}]$; **6)** $f(x) = [x]\cdot\frac{1}{x}$;

7) $f(x) = \frac{[x]}{\{x\}}$; **8)** $f(x) = \frac{[2x]}{\{3x\}}$;

9) $f(x) = [x]\cdot\sin\pi x$; **10)** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

11) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2}, \ |x| \le 1, \\ |x-1|, \ \ |x| > 1; \end{cases}$ **12)** $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{2}, \ x \notin Z, \\ x, \ \ x \in Z; \end{cases}$

13) $f(x) = \begin{cases} 1, \ \ x \in \mathrm{Q}, \\ 0, \ x \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}; \end{cases}$ **14)** $f(x) = \begin{cases} -x, \ \ x \in \mathrm{Q}, \\ x, \ x \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}; \end{cases}$

15) $f(x) = \begin{cases} \sin\pi x, \ \ x \in \mathrm{Q}, \\ 0, \ x \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}; \end{cases}$ **16)** $f(x) = \begin{cases} x^3 - x, \ x \in \mathrm{Q}, \\ 0, \ \ x \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}; \end{cases}$

17) $f(x) = \ln\frac{x^2}{|x^2-2x-3|}$; **18)** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{1}{|x-1|}$;

19) $f(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{|1+x|}{|1-x|}$; **20)** $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sin 2x}$;

21) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$; **22)** $f(x) = \dfrac{3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}}$;

23) $f(x) = \dfrac{1}{\ln|x-1|\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}}$; **24)** $f(x) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1})$;

25) $f(x) = \dfrac{1}{\ln|x|}$; **26)** $f(x) = \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}$;

27) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \ x = \frac{m}{n} - \text{нескоротний дріб}, \ m \in \mathrm{Z} \setminus \{0\}, \ n \in \mathrm{N}, \\ 0, \ x = \{0\} \cup (\mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}), \end{cases}$

(функція Рімана).

133. Якими мають бути значення параметрів $a, b \in \mathrm{R}$, щоб функція $f \in C(\mathrm{R})$, де:

1) $f(x) = \begin{cases} ax + 1, \ \ x \ge 0, \\ b - x, \ 0 < x < 1, \\ x, \ \ x \ge 1; \end{cases}$ **2)** $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1, \ \ x > 1, \\ x + b, \ \ x \in [-1; 1], \\ -x^2 + 2x, \ \ x < -1; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x-7, & |x|>1, \\ ax+b, & |x|\le 1; \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0;\,1], \\ x^2+ax+b, & x\in \mathrm{R}\setminus[0;\,1]; \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} ax^2+2x+a, & x>0, \\ bx+1, & -1<x\le 0, \\ -x^2+ax+1, & x\le 1; \end{cases}$ **6)** $f(x)=\begin{cases} \frac{a}{x}, & x>1, \\ bx+a, & x\in[0;\,1], \\ \frac{1}{x-1}+b, & x<0; \end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+a}, & x>1, \\ ax+1, & -1\le x\le 1, \\ \frac{1}{x+b}, & x<-1; \end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases} (a-b)x^2+x+1, & x>1, \\ x, & x\in[0;\,1], \\ x^2+ax+b, & x<0; \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\ge \frac{\pi}{2}, \\ a\sin x+b, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, \\ -2\sin x, & x\le -\frac{\pi}{2}; \end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases} ax^2+b, & x\ge 0, \\ -x, & x\in[-1;\,0), \\ x^2+ax+b, & x<-1; \end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & x\ge 1, \\ ax+b, & 0<x<1, \\ (x-1)^3, & x\le 0; \end{cases}$ **12)** $f(x)=\begin{cases} x+a\sin x, & x\ge 2\pi, \\ b-x, & 0<x<2\pi, \\ ax^2+bx+1, & x<0; \end{cases}$

13) $f(x)=\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}, & x\ne \pm 1, \\ a, & x=-1, \\ b, & x=1; \end{cases}$ **14)** $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-1}+\frac{\sin x}{x}, & x\notin\{0;\,1\}, \\ a, & x=0, \\ b, & x=1; \end{cases}$

15) $f(x)=\begin{cases}|x|^a|\sin x|^b, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

16) $f(x)=\begin{cases}|x|^a\sin(|x|^b), & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

17) $f(x)=\begin{cases}|x|^a\ln(1+|x|^b), & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

18) $f(x)=\begin{cases}x^a(\sin^b x)\cos x, & x\in(0;\frac{\pi}{2}),\\ 0, & x\in\mathrm{R}\setminus(0;\frac{\pi}{2});\end{cases}$

19) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-\cos(|x|^a))^b}{x^4}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

20) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-\operatorname{sh}x)^a}{(\operatorname{arctg}(|x|)^b)^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

21) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{ch}^a x-\cos(|x|^b)}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

22) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{ch}(|x|^a)-\cos(|x|^b)}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

134. Дослідіть на неперервність функцію $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, де:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}\left[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right], & x\neq(2n+1)\pi,\\ \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{5}}, & x=(2n+1)\pi,\end{cases}\quad n\in\mathrm{Z};$

2) $f(x)=\frac{1}{2}\left|x-2\pi\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right|\left(x-2\pi\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right)+\pi^2\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right];$

3) $f(x)=(-1)^{\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]}\left(x-\pi\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]\right)+\frac{\pi}{8}\left(1-(-1)^{\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]}\right);$

4) $f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{3}x^3, & |x|\le 1, \\ x-\frac{1}{2}x|x|+\frac{1}{6}\operatorname{sgn}x, & |x|>1; \end{cases}$

5) $f(x)=\frac{[x]}{\pi}([x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x)$;

6) $f(x)=\frac{1}{2}\left(x-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right)\left|x-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right|+\frac{1}{4}\left[x+\frac{1}{2}\right];$

7) $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\le 1, \\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\operatorname{sgn}x, & |x|>1; \end{cases}$

8) $f(x)=$
$$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{6+3\sin x}+\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}+\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}\left[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right], & x\ne(2n+1)\pi, \\ \frac{2\pi(2n+1)}{\sqrt{3}}-\frac{1}{6}, & x=(2n+1)\pi, \end{cases} \quad n\in Z;$$

9) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-\varepsilon\sin x}{1+\varepsilon\cos x}+\dfrac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-\varepsilon}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}}+ \\ \quad +\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right], & x\ne(2n+1)\pi, \\ \frac{\pi(2n+1)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-\frac{1}{6}, & x=(2n+1)\pi, \end{cases} \quad \varepsilon\in(0;1),\ n\in Z;$$

10) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\dfrac{2x+\pi}{2\pi}\right], & x\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(2n+1), & x=\frac{\pi}{2}+\pi n, \end{cases} \quad n\in Z;$$

11) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}\operatorname{sgn}x, & x\ne 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

12) $$f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}+\pi\left[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right], & x\ne(2n+1)\pi, \\ \frac{\pi}{2}(2n+1), & x=(2n+1)\pi, \end{cases} \quad n\in Z;$$

13) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)+\pi\left[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right], & x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ \frac{\pi}{4}, & x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\end{cases}\quad n\in \mathrm{Z};$

14) $f(x)=(-1)^{\left[\frac{\frac{3}{4}\pi+x}{\pi}\right]}(\sin x+\cos x)+2\sqrt{2}\left[\dfrac{\frac{3}{4}\pi+x}{\pi}\right];$

15) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}+\pi\left[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right], & x\neq\pi+2\pi n,\\ \frac{\pi}{2}+\pi n, & x=\pi+2\pi n,\end{cases}\quad n\in \mathrm{Z};$

16) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}x}{2}, & x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ 0, & x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\end{cases}\quad n\in \mathrm{Z};$

17) $f(x)=\begin{cases}\arcsin(\sin x)\operatorname{arctg}\frac{1}{\sin x}, & x\neq\pi n,\\ 1, & x=\pi n,\end{cases}\quad n\in \mathrm{Z};$

18) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x+2}, & x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ 0, & x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\end{cases}\quad n\in \mathrm{Z};$

19) $f(x)=-\dfrac{[x]}{x^a}+\sum\limits_{k=1}^{[x]}\dfrac{1}{k^a},\ a\in \mathrm{R},\ x\geq 1;$

20) $f(x)=-x\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]+\sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]}\dfrac{1}{k^2},\ x\in(0;1];$

21) $f(x)=[x]\ln x-\ln([x]!),\ x\geq 1.$

135. Дослідіть на неперервність функцію $f:\mathrm{X}\to\mathrm{R}$, якщо:

1) $D(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathrm{Q},\\ 0, & x\in \mathrm{R}\setminus \mathrm{Q},\end{cases}$ $\mathrm{X}=\mathrm{R}$ та:

а) $f(x)=xD(x)$; **б)** $f(x)=\sin xD(x)$;

в) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}D(x)$; **г)** $f(x)=|D(x)-\frac{1}{2}|$;

д) $f(x)=D(x)(D(x)-1)$; **е)** $f(x)=D(x)D(x\sqrt{2})$;

2) $X=\mathrm{N}$ та:

а) $f(x)=\frac{1}{x}$; **б)** $f(x)=\frac{\sin x}{x}$;

3) $X=\mathrm{Q}$ та:

а) $f(x)=\frac{1}{x}$; **б)** $f(x)=\mathrm{ctg}\,x$;

в) $f(x)=\frac{1}{(x-\mathrm{e})}$; **г)** $f(x)=\mathrm{ctg}\,\pi x$;

4) $X=\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}$ та:

а) $f(x)=\frac{1}{x}$; **б)** $f(x)=\mathrm{ctg}\,x$;

в) $f(x)=\begin{cases} 0, \ x=\sqrt{2}q, \ q\in\mathrm{Q}\setminus\{0\}, \\ 1, \text{ в усіх інших точках } \mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}; \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{2}, \ x=\sqrt{2}q, \ q\in\mathrm{Q}\setminus\{0\}, \\ x, \text{ в усіх інших точках } \mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}. \end{cases}$

136. Яким значенням можна визначити функцію $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ у точці $x_0=0$ таким чином, щоб $f\in C(x_0)$, де:

1) $f(x)=|x|^x$, **2)** $f(x)=\mathrm{arctg}\,x\cdot\sin\frac{1}{x}$

3) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$, **4)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x\sin x-\cos x}}{\mathrm{e}^{x^2}-1}$;

5) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x\mathrm{e}^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$, **6)** $f(x)=\dfrac{\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}{\mathrm{arctg}\,(1+x)-\mathrm{arctg}\,(1-x)}$;

7) $f(x)=\left(\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; **8)** $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+\mathrm{e}^x)}{\ln(x^4+\mathrm{e}^{2x})}$;

9) $f(x)=\mathrm{tg}\,(\sin\mathrm{tg}\,x)\cdot\mathrm{ctg}\,(\mathrm{tg}\sin x)$; **10)** $f(x)=x\cdot\mathrm{ctg}\,x$;

11) $f(x)=2^{-[\frac{1}{x}]}$; **12)** $f(x)=2^{-2^{\frac{1}{x}}}$;

13) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{|x|}$; **14)** $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$;

15) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$; **16)** $f(x)=2^{-2^{\frac{1}{x}}}$;

17) $f(x) = |\operatorname{arctg}\frac{1}{x}|$; **18)** $f(x) = |\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}|$?

137. Дослідити на неперервність зліва та справа функцію $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ у кожній точці D_f, де:

1) $f(x) = [x]$; **2)** $f(x) = -\{x\}$;

3) $f(x) = \operatorname{sgn} x$; **4)** $f(x) = [x](1-\{x\})$;

5) $f(x) = [x^2]$; **6)** $f(x) = [x]([x]-1)([x]-2)$;

7) $f(x) = \operatorname{sgn}(|x+1| - |x-1|)$; **8)** $f(x) = (-1)^{[x]}$;

9) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, $x \neq 1$ та:

а) $f(1) = 0$; **б)** $f(1) = 1$; **в)** $f(1) = 2$;

10) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ та:

а) $f(0) = \frac{\pi}{2}$; **б)** $f(0) = -\frac{\pi}{2}$; **в)** $f(0) = 0$;

11) $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$ та:

а) $f(0) = 1$; **б)** $f(0) = 0$; **в)** $f(0) = 2$;

12) $f(x) = \dfrac{2x+1}{4-2^{\frac{x+1}{x}}}$, $x \notin \{0; 1\}$ та:

а) $f(0) = f(1) = 0$; **б)** $f(0) = f(1) = \frac{1}{4}$;

13) $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\pi - \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)}$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$ та:

а) $f(\pi k) = 1$, $k \in \mathrm{Z}$; **б)** $f(\pi k) = \frac{1}{\pi}$, $k \in \mathrm{Z}$;

14) $f(x) = \dfrac{5-(\frac{1}{2})^{\frac{x-1}{x}}}{8+3^{\frac{x+2}{x}}}$, $x \neq 0$ та:

а) $f(0) = 0$; **б)** $f(0) = \frac{5}{8}$;

15) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$ та:

а) $f(\frac{\pi}{2} + \pi k) = \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathrm{Z}$; **б)** $f(\frac{\pi}{2} + \pi k) = 0$, $k \in \mathrm{Z}$;

в) $f(\frac{\pi}{2} + \pi k) = -\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathrm{Z}$;

16) $f(x)=\dfrac{[x]}{\{x\}}$, $x\neq k$, $k\in \mathrm{Z}$ та:

а) $f(k)=k$, $k\in \mathrm{Z}$; **б)** $f(k)=0$, $k\in \mathrm{Z}$;

в) $f(k)=k-1$, $k\in \mathrm{Z}$;

17) $f(x)=\dfrac{[x]}{[x]-\{x\}}$, $x\neq 0$ та:

а) $f(0)=1$; **б)** $f(0)=\frac{1}{2}$; **в)** $f(0)=0$.

138. Чи є функція $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ кусково-неперервною на сегменті X, якщо:

1) $f(x)=[x]$ та:

а) $X=[-10;10]$; **б)** $X=[-\sqrt{10};\sqrt{10}]$; **в)** $X=[-\sqrt{10};10]$;

2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\{x\}}, & x\notin \mathrm{Z},\\ 0, & x\in \mathrm{Z},\end{cases}$ та:

а) $X=[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$; **б)** $X=[\frac{1}{\pi};\frac{9}{10}]$; **в)** $X=[0;\frac{9}{10}]$;

3) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{[x]}, & x\notin[0;1),\\ \frac{1}{x-1}, & x\in[0;1),\end{cases}$ та:

а) $X=[0;1]$; **б)** $X=[-100;0]$; **в)** $X=[1;100]$;

4) $f(x)=[\frac{1}{x}]$ та:

а) $X=[-10;0]$; **б)** $X=[\frac{1}{1000};1000]$; **в)** $X=[\sqrt{10};\sqrt{20}]$;

5) $f(x)=\mathrm{sgn}(\sin x)$ та:

а) $X=[-2\pi;2\pi]$; **б)** $X=[0;100]$;

6) $f(x)=\mathrm{sgn}(\sin\frac{1}{x})$ та:

а) $X=[-2\pi;2\pi]$; **б)** $X=[0;1]$; **в)** $X=[1;100]$;

7) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{arcctg}\,\frac{1}{\cos x}, & x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \mathrm{Z},\\ 0, & x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \mathrm{Z},\end{cases}$ та:

а) $X=[-2\pi;2\pi]$; **б)** $X=[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$?

139. Які з наведених множин $X \subset \mathrm{R}$ є компактами? Для множин, що не є компактами, наведіть приклад послідовності точок $(x_n) \subset X$, з якої не можна виділити підпослідовність (x_{n_k}), яка збігається до деякого значення $x_0 \in X$, якщо:

1) $X = \mathrm{N}$; **2)** $X = \mathrm{Z}$; **3)** $X = \mathrm{Q}$;

4) $X = \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}$; **5)** $X = [0; 1] \bigcup \{2\}$; **6)** $X = [0; 1] \bigcup [2; 4]$;

7) $X = \{\frac{1}{n} | n \in \mathrm{N}\}$; **8)** $X = K_3$; **9)** $X = K_{10}$;

10) $X = [0; \frac{1}{2}] \bigcup [\frac{2}{3}; \frac{3}{4}] \bigcup [\frac{4}{5}; \frac{5}{6}] \bigcup \ldots$;

11) $X = [2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{3}] \bigcup [4\frac{1}{4}; 5\frac{1}{5}] \bigcup [6\frac{1}{6}; 7\frac{1}{7}] \bigcup \ldots$;

12) $X = (0; 1) \bigcup \{2\}$;

13) $X = [0; 1] \setminus ((\frac{1}{2}; \frac{2}{3}) \bigcup (\frac{3}{4}; \frac{4}{5}) \bigcup (\frac{5}{6}; \frac{6}{7}) \ldots)$;

14) $X = \{\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n} | n \in \mathrm{N}\}$;

15) $X = \{0\} \bigcup [\frac{1}{2}; 1] \bigcup [\frac{1}{4}; \frac{1}{3}] \bigcup [\frac{1}{6}; \frac{1}{5}] \bigcup \ldots$;

16) $X = [0; 2] \setminus \{\frac{n}{n+1} | n \in \mathrm{N}\}$;

17) $X = \{\pm\frac{1}{n} | n \in \mathrm{N}\} \bigcup \{0\}$.

140. Наведіть приклад неперервної на X функції $X \xrightarrow[\text{на}]{f} Y$, якщо така існує, де:

1) $X = [0; 1]$, $Y = [0; 10]$; **2)** $X = [0; 1]$, $Y = [-1; 1]$;

3) $X = [0; 1]$, $Y = \mathrm{R}^+$; **4)** $X = [0; 1]$, $Y = \mathrm{R}$;

5) $X = [0; 1]$, $Y = [0; 1)$; **6)** $X = [0; 1]$, $Y = (0; 1)$;

7) $X = [0; 1]$, $Y = [0; 1] \bigcup [2; 3]$;

8) $X = [0; 1]$, $Y = \{\frac{1}{n} | n \in \mathrm{N}\} \bigcup \{0\}$;

9) $X = (0; 1)$, $Y = (0; 1]$; **10)** $X = (0; 1)$, $Y = [0; 1]$;

11) $X = (0; 1)$, $Y = (0; +\infty)$; **12)** $X = (0; 1)$, $Y = [0; +\infty)$;

13) $X = (0; 1)$, $Y = \mathrm{R}$;

14) $X = (0; 1)$, $Y = (0; 1) \bigcup (1; 2)$;

15) $X = (0; 1]$, $Y = [0; 1)$; **16)** $X = (0; 1]$, $Y = [0; 1]$;

17) $X=(0;1]$, $Y=(0;+\infty)$; **18)** $X=(0;1]$, $Y=[0;+\infty)$;

19) $X=(0;1]$, $Y=\mathrm{R}$;

20) $X=(0;1]\bigcup(2;3]$, $Y=(0;1)\bigcup(1;2)$;

21) $X=(0;1)\bigcup(2;3)$, $Y=(0;1)$;

22) $X=(0;1)\bigcup(2;3)$, $Y=(0;1)\bigcup(1;2)$;

23) $X=[0;1]\bigcup[2;3]$, $Y=(0;1)$;

24) $X=(0;1)\bigcup[2;3]$, $Y=(0;1)\bigcup(1;2)$;

25) $X=(0;+\infty)$, $Y=[0;1)$; **26)** $X=(0;+\infty)$, $Y=[0;1]$;

27) $X=(0;+\infty)$, $Y=\mathrm{R}^{+}$; **28)** $X=(0;+\infty)$, $Y=\mathrm{R}$;

29) $X=(0;+\infty)$, $Y=(0;1)\bigcup(1;2)$;

30) $X=\mathrm{R}$, $Y=(0;1)$; **31)** $X=\mathrm{R}$, $Y=[0;1]$;

32) $X=\mathrm{R}$, $Y=(0;1)\bigcup(1;2)$.

141. Доведіть твердження:

1) якщо $f\in C[0;1]$ та $E_f\subset[0;1]$, то $\exists c\in[0;1]:\ f(c)=c$;

2) якщо $f\in C[0;2]$ та $f(0)=f(2)$, то $\exists c_1,c_2\in[0;2]$: $c_1-c_2=1$ та:

а) $f(c_1)=f(c_2)$; **б)** $f(c_1)-f(c_2)=\frac{1}{2}(f(2)-f(0))$;

3) якщо $f\in C(a;b)$, то $\forall x_1,x_2,...,x_n\in(a;b)$ $\exists c\in(a;b)$: $f(c)=\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)$;

4) якщо P – поліном непарного степеня, то $\exists c\in\mathrm{R}:\ P(c)=0$;

5) якщо для полінома $P=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+...+a_1x+a_0$ справджується умова $a_{2n}a_0<0$, то $\exists c_1,c_2\in\mathrm{R}:\ P(c_1)=P(c_2)=0$;

6) якщо $f\in C[0;1]$, монотонна на $[0;1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$ та $\exists n\in\mathrm{N}:\ \underbrace{f\circ f\circ...\circ f}_{n}(x)=x$ $\forall x\in[0;1]$, то $f(x)=x$ $\forall x\in[0;1]$;

7) якщо $f\in C[0;1]$, $E_f=[0;1]$, то існують принаймні два різні значення $c_1,c_2\in[0;1]$, для яких $f(f(c_i))=c_i$, $i=1;2$;

8) якщо $f \in C[0;1]$, $E_f = [0;1]$, то існують принаймні два різні значення $c_1, c_2 \in [0;1]$, для яких $f(f(c_i)) = c_i$, $i = 1;\ 2$;

9) якщо $f,\ g \in C[0;1]$, то $\exists c \in [0;1]:\ f(c) = g(c)$ за умови, що:

а) $(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) < 0$;

б) $f(g(x)) = g(f(x))\ \ \forall x \in [0;1]$;

10) якщо $f,\ g \in C[0;1]$ та $E_f = E_g = [0;1]$, то $\exists c \in [0;1]: f(g(c)) = g(f(c))$;

11) усі корені полінома $P = (x - a_1)...(x - a_n) + (x - b_1)...(x - b_n)$, де $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < ...a_n < b_n$, є дійсними числами;

12) усі нулі функції $P = \dfrac{A_1}{x - a_1} + \dfrac{A_2}{x - a_2} + ... + \dfrac{A_n}{x - a_n}$, де $a_1 < a_2 < ... < a_n$ та $A_1 A_2 ... A_n \neq 0$, є дійсними числами, якщо:

а) $A_1 > 0,\ A_2 > 0,\ ...,\ A_{n-1} > 0$;

б) $A_1 > 0,\ A_2 > 0,\ ...,\ A_{k-1} > 0,\ A_{k+1} > 0,\ A_{k+2} > 0,\ ...,\ A_n > 0$ для деякого $k \in \{2; 3; ...; n-1\}$ та $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k < 0$;

13) для функції $f \in C(\mathrm{R})$ $\exists c \in \mathrm{R}:\ \forall x \in \mathrm{R}\ \ f(x) \geq f(c)$, якщо:

а) $f(x) = x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + ... + a_1 x + a_0$;

б) $f(x) = |P(x)|$, де P – поліном, відмінний від сталої;

14) якщо функція $f \in C(\mathrm{R})$, $f(x) \geq 0\ \ \forall x \in \mathrm{R}$ та $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, то $\exists c \in \mathrm{R}:\ \forall x \in \mathrm{R}\ \ f(x) \leq f(c)$;

15) якщо $f \in C[a;b]$ та $f(x) > 0\ \ \forall x \in [a;b]$, то $\exists \alpha > 0:$ $\forall x \in [a;b]\ \ f(x) \geq \alpha$;

16) якщо $f \in C(a;b)$, $\underline{\lim\limits_{x \to a+0}} f(x) = l \in \overline{\mathrm{R}}$ та $\overline{\lim\limits_{x \to a+0}} f(x) = L \in \overline{\mathrm{R}}$, то $\forall \alpha \in (l;L)\ \ \exists (x_n) \subset (a;b):\ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ та $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$;

17) рівняння $f(x) = g(x)$ має принаймні один розв'язок на множині X, якщо:

а) $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = \sin x$, $X = [-2\pi; 0]$;

б) $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = \operatorname{arcctg} x$, $X = \mathrm{R}$;

в) $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, $X = \mathrm{R}$;

г) $f(x) = (1-x)\cos x$, $g(x) = \sin x$, $X = (0; 1)$;

18) якщо $\exists C \in \mathrm{R}: \ \forall \{x_1, x_2\} \subset X \subset D_f$ виконується нерівність: $|f(x_1) - f(x_2)| \le C$, то коливання $\omega(f, X) < +\infty$ і його можна обчислити за формулою $\omega(f, X) = \sup\limits_{x_1 \in X, x_2 \in X} \{|f(x_1) - f(x_2)|\}$;

19) у загальному випадку лема Гейне – Бореля перестає бути чинною, якщо:

а) множина F не замкнена;

б) множина F не обмежена;

в) множини I_α не є відкритими.

142. Перевірте, чи справджуються твердження:

1) рівняння $f(x) = g(x)$ має принаймні один розв'язок на множині X, якщо:

а) $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$, $X = \mathrm{R}$;

б) $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x)$ – поліном, відмінний від константи, $X = \mathrm{R}$;

в) $f(x) = x2^x$, $g(x) = 1$, $X = [0; 1]$;

г) $f(x) = x$, $g(x) = a\sin x + b$, $a, b \in (0; 1)$, $X = [0; a+b]$;

2) якщо $f \in C[a; +\infty)$ та $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathrm{R}$, то f обмежена на $[a; +\infty)$;

3) якщо $f \in C[a; +\infty)$ та f обмежена на $[a; +\infty)$, то $\forall T$ $\exists (x_n): \ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ та $\lim\limits_{n \to \infty} (f(x_n + T) - f(x_n)) = 0$;

4) якщо функції $f, g \in C(\mathrm{R})$ і періодичні та $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$, то $\forall x \in \mathrm{R}$ $f(x) = g(x)$;

5) якщо функція f визначена та монотонна на $[a; b]$, то $f \in C[a; b]$;

6) якщо $f \in C(a; b)$ і в точці $x_0 \in (a; b)$ $\underline{\lim}_{x \to a+0} f(x) = l <$ $< \overline{\lim}_{x \to a+0} f(x) = L$, то $\forall \alpha \in (l; L)$ рівняння $f(x) = \alpha$ має нескінченну кількість коренів для довільного проміжку $(c; d)$: $x_0 \in (c; d) \subset (a; b)$:

7) існує функція $[0; 1] \xrightarrow{f} \mathrm{R}$, яка неперервна в кожній точці множини $M \subset [0; 1]$ і розривна в кожній точці множини $[0; 1] \setminus M$, якщо:

а) $M = [0; 1] \bigcap \mathrm{Q}$; **б)** $M = [0; 1] \bigcap (\mathrm{R} \setminus \mathrm{Q})$;

в) $M = K_3$; **г)** $M = [0; 1] \setminus K_3$;

д) M та $[0; 1] \setminus M$ скрізь щільні на $[0; 1]$;

е) M та $[0; 1] \setminus M$ скрізь щільні на $[0; 1]$ і для довільного проміжку $[a; b] \subset [0; 1]$ множини $M \bigcap [a; b]$ та $([0; 1] \setminus M) \bigcap [a; b]$ мають потужність континуум;

8) якщо $f \in C(x_0)$ і для довільного проміжку $(a; b)$, що містить точку x_0 $\exists c_1, c_2 \in (a; b)$: $f(c_1) \cdot f(c_2) < 0$, то $f(x_0) = 0$;

9) якщо функція $\mathrm{R} \xrightarrow{f} \mathrm{R}$ має періодом довільне число T із множини M, то вона є сталою функцією за умови, що:

а) $M = (0; 1)$; **б)** $M = \mathrm{Q}^+$;

в) $M = (\mathrm{R} \setminus \mathrm{Q})^+$; **г)** $M = \mathrm{Q}^+$ та $f \in \mathrm{C}(\mathrm{R})$;

10) для довільної множини $E \subset [0; 1]$ та функції $f \in C(E)$ існує функція $g \in C[0; 1]$, звуження якої на множину E збігається з функцією f;

11) функція $f \in C(\mathrm{R})$ тоді й тільки тоді, коли:

а) $\forall c \in \mathrm{R}$ множини $M_c = \{x | f(x) < c\}$ є відкритими;

б) $\forall c \in \mathrm{R}$ множини $V_c = \{x | f(x) \geq c\}$ є замкненими;

в) $\forall c \in \mathrm{R}$ множини $M_c = \{x | f(x) < c\}$ та $N_c = \{x | f(x) > c\}$ є відкритими;

г) $\forall c \in \mathrm{R}$ множини $U_c = \{x | f(x) \le c\}$ та $V_c = \{x | f(x) \ge c\}$ є замкненими;

д) для довільної відкритої множини U множина $f^{-1}(U)$ є відкритою;

е) для довільної замкненої множини V множина $f^{-1}(V)$ є замкненою;

є) $\forall c \in \mathrm{R}$ функція $g \in C(\mathrm{R})$, де $g(x) = \begin{cases} f(x), -a \le f(x) \le a, \\ -a, \quad f(x) < -a, \\ a, \quad f(x) > a; \end{cases}$

12) якщо функція $f \in C(\mathrm{R})$, то:

а) для довільної замкненої множини $A \subset \mathrm{R}$ множина $f(A)$ замкнена;

б) для довільної відкритої множини $B \subset \mathrm{R}$ множина $f(B)$ відкрита;

13) для функції $\mathrm{R} \xrightarrow{f} \mathrm{Z}$ множина точок неперервності є відкритою, а множина точок, де вона розривна, – замкненою;

14) для заданої обмеженої фігури Φ існують:

а) пряма l, що ділить її площу навпіл;

б) пряма l, що ділить її периметр навпіл;

в) пряма l, що одночасно ділить її площу та периметр навпіл;

г) дві перпендикулярні прямі l_1, l_2, що ділять її площу на чотири рівні частини;

д) дві перпендикулярні прямі l_1, l_2, що ділять її периметр на чотири рівні частини;

е) описаний навколо фігури квадрат Q, тобто такий, що на кожній із чотирьох сторін квадрата лежить принаймні по одній точці фігури;

15) для заданих обмежених фігур Φ_1, Φ_2 існують:

а) пряма l, що ділить площу кожної з фігур навпіл;

б) пряма l, що ділить периметр кожної з фігур навпіл;

в) пряма l, що ділить одночасно площу та периметр кожної з фігур навпіл;

16) існують функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, які мають такі властивості:

а) $[a,b]\subset D_f$, f не є неперервною на $[a,b]$ і набуває усіх проміжних значень між $\min\limits_{[a,b]} f(x)$ та $\max\limits_{[a,b]} f(x)$;

б) f розривна в кожній точці множини $\{0;\pm n;\pm \frac{1}{n} | n\in\mathrm{N}\}$ і неперервна в усіх інших точках;

в) f неперервна на проміжках X_1 та X_2, але не є неперервною на множині $X_1\bigcup X_2$;

г) f неперервна на інтервалі, але не обмежена на ньому;

д) $f\in C(a,b)$ і $\forall x\in(a,b)$ $f(x)>0$, тоді $\forall\alpha>0$ $\exists x_0\in(a,b)$: $f(x_0)<\alpha$;

е) $f\in C[a,b]$ і $\forall x\in[a,b]$ $f(x)>0$, тоді $\forall\alpha>0$ $\exists x_0\in(a,b)$: $f(x_0)<\alpha$;

є) f неперервна на D_f, набуває значень 1 та 3, але не набуває значення 2;

ж) f визначена й оборотна на $(-1;1)$, неперервна в точці $x_0=0$, а обернена функція розривна в точці $y_0=f(0)$;

з) f неперервна та зростаюча на $(-1;1)$, а обернена функція розривна;

и) $f\in C(0;1)$ і рівняння $f(x)=x$ не має розв'язків на проміжку $(0;1)$;

і) $f\in C(\mathrm{R})$ і рівняння $f(x)=x$ не має розв'язків на R;

ї) $D_f=[0;1]$ і на жодному із сегментів $[a,b]\subset[0;1]$ функція не досягає $\inf\limits_{[a,b]} f(x)$ та $\sup\limits_{[a,b]} f(x)$;

й) f визначена та не є неперервною на $[a,b]$, $\forall[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ і для будь-якого значення C між значеннями $f(\alpha)$ та $f(\beta)$ $\exists c\in[\alpha,\beta]$: $f(c)=C$;

к) $f\in C[0;1]$, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$, в усіх інших точках функція набуває лише раціональних значень;

17) існує функція $f \in C(\mathrm{R})$, яка кожного свого значення набуває рівно:

а) два рази; **б)** три рази;

в) чотири рази; **г)** п'ять разів;

д) нескінченну кількість разів.

143. Побудуємо функції Кантора $\tau:[0;1]\to[0;1]$ та $k:[0;1]\to[0;2]$. На першому кроці при побудові канторової множини K_3 із сегмента $[0;1]$ вилучаємо інтервал $(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$. Покладаємо на ньому, що функція τ дорівнює $\frac{1}{2}$. На другому кроці вилучаємо два інтервали: $(\frac{1}{9};\frac{2}{9})$ та $(\frac{7}{9};\frac{8}{9})$. Покладемо на них, що функція τ дорівнює $\frac{1}{4}$ на першому та $\frac{3}{4}$ – на другому проміжку… На k-му кроці вилучаємо 2^{k-1} інтервалів: $(\alpha_1^{(k)};\beta_1^{(k)})$, $(\alpha_2^{(k)};\beta_2^{(k)})$, …, $(\alpha_{2^{k-1}}^{(k)};\beta_{2^{k-1}}^{(k)})$, $\alpha_1^{(k)}<\beta_1^{(k)}<\alpha_2^{(k)}<\beta_2^{(k)}<\ldots<$ $<\alpha_{2^{k-1}}^{(k)}<\beta_{2^{k-1}}^{(k)}$. Покладемо на кожному з них, що функція τ дорівнює зліва направо: $\frac{1}{2^k},\frac{3}{2^k},\ldots,\frac{2^k-1}{2^k}$ і т. д. до нескінченності. Далі покладемо $\tau(0)=0$, $\tau(1)=1$, $\tau(x)=\sup\limits_{t<x,\, t\in CK_3}\tau(t)$, $x\in K_3\setminus\{0;1\}$. Функція Кантора k задається таким чином: $k(x)=x+\tau(x)$, $x\in[0;1]$. Визначимо на проміжку $[0;1]$ множини $A=CK_3$, $B=\tau(K_3)$, $D=\tau(A)$, $E=k(K_3)$, $F=\tau(A)$.

1) Доведіть, що функція Кантора τ має такі властивості:

а) $D_\tau=[0;1]$; **б)** τ неспадна;

в) $\tau\in C[0;1]$; **г)** $E_\tau=[0;1]$;

д) A – зліченна множина точок; **е)** $A\coprod B=[0;1]$.

2) Доведіть, що функція Кантора k має такі властивості:

а) $D_k=[0;1]$; **б)** τ – зростаюча;

в) $k\in C[0;1]$; **г)** $E_k=[0;2]$;

д) F складається зі зліченної кількості інтервалів, сумарна довжина яких дорівнює 1;

e) $E \coprod F = [0;\, 2]$.

3) Позначимо через $A_k = \bigcup\limits_{i=1}^{2^{k-1}} (\alpha_i^{(k)};\, \beta_i^{(k)})$, $k \in \mathrm{N}$. Дослідіть на неперервність і вкажіть тип точок розриву для функції $[0;\, 1] \xrightarrow{f} \mathrm{R}$, якщо:

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in K_3, \\ 1, & x \in [0;\, 1] \setminus K_3; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in K_3, \\ c_k,\ x = \gamma_i^{(k)} = \frac{1}{2}(\alpha_i^{(k)} + \beta_i^{(k)}), & i = \overline{1,\, 2^{k-1}},\ k \in \mathrm{N}, \\ c_k \cdot \dfrac{x - \alpha_i^{(k)}}{\gamma_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)}},\ x \in (\alpha_i^{(k)};\, \gamma_i^{(k)}), & i = \overline{1,\, 2^{k-1}},\ k \in \mathrm{N}, \\ c_k \cdot \dfrac{x - \beta_i^{(k)}}{\gamma_i^{(k)} - \beta_i^{(k)}},\ x \in (\gamma_i^{(k)};\, \beta_i^{(k)}), & i = \overline{1,\, 2^{k-1}},\ k \in \mathrm{N}. \end{cases}$

144. Визначимо функцію $w : [0;\, 1] \to [0;\, 1]$ таким чином: кожне дійсне $x \in [0;\, 1)$ записуємо у вигляді нескінченного десяткового дробу $x = 0, x_1 x_2 \ldots$, де для скінченного дробу записуємо $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_l 00 \ldots$; для $x = 1$ покладемо $1{,}000\ldots = 1, x_1 x_2 \ldots$. Для кожного $x \in [0;\, 1]$ позначимо через m_n кількість нулів серед десяткових цифр $x_1, x_2, \ldots, x_n$ цього числа. Тоді покладемо $w(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \lim\limits_{n \to \infty} \frac{m_n}{n}$. Доведіть, що функція w має такі властивості:

1) $D_w \neq [0;\, 1]$; **2)** $\mathrm{Q} \bigcap [0;\, 1] \subset D_w$;

3) $\forall [\alpha;\, \beta] \subset [0;\, 1]$ $\max\limits_{[\alpha;\, \beta] \bigcap D_w} w(x) = 1$ та $\min\limits_{[\alpha;\, \beta] \bigcap D_w} w(x) = 0$;

4) $\forall l \in [0;\, 1]$ $\forall [\alpha;\, \beta] \subset 0;\, 1]$ $\exists x_0 \in [\alpha;\, \beta] :\ w(x_0) = l$;

5) функція w розривна в кожній точці D_w.

Розділ 10
РІВНОМІРНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Короткі теоретичні відомості

Функція $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ називається рівномірно неперервною на множині $X \subset D_f$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \left(x_1 \in X, x_2 \in X \right)$: $\left| x_1 - x_2 \right| < \delta \Rightarrow \left| f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right) \right| < \varepsilon$ (рівномірна неперервність за Коші).

Функція $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ називається рівномірно неперервною на множині $X \subset D_f$, якщо $\forall \left(x_n\right), \left(y_n\right) \subset X$ з умови $x_n - y_n \to 0$ випливає, що $f\left(x_n\right) - f\left(y_n\right) \to 0$ (рівномірна неперервність за Коші).

Визначення рівномірної неперервності функції за Коші та Гейне еквівалентні.

Теорема 1 (*Кантора*).

Нехай функція f неперервна на множині $X \subset D_f$. Якщо X – компакт, то f рівномірно неперервна на X.

Властивість 1 *(рівномірна неперервність звуження)*.

Якщо $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ рівномірно неперервна на $X \subset D_f$, то $\forall Y \subset X$ її звуження $f\Big|_Y$ також рівномірно неперервне на Y.

Властивість 2 *(неперервність рівномірно неперервної функції)*.

Якщо f рівномірно неперервна на $X \subset D_f$, то $f \in C(X)$.

Властивість 3 *(рівномірна неперервність на об'єднанні)*.

Якщо функція f рівномірно неперервна на множинах $[a,\, b]$ та $[b,\, c]$, то вона рівномірно неперервна на $[a,\, c]$, $a, c \in \overline{\mathrm{R}}$.

Властивість 4 *(рівномірна неперервність на нескінченності).*

Якщо $f \in C[a,\, +\infty)$ $\left(f \in C(-\infty,\, a]\right)$ і має скінченну границю $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathrm{R}$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b \in \mathrm{R}\right)$, то f рівномірно неперервна на $[a,\, +\infty)$ $\left((-\infty,\, a]\right)$.

Властивість 5 *(лінійність рівномірної неперервності).*

Якщо f, g – рівномірно неперервні на X функції, то $\forall\{\alpha, \beta\} \subset R$ функція $(\alpha f + \beta g)$ рівномірно неперервна на X.

Властивість 6 *(критерій рівномірної неперервності на інтервалі).*

Нехай $f \in C(a, b)$. Якщо $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A \in \mathrm{R}$, $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = B \in \mathrm{R}$, то f рівномірно неперервна на (a, b), інакше f не є рівномірно неперервною на (a, b).

Властивість 7 *(достатня умова рівномірної неперервності).*

Якщо на проміжку $X \subset D_f$ функція має обмежену похідну, то вона рівномірно неперервна на X.

Задачі

145. Доведіть твердження:

1) якщо $f \in C(\mathrm{R})$ та f – періодична, то вона рівномірно неперервна на R;

2) якщо f рівномірно неперервна на R, то $\exists a, b \ge 0$: $\forall x \in \mathrm{R}$ $|f(x)| \le a|x| + b$;

3) якщо f рівномірно неперервна на R^+, то $\exists c > 0$: $\forall x \in \mathrm{R}^+$ $\sup\limits_{u\in\mathrm{R}^+} |f(x+u) - f(x)| \le c(x+1)$;

4) якщо $f \in C(a, b)$ обмежена й монотонна на (a, b), то f рівномірно неперервна на (a, b);

5) якщо f рівномірно неперервна на $[1; +\infty)$, то $\exists c \in \mathrm{R}^+$ $\forall x \ge 1$ $\frac{|f(x)|}{x} \le c$;

6) якщо f рівномірно неперервна на R^+ та $\forall x \ge 0$ $\lim\limits_{n \to \infty} f(x+n) = 0$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

7) якщо для функції f на множині $X \subset D_f$ $\exists L > 0$ та $\exists \alpha \in (0; 1]$: $\forall x_1, x_2 \in X$ справджується умова $|f(x_1) - f(x_2)| \le L |x_1 - x_2|^\alpha$ (*умова Гельдера* при $\alpha < 1$, *умова Ліпшиця* при $\alpha = 1$), то f рівномірно неперервна на X;

8) f рівномірно неперервна на $[a; b]$ тоді й тільки тоді, коли $\forall \varepsilon > 0$ існує кусково-лінійна функція $[a; b] \xrightarrow{\varphi_\varepsilon} \mathrm{R}$: $\forall x \in [a, b]$ $|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| < \varepsilon$;

9) якщо f рівномірно неперервна на множинах X_1 та X_2 і $\sup X_1 \le a < b \le \inf X_2$, то f рівномірно неперервна на множині $X_1 \cup X_2$.

146. Для довільного $\varepsilon > 0$ знайдіть $\delta > 0$, що задовольняє означення рівномірної неперервності за Коші функції $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ на множині X, де:

1) $f(x) = x^2 - 2x - 1$ та $X = [-2; 5]$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ та:

а) $X = [1; +\infty)$; **б)** $X = [\frac{1}{10}; 1)$; **в)** $X = (-1; -\frac{1}{100}) \cup [2; 4)$;

3) $f(x) = \sqrt{x}$ та:

а) $X = [0; 1)$; **б)** $X = [2; +\infty)$; **в)** $X = \mathrm{R}^+$;

4) $f(x) = \sin(\cos x)$ та $X = \mathrm{R}$;

5) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, \ x\neq 0, \\ \ 0, \quad x=0, \end{cases}$ та $X=[0;\, 2\pi]$;

6) $f(x)=x^3$ та $X=[-1;\, 2]$;

7) $f(x)=3\sin x-2\cos x$ та $X=\mathrm{R}$.

147. Дослідіть функцію $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ на рівномірну неперервність на множині X, якщо:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ та:

а) $X=(0;\,1)$; **б)** $X=(\frac{1}{1000};\,1)$; **в)** $X=(0;\,+\infty)$;

г) $X=(1;\,+\infty)$; **д)** $X=(-\infty;\,-1)\bigcup[2;\,+\infty)$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ та:

а) $X=(0;\,1)$; **б)** $X=\mathrm{R}^-$; **в)** $X=(\frac{1}{1000};\,1)$;

г) $X=(\frac{101}{100};\,+\infty)$; **д)** $X=(-\infty;\,\frac{9}{10})\bigcup(\frac{11}{10};\,2)$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x+0{,}001}$ та:

а) $X=(0;\,1)$; **б)** $X=\mathrm{R}^+$; **в)** $X=(-\frac{1}{100};\,\frac{1}{100})$;

4) $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ та:

а) $X=(0;\,1)$; **б)** $X=(0;\,+\infty)$; **в)** $X=(1;\,+\infty)$;

5) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ та:

а) $X=(0;\,1)$; **б)** $X=(0;\,+\infty)$;

в) $X=(-9;\,-1)\bigcup[1;\,+\infty)$;

6) $f(x)=\ln x$ та:

а) $X=(0;\,1)$; **б)** $X=(0;\,+\infty)$;

в) $X=(1;\,\mathrm{e})$; **г)** $X=(1;\,+\infty)$;

7) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^7}-1}$ та:

а) $X=(2;\,5)$; **б)** $X=(0;\,1)$; **в)** $X=(2;\,+\infty)$;

8) $f(x)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ та:

а) $X=(-12;-1)$; **б)** $X=(0;\,1)$; **в)** $X=(1;\,+\infty)$;

г) $X=(0;\,+\infty)$; **д)** $X=\mathrm{R}\setminus\{0\}$;

9) $f(x)=\dfrac{x^6-1}{\sqrt{1-x^4}}$ та:

а) $X=(\frac{1}{3};\,\frac{1}{2})$; **б)** $X=(0;\,1)$; **в)** $X=(-1;\,1)$;

10) $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ та:

а) $X=(-1;\,0)$; **б)** $X=(0;\,1)$; **в)** $X=(-\infty;\,-1)$;

г) $X=(-\infty;\,0)$; **д)** $X=(-\infty;\,1)$;

11) $f(x)=\mathrm{e}^{\arcsin x}$ та:

а) $X=(-1;\,0)$; **б)** $X=(0;\,1)$; **в)** $X=[-1;\,1]$;

12) $f(x)=\cos x\cdot\cos\dfrac{1}{x}$ та:

а) $X=(1;\,2)$; **б)** $X=(0;\,1)$;

в) $X=(1;\,+\infty)$; **г)** $X=(0;\,+\infty)$;

13) $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ та:

а) $X=(1;\,2)$; **б)** $X=(0;\,1)$;

в) $X=(-1;\,0)$; **г)** $X=(-\infty;\,0)$;

д) $X=(0;\,+\infty)$;

14) $f(x)=\dfrac{\mathrm{tg}^3 x}{\arcsin^2 x}$ та:

а) $X=(0;\,1)$; **б)** $X=[-1;\,1]$; **в)** $X=[-1;\,0)$;

15) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;+\infty)$; **в)** $X=(0;+\infty)$;

16) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-x^2}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;2)$; **в)** $X=(2;3)$;

г) $X=(-\infty;-2)$; **д)** $X=(1;+\infty)$;

17) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;2)$; **в)** $X=(2;+\infty)$;

г) $X=(-1;0)$; **д)** $X=(-2;-1)$; **е)** $X=(-\infty;-3)$;

18) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(0;\frac{1}{2})$; **в)** $X=(\frac{1}{2};1)$;

г) $X=(1;2)$; **д)** $X=(2;+\infty)$;

19) $f(x)=\dfrac{x\ln^2 x}{(x-1)^2}$ та:

а) $X=(0;\frac{1}{2})$; **б)** $X=(0;1)$;

в) $X=(e;+\infty)$; **г)** $X=(1;+\infty)$;

20) $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-1;1)$; **в)** $X=(2;3)$;

г) $X=(3;+\infty)$; **д)** $X=(-\infty;-2)$;

21) $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{arctg} x}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-\infty;-1)$; **в)** $X=(0;+\infty)$;

22) $f(x)=\cos\sin x$ та:

а) $X=[0;1]$; **б)** $X=(0;+\infty)$; **в)** $X=\mathrm{R}$;

23) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{th} x}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;2)$; **в)** $X=(1;+\infty)$;

24) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;+\infty)$; **в)** $X=\mathrm{R}$;

25) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;+\infty)$; **в)** $X=(-\infty;0)$;

26) $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ та:

а) $X=(-2;-1)$; **б)** $X=(0;1)$; **в)** $X=(1;+\infty)$;

27) $f(x)=x^x$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=[2;4]$; **в)** $X=(1;+\infty)$;

28) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;+\infty)$; **в)** $X=(0;+\infty)$;

29) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^3}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;10)$; **в)** $X=(1;+\infty)$;

30) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-2;1)$; **в)** $X=(10;+\infty)$;
г) $X=(-\infty;-3)$; **д)** $X=(2;+\infty)$;
е) $X=(-1;1)\bigcup[4;+\infty)$;

31) $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x\sin x}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(0;+\infty)$; **в)** $X=(\frac{\pi}{2};\pi)$;

32) $f(x)=\dfrac{(\cos x-1)(x-1)}{x\ln x}$ та:

а) $X=(0;\frac{1}{2})$; **б)** $X=(\frac{1}{2};1)$; **в)** $X=(0;1)$;
г) $X=(1;2)$; **д)** $X=(1;+\infty)$; **е)** $X=(0;+\infty)$.

148. Дослідіть функцію $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ на рівномірну не перервність на множині X, якщо:

1) $f(x) = x \cdot \ln x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ та:

а) $X = (0; 1)$; **б)** $X = (1; 10)$;

в) $X = (1; +\infty)$; **г)** $X = (0; +\infty)$;

2) $f(x) = x^2$ та:

а) $X = (0; 1)$; **б)** $X = (-1; 1000)$; **в)** $X = \mathrm{R}$;

3) $f(x) = x^3$ та:

а) $X = (-1; 1)$; **б)** $X = (0; +\infty)$; **в)** $X = \mathrm{R}$;

4) $f(x) = x^{\frac{5}{4}}$ та:

а) $X = (0; 1)$; **б)** $X = (0; 10)$; **в)** $X = (0; +\infty)$;

5) $f(x) = x \ln x$ та:

а) $X = (0; 1)$; **б)** $X = (1; +\infty)$; **в)** $X = (0; +\infty)$;

6) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ та:

а) $X = (0; 1)$; **б)** $X = (1; 2)$; **в)** $X = (1; +\infty)$;

г) $X = (2; 3)$; **д)** $X = (2; +\infty)$;

е) $X = (0; \frac{1}{2}) \bigcup [\frac{3}{2}; +\infty)$;

7) $f(x) = \mathrm{e}^x$ та:

а) $X = (-1; 1)$; **б)** $X = (0; +\infty)$;

в) $X = (-\infty; -3)$; **г)** $X = \mathrm{R}$;

8) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ та:

а) $X = (0; 1)$; **б)** $X = (-1; 0)$;

в) $X = (1; 1000)$; **г)** $X = (-\infty; -1)$;

д) $X = (-\infty; 0)$; **е)** $X = (1; +\infty)$;

9) $f(x)=\sqrt{x}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;+\infty)$; **в)** $X=(0;+\infty)$;

10) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-1;+\infty)$; **в)** $X=\mathrm{R}$;

11) $f(x)=x^{\frac{4}{5}}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-1;1)$; **в)** $X=\mathrm{R}$;

12) $f(x)=\cos(x^2)$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-1;1000)$; **в)** $X=\mathrm{R}$;

13) $f(x)=\sin\sqrt{x}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;+\infty)$; **в)** $X=(0;+\infty)$;

14) $f(x)=\cos(\ln x)$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;\mathrm{e})$; **в)** $X=(1;+\infty)$;

г) $X=(\frac{1}{100};+\infty)$; **д)** $X=(0;+\infty)$;

15) $f(x)=\sin(\mathrm{e}^x)$ та:

а) $X=(-1;1)$; **б)** $X=(-\infty;0)$;

в) $X=(0;+\infty)$; **г)** $X=\mathrm{R}$;

16) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}-2}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;\ 2)$; **в)** $X=(2;\ 4)$;

г) $X=(4;+\infty)$; **д)** $X=(9;+\infty)$;

17) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;3)$;

в) $X=(2;+\infty)$; **г)** $X=(0;+\infty)$;

18) $f(x)=x\operatorname{sgn}x$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-4;4)$; **в)** $X=\mathrm{R}$;

19) $f(x)=\operatorname{tg} x$ та:

а) $X=(0;\frac{\pi}{4})$; **б)** $X=(0;\frac{\pi}{2})$; **в)** $X=(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4})$;

20) $f(x)=\operatorname{ctg} x$ та:

а) $X=(0;\frac{\pi}{4})$; **б)** $X=(0;\frac{\pi}{2})$; **в)** $X=(\frac{101\pi}{4};\frac{103\pi}{4})$;

21) $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x-1}{x^2}, & x\neq 0,\\ -\frac{1}{2}, & x=0,\end{cases}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(0;+\infty)$; **в)** $X=\mathrm{R}$;

22) $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(0;+\infty)$; **в)** $X=(-\infty;0)$;

23) $f(x)=\dfrac{x^5-1}{\sqrt{1-x^4}}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-1;0)$; **в)** $X=(-1;1)$;

24) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-1;0)$;

в) $X=(-1;0)\bigcup(0;1)$;

г) $X=(0;+\infty)$; **д)** $X=(-\infty;-\frac{1}{2})\bigcup(\frac{1}{2};+\infty)$;

25) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3+2x^2-2x-1}$ та:

а) $X=(-2;2)$; **б)** $X=(-\infty;-2{,}001)$;

в) $X=(1{,}001;+\infty)$;

26) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^4+2x^3-x-2}$ та:

а) $X=(-3;3)$; **б)** $X=(-\infty;-1{,}001)$; **в)** $X=(1{,}001;+\infty)$;

27) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-x}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-1;0)$; **в)** $X=(2;+\infty)$;

28) $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(2;+\infty)$; **в)** $X=(1;+\infty)$;

29) $f(x)=\mathrm{e}^x\operatorname{arctg}x$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(2;+\infty)$; **в)** $X=(-\infty;-1)$;

30) $f(x)=\mathrm{e}^x\operatorname{arcctg}x$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-\infty;0)$; **в)** $X=(1;+\infty)$;

31) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\operatorname{arcctg}x$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-\infty;0)$; **в)** $X=(1;+\infty)$;

32) $f(x)=x+\sin x$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-\infty;0)$; **в)** $X=\mathrm{R}$.

149. Дослідіть функцію $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ на рівномірну неперервність на множині X, якщо:

1) $f(x)=x\cdot\sin x$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;+\infty)$; **в)** $X=(-\infty;0)$;

2) $f(x)=\sin(x\cdot\sin x)$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(1;+\infty)$; **в)** $X=\mathrm{R}$;

3) $f(x)=\cos(x\cdot\cos x)$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(0;+\infty)$; **в)** $X=\mathrm{R}$;

4) $f(x)=\operatorname{sh}x$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=\mathrm{R}$;

5) $f(x)=\operatorname{ch}x$ та:

а) $X=(-1;1)$; **б)** $X=(0;+\infty)$;

6) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x\le 0,\end{cases}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(0;+\infty)$; **в)** $X=(-\infty;0)$;

г) $X=\mathrm{R}$; **д)** $X=(-10;10)$;

7) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, \ x\le 0, \\ 1+\sqrt{x}, \quad x>0, \end{cases}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-10;0)$; **в)** $X=(-10;10)$;
г) $X=(-\infty;0)$; **д)** $X=(0;+\infty)$;

8) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=(-1;0]$;
в) $X=(-1;0)\bigcup(0;1)$; **г)** $X=\mathrm{Z}$;
д) $X=\mathrm{Q}$; **е)** $X=(-2;-1)\bigcup(1;2)$;

9) $f(x)=[x]$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=[-1;0]$;
в) $X=(-1;0)\bigcup(0;1)$; **г)** $X=\mathrm{Z}$;
д) $X=\mathrm{Q}$; **е)** $X=(-2;-1)\bigcup(1;2)$;
є) $X=\{2-\frac{1}{n}|n\in\mathrm{N}\}$; **ж)** $X=\{2-\frac{1}{n}|n\in\mathrm{N}\}\bigcup\{2\}$;
з) $X=\{2+\frac{1}{n}|n\in\mathrm{N}\}\bigcup\{2\}$; **и)** $X=[0;1]\bigcup[3;4]$;

10) $f(x)=\begin{cases} 1, \quad x\in\mathrm{Q}, \\ 0, \quad x\in\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}, \end{cases}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=\mathrm{Z}$; **в)** $X=\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}$;
г) $X=((R\setminus Q)\bigcap[-2;-1])\bigcup(Q\bigcap[1;2])$;
д) $X=((R\setminus Q)\bigcap[0;1])\bigcup(Q\bigcap[1;2])$;

11) $f(x)=\begin{cases} -x^2, \quad x\in\mathrm{Q}, \\ x^2, \quad x\in\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}, \end{cases}$ та:

а) $X=(0;1)$; **б)** $X=\mathrm{Q}$; **в)** $X=\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}$;
г) $X=((R\setminus Q)\bigcap[-1;0)\bigcup(Q\bigcap(0;1])$.

150. Наведіть приклади таких функцій $f, g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, що задовольняють наведені нижче умови, або доведіть, що таких функцій не існує:

1) f, g рівномірно неперервні на (a,b), а функція $h(x)=f(x)g(x)$ не є рівномірно неперервною на (a,b), якщо:

а) $a,b\in\mathrm{R}$; **б)** $a,b\in\overline{\mathrm{R}}$;

2) f рівномірно неперервна на (a, b), а функція $h(x) = f(x)\sin x$ не є рівномірно неперервною на (a, b), якщо:

а) $a, b \in \mathrm{R}$; **б)** $a, b \in \overline{\mathrm{R}}$;

3) f обмежена та неперервна на деякому інтервалі (a, b), але не є рівномірно неперервною на цьому інтервалі;

4) f неперервна на деякій замкненій множині X, але не є рівномірно неперервною на ній;

5) f рівномірно неперервна на деякій замкненій множині X, але не обмежена на ній;

6) f рівномірно неперервна на деякому сегменті $[a, b]$ та на півінтервалі $(b, c]$, але не є рівномірно неперервною на сегменті $[a, c]$.

ВІДПОВІДІ

Розділ 1. Символіка. Операції над множинами. Метод математичної індукції

3. 1) вірно; **2)–5)** не вірно; **6)** вірно; **7)**, **8)** не вірно; **9)** вірно; **10)–12)** не вірно.

4. 1) а) $P=\varnothing$, $U=[0;1]$; **б)** $P=[-5;4)$, $U=(-14;12)$; **в)** $P=\{0\}$, $U=\mathrm{R}$; **г)** $P=\{1\}$, $U=\mathrm{R}$; **д)** $P=\varnothing$, $U=\mathrm{N}$; **е)** $P=\varnothing$, $U=(-\pi;\frac{1}{2}\pi)$; **2) а)** $V=[-1;+\infty)$, $L=[1;+\infty)$; **б)** $V=L=\{0\}$; **в)** $V=L=(0;+\infty)$; **г)** $V=[0;6]$, $L=[2;4]$; **д)** $V=\mathrm{Q}\bigcap[0;1]$, $L=\{0;1\}$; **е)** $V=(-1;2)$, $L=(0;1)$; **є)** $V=\{1;2;3\}$, $L=\{1;2\}$.

6. $D\subset B=E=F\subset A=G=H\subset C$.

8. 1) а), **б)** так, **в)** ні; 2**) а)**, **б)**, **в)** так; 3**) а)**, **б)** ні, **в)** так; **4) а)**, **б)** так, **в)** ні.

Розділ 2. Бінарні відношення

14. **1) а)**, **б)**, **2)** ні; **3)** так, $A = B$; **4)** ні; **5)** так, $A = \mathrm{R}\setminus\{1\}$, $B = \mathrm{R}\setminus\{2\}$, $C = \mathrm{R}\setminus\{0\}$, **6)** ні.

15. **1) а)** $\Gamma_1 = \{n^2 \mid n \in \mathrm{N}\}$, $\Gamma_2 = \mathrm{N}$, $\Gamma_1(x) = \{\sqrt{x}\}$, якщо $x = k^2$, $k \in \mathrm{N}$, інакше $\Gamma_1(x) = \varnothing$, $\Gamma_2(y) = \{y^2\}$; **б)** $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \mathrm{N}$, $\Gamma_1(x) = \{x, x+1, x+2, ...\}$, $\Gamma_2(y) = \{1, 2, ..., y\}$; **в)** $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \{1, 2, ..., 99\}$, $\Gamma_1(x) = \{1, 2, ..., 100 - x\}$, $\Gamma_2(y) = \{1, 2, ..., 100 - y\}$; **г)** $\Gamma_1 = \{1, 2, 3, 6\}$, $\Gamma_2 = \{3, 4, 5, 8\}$, $\Gamma_1(1) = \{8\}$, $\Gamma_1(2) = \{5\}$, $\Gamma_1(3) = \{4\}$, $\Gamma_1(6) = \{3\}$, інакше $\Gamma_1(x) = \varnothing$, $\Gamma_2(3) = \{6\}$, $\Gamma_2(4) = \{3\}$, $\Gamma_2(5) = \{2\}$, $\Gamma_2(8) = \{1\}$, інакше $\Gamma_2(y) = \varnothing$; **2) а)** $\Gamma_1 = X$, $\Gamma_2 = Y$, $\Gamma_1(x) = \{2, 5, 8\}$, якщо $x \in \{1, 4, 7, 10\}$, $\Gamma_1(x) = \{1, 4, 7\}$, якщо $x \in \{2, 5, 8, 11\}$, $\Gamma_1(x) = \{3, 6\}$, якщо $x \in \{3, 6, 9, 12\}$, $\Gamma_2(y) = \{1, 4, 7, 10\}$, якщо $y \in \{2, 5, 8\}$, $\Gamma_2(y) = \{2, 5, 8, 11\}$, якщо $y \in \{1, 4, 7\}$, $\Gamma_2(y) = \{3, 6, 9, 12\}$, якщо $y \in \{3, 6\}$; **б)** $\Gamma_1 = X$, $\Gamma_2 = Y$, $\Gamma_1(x)$ – усі дільники x, що не перевищують 8, $\Gamma_2(y)$ – усі кратні y, що не перевищують 12; **в)** $\Gamma_1 = \{1, 2, ..., 9\}$, $\Gamma_2 = Y$, $\Gamma_1(1) = Y$, $\Gamma_1(x) = \{1, 2, ..., 10 - x\}$, якщо $x \in \{2, 3, ..., 9\}$, інакше $\Gamma_1(x) = \varnothing$, $\Gamma_2(y) = \{1, 2, ..., 10 - y\}$; **г)** $\Gamma_1 = \Gamma_2 = Y$, $\Gamma_1(x) = \{x, x+1, ..., 5 + x\}$, якщо $x \in \{1, 2, 3\}$, $\Gamma_1(x) = \{x, x+1, ..., 8\}$, якщо $x \in \{4, 5, ..., 8\}$, інакше $\Gamma_1(x) = \varnothing$, $\Gamma_2(y) = \{1, 2, ..., x\}$, якщо $y \in \{1, 2, ..., 5\}$, $\Gamma_2(y) = \{y - 5, y - 4, ..., y\}$, якщо $y \in \{6, 7, 8\}$; **д)** $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \{1, 2, 3, 4\}$, $\Gamma_1(1) = \Gamma_1(2) = \Gamma_1(3) = \{1, 2, 3, 4\}$, $\Gamma_1(4) = \{1, 2, 3\}$, інакше $\Gamma_1(x) = \varnothing$, аналогічно $\Gamma_2(y)$; **3) а)** $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \{2n + 1 \mid n \in \mathrm{Z}\}$, $\Gamma_1(x) = \{2n + 1 \mid n \in \mathrm{Z}\}$, якщо $x = 2k + 1$, $k \in \mathrm{Z}$, інакше $\Gamma_1(x) = \varnothing$, аналогічно $\Gamma_2(y)$; **б)** $\Gamma_1 = Z\setminus\{0\}$, $\Gamma_2 = Z$, $\Gamma_1(x)$ – усі цілі кратні x, якщо $x \neq 0$,

$\Gamma_1(0)=\varnothing$, $\Gamma_2(y)$ усі дільники y; **в)** $\Gamma_1=\{1, 4, 12, 32\}$, $\Gamma_2=\{0, 1, 2, 3\}$, $\Gamma_1(1)=\{0\}$, $\Gamma_1(4)=\{1\}$, $\Gamma_1(12)=\{2\}$, $\Gamma_1(32)=\{3\}$, інакше $\Gamma_1(x)=\varnothing$, $\Gamma_2(0)=\{1\}$, $\Gamma_2(1)=\{4\}$, $\Gamma_2(2)=\{12\}$, $\Gamma_2(3)=\{32\}$, інакше $\Gamma_2(y)=\varnothing$; **4) а)** $\Gamma_1=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n\in \mathrm{Z}\}$, $\Gamma_2=\mathrm{R}$, $\Gamma_1(x)=\{\operatorname{tg} x\}$, якщо $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathrm{Z}$, інакше $\Gamma_1(x)=\varnothing$, $\Gamma_2(y)=\{\operatorname{arctg} y+\pi n \mid n\in\mathrm{Z}\}$; **б)** $\Gamma_1=\Gamma_2=\mathrm{R}$, $\Gamma_1(x)=(-\infty; |x|]$, $\Gamma_2(y)=(-\infty; -y]\cup[y; +\infty)$, якщо $y\geq 0$, інакше $\Gamma_2(y)=\mathrm{R}$; **в)** $\Gamma_1=\mathrm{R}$, $\Gamma_2=\mathrm{Z}$, $\Gamma_1(x)=\{[x]\}$, $\Gamma_2(y)=[y; y+1)$, якщо $y\in\mathrm{Z}$, інакше $\Gamma_2(y)=\varnothing$; **г)** $\Gamma_1=\mathrm{R}$, $\Gamma_2=[0; 1)$, $\Gamma_1(x)=\{\{x\}\}$, $\Gamma_2(y)=\{y+k|k\in\mathrm{Z}\}$, якщо $y\in[0; 1)$, інакше $\Gamma_2(y)=\varnothing$; **д)** $\Gamma_1=\mathrm{R}$, $\Gamma_2=\bigcup\limits_{n\in\mathrm{Z}}[n; n+\frac{1}{2})$, $\Gamma_1(x)=\{x+\frac{1}{2}\cdot[2x]\}$, $\Gamma_2(y)=\{y-\frac{1}{2}n\}$, якщо $y\in[n; n+\frac{1}{2})$, інакше $\Gamma_2(y)=\varnothing$; **е)** $\Gamma_1=\Gamma_2=\mathrm{R}$, $\Gamma_1(x)=\{x\}$, якщо $x>0$, $\Gamma_1(x)=\mathrm{R}^-$, якщо $x\in\mathrm{R}^-$, аналогічно $\Gamma_2(y)$; **є)** $\Gamma_1=\Gamma_2=\mathrm{R}$, $\Gamma_1(x)=[x-1; x+1]$, $\Gamma_2(y)=[y-1; y+1]$; **ж)** $\Gamma_1=\Gamma_2=\mathrm{R}^+$, $\Gamma_1(x)=[[\sqrt{x}]; [\sqrt{x}]+1)$, $\Gamma_2(y)=[[y]^2; [y+1]^2)$; **з)** $\Gamma_1=[0; 1)$, $\Gamma_2=\mathrm{Z}$, $\Gamma_1(x)=\mathrm{Z}$, якщо $x\in[0; 1)$, інакше $\Gamma_1(x)=\varnothing$, $\Gamma_2(y)=[0; 1)$, якщо $y\in\mathrm{Z}$, інакше $\Gamma_2(y)=\varnothing$; **и)** $\Gamma_1=\Gamma_2=\mathrm{R}$, $\Gamma_1(x)=[x; x+1)$, $\Gamma_2(y)=[y; y+1)$; **і)** $\Gamma_1=\{0; -1; 1\}$, $\Gamma_2=\mathrm{R}$, $\Gamma_1(-1)=(-\infty; 0)$, $\Gamma_1(0)=\{0\}$, $\Gamma_1(1)=(0; +\infty)$, інакше $\Gamma_1(x)=\varnothing$, $\Gamma_2(y)=\{\operatorname{sgn} y\}$; **ї)** $\Gamma_1=\Gamma_2=\mathrm{R}$, $\Gamma_1(x)=\{x+n|n\in\mathrm{Z}\}$, $\Gamma_2(y)=\{y+n|n\in\mathrm{Z}\}$; **й)** $\Gamma_1=[-1; 2)$, $\Gamma_2=\mathrm{Z}$, $\Gamma_1(x)=\{0; -1; -2; ...\}$, якщо $x\in[-1; 0)$, $\Gamma_1(x)=\{0\}$, якщо $x\in[0; 1)$, $\Gamma_1(1)=\{0; 1; 2; ...\}$, $\Gamma_1(x)=\{-1; 0; 1; 2; ...\}$ якщо $x\in(1; 2)$, інакше $\Gamma_1(x)=\varnothing$, $\Gamma_2(y)=[1; 2)$, якщо $y\in\{1; 2; 3; ...\}$, $\Gamma_2(0)=[-1; 2)$, $\Gamma_2(-1)=[-1; 0)\cup(1; 2)$, $\Gamma_2(y)=[-1; 0)$, якщо $y\in\{-2; -3; -4; ...\}$, інакше $\Gamma_2(y)=\varnothing$; **к)** $\Gamma_1=\Gamma_2=\mathrm{R}$, $\Gamma_1(x)=\{x\}$, якщо $x\in[0;1)$, $\Gamma_1(x)=[1-n;\ 2-n)$, якщо $x\in[n;\ n+1)$, $\Gamma_1(x)=[1+n;\ n)$, якщо $x\in[-n;\ -n+1)$, $n\in\mathrm{N}$, $\Gamma_2(y)=[-1;\ 0)\bigcup\{y\}\bigcup[1;\ 2)$, якщо $y\in[0;\ 1)$, $\Gamma_2(y)=[-n-1;\ -n)$, якщо $y\in[n;\ n+1)$, $\Gamma_2(y)=[1+n;\ 2+n)$, якщо $x\in[-n;\ -n+1)$, $n\in\mathrm{N}$; **л)** $\Gamma_1=[0;\ 2)$, $\Gamma_2=\{n;\ n+\frac{1}{2}\mid n\in\mathrm{Z}\}$, $\Gamma_1(x)=\mathrm{Z}$, якщо $x\in[0;\ 1)$, $\Gamma_1(x)=\{n+\frac{1}{2}\mid n\in\mathrm{Z}\}$, якщо $x\in[1;\ 2)$, $\Gamma_2(y)=[0;\ 1)$, якщо $y\in Z$, $\Gamma_2(y)=[1;\ 2)$, якщо $y\in\{n+\frac{1}{2}\mid n\in\mathrm{Z}\}$, інакше $\Gamma_2(y)=\varnothing$; **м)** $\Gamma_1=\Gamma_2=\mathrm{R}$, $\Gamma_1(x)=(-x;+\infty)$, якщо $x>0$, $\Gamma_1(0)=\{0\}$, $\Gamma_1(x)=(-\infty;-x)$, якщо $x<0$, $\Gamma_2(y)=(-\infty;-y)\bigcup(0;\ +\infty)$, якщо $y>0$, $\Gamma_2(0)=\{0\}$, $\Gamma_2(y)=(-\infty;0)\bigcup(-y;\ +\infty)$, якщо $y<0$; **н)** $\Gamma_1=\Gamma_2=[-2;\ 2]$, $\Gamma_1(x)=[|x|-2;\ 2-|x|]$, якщо $x\in[-2;\ 2]$, інакше $\Gamma_1(x)=\varnothing$, аналогічно $\Gamma_2(y)$; **о)** $\Gamma_1=\Gamma_2=\mathrm{R}$, $\Gamma_1(x)=\{x\}$, якщо $x\in\mathrm{Z}$, $\Gamma_1(x)=\{1-x\}$, якщо $x\notin\mathrm{Z}$, аналогічно $\Gamma_2(y)$; **п)** $\Gamma_1=\Gamma_2=(-\infty;\ 1]$, $\Gamma_1(x)=\{1\}$, якщо $x<1$, $\Gamma_1(1)=(-\infty;1]$, інакше $\Gamma_1(x)=\varnothing$, аналогічно $\Gamma_2(y)$; **р)** $\Gamma_1=(-\infty;\ -1]\bigcup[1;\ +\infty)$, $\Gamma_2=[1;\ +\infty)$, $\Gamma_1(x)=\{1\}$, якщо $|x|>1$, $\Gamma_1(x)=[1;\ +\infty)$, якщо $x\in\{-1;\ 1\}$, інакше $\Gamma_1(x)=\varnothing$, $\Gamma_2(y)=\{-1;\ 1\}$, якщо $y>1$, $\Gamma_2(1)=(-\infty;\ -1]\bigcup[1;\ +\infty)$, інакше $\Gamma_2(y)=\varnothing$; **с)** $\Gamma_1=\mathrm{R}^-$, $\Gamma_2=\mathrm{R}$, $\Gamma_1(x)=(-\infty;\ 2-x]$, якщо $x\le 0$, інакше $\Gamma_1(x)=\varnothing$, $\Gamma_2(y)=(-\infty;\ 0]$, якщо $y\le 2$, $\Gamma_2(y)=(-\infty;2-x]$, якщо $y>2$; **т)** $\Gamma_1=[-8;\ 2]$, $\Gamma_2=[-1;\ 9]$, $\Gamma_1(x)=[4-\sqrt{16-x^2-6x};\ 4+\sqrt{16-x^2-6x}]$, якщо $x\in[-8;\ 2]$, інакше $\Gamma_1(x)=\varnothing$, $\Gamma_2(y)=[-3-\sqrt{9-y^2-8y};$ - $-3+\sqrt{9-y^2-8y}\ ]$, якщо $y\in[-1;\ 9]$, інакше $\Gamma_2(y)=\varnothing$.

16. **1)** $\Gamma_1 = \left(\mathrm{R}\setminus\{0\}\right)^2$, $\Gamma_2 = \left((-\infty; -2]\cup[2; +\infty)\right)\times\left(\mathrm{R}\setminus\{0\}\right)$; **2)** $\Gamma_1 = X$, $\Gamma_2 = [9; +\infty)$; **3)** $\Gamma_1 = \left(\mathrm{R}\setminus\{0\}\right)^3$, $\Gamma_2 = [3; +\infty)$; **4)** $\Gamma_1 = \left[-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right]^2$, $\Gamma_2 = \left[\sqrt{5}; \sqrt{10}\right]$; **5)** $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \varnothing$.

17. **1) а)-є)** неможливо; **2) а)-д)** можливо, **е)**, **є)** неможливо; **3) а)** можливо, **б)** неможливо, **в)**, **г)** можливо, **д)–є)** неможливо; **4) а)–д)** можливо, **е)**, **є)** неможливо.

Розділ 3. Функції

18. 1) а) ні; **б)** так; **в)** ні; **г)** так; **д)** ні; **е)-ж)** так; **з)**, **и)** ні; **2) а)** так; **б)–г)** ні; **д)** так; **е)** ні; **є)** так; **ж)** ні; **3) а)** так; **б)** ні; **в)-е)** так; **7)** ні; **ж)**, **з)** так; **4)** (*задача 12*) **1а)-1в)** ні; **1г)** так; **2а-2г)** ні; **3а)**, **3б)** ні; **3в)** так, **3г)** ні; **4а)-4д)** так; **4е)-4н)** ні; **4о)** так; **4п)-4т)** ні.

19. 1) а), б) $D_f = \mathrm{R}$, $E_f = [-1; 1]$; **в)** $D_f = \bigcup\limits_{n\in \mathrm{Z}} [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$, $E_f = [0; 1]$; **г)** $D_f = \bigcup\limits_{n\in \mathrm{Z}} \{\frac{\pi n}{2}\}$, $E_f = \{-1; 0; 1\}$; **д)** $D_f = [-1; 1]$, $E_f = [\cos 1; 1]$; **е)** $D_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $E_f = [-1; 1]$; **є)** $D_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$, $E_f = (0; 1)$; **ж)** $D_f = [0; 2\pi]$, $E_f = [-1; 1]$; **з)** $D_f = [\frac{\pi}{2}; \pi]$, $E_f = [-1; 0]$; **и)** $D_f = \{2\pi n \mid n \in \mathrm{Z}\}$, $E_f = \{0\}$; **2) а)** $D_f = \mathrm{R}$, $E_f = \mathrm{Z}$; **б)** $D_f = E_f = \varnothing$; **в)** $D_f = \mathrm{R}$, $E_f = \mathrm{Z}$; **г)** $D_f = [1; +\infty)$, $E_f = \mathrm{N}$; **д)** $D_f = E_f = \{1; 2; ...; n\}$; **е)** $D_f = (1; +\infty)$, $E_f = \mathrm{N}$; **є)** $D_f = E_f = \mathrm{Z}$; **ж)** $D_f = [0; 2)$, $E_f = \{0; 1\}$; **3) а)** $D_f = E_f = \mathrm{R}$; **б)** $D_f = E_f = [0; 10]$; **в)** $D_f = [10; +\infty)$, $E_f = \mathrm{R}^-$; **г)** $D_f = \mathrm{N}$, $E_f = (-\infty; 9] \bigcap \mathrm{Z}$; **д)** $D_f = E_f = \mathrm{Z}$; **е)** $D_f = E_f = [0; 10]$; **є)** $D_f = E_f = \{1; 2; ...; 10\}$; **ж)** $D_f = E_f = \mathrm{Q}$; **4) а)** $D_f = \mathrm{R}$, $E_f = \mathrm{R}^+$; **б)** $D_f = E_f = \mathrm{R}^+$; **в)** $D_f = \mathrm{R}^-$, $E_f = \mathrm{R}^+$; **г)** $D_f = E_f = \{0\}$; **д), е)** $D_f = \mathrm{Z}$, $E_f = \{n^2, n^3 \mid n \in \mathrm{Z}^+\}$; **5) а)-в)** $D_f = \mathrm{R}^+$, $E_f = [0; 1)$; **г)** $D_f = [0; 1]$, $E_f = [0; 1)$; **д)** $D_f = \mathrm{R}^+ \setminus \mathrm{Z}$, $E_f = [0; 1)$; **е), є)** $D_f = \mathrm{Z}^+$, $E_f = \{0\}$; **ж)** $D_f = \bigcup\limits_{n\in \mathrm{Z}^+} [n; n + \frac{1}{2}]$, $E_f = [0; \frac{1}{2}]$; **з)** $D_f = E_f = (\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$; **и)** $D_f = \{\frac{1}{2} + n \mid n \in \mathrm{Z}^+\}$, $E_f = \{\frac{1}{2}\}$; **6) а)** $D_f = \mathrm{R} \setminus \mathrm{Z}$, $E_f = \mathrm{R} \setminus (-1; 1)$; **б)** $D_f = \{\frac{1}{2} + n \mid n \in \mathrm{Z}\}$,

$E_f=\{-1;1\}$; **в)** $D_f=(-1;0)\bigcup(0;1)$, $E_f=\mathrm{R}\setminus(-1;1)$; **г)** $D_f=\bigcup\limits_{n\in\mathrm{Z}}[\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{10}+2n;\ 2n+1-\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{10}]$, $E_f=[1;10]$; **д)** $D_f=\bigcup\limits_{n\in\mathrm{Z}}(2n;\ 2n+\frac{1}{2})\bigcup(2n+\frac{1}{2};\ 2n+1)$, $E_f=(1;+\infty)$; **е)** $D_f=E_f=\varnothing$; **7)** $D_f=[\frac{1}{6};\frac{5}{6}]$, $E_f=[1;2]$; **є)** $D_f=\bigcup\limits_{n\in\mathrm{Z}}(2n;\ 2n+1)$, $E_f=[1;+\infty)$;

7) а) $D_f=\mathrm{R}$, $E_f=[-1;1]\bigcup\mathrm{N}$; **б)** $D_f=\mathrm{R}^+\bigcup\mathrm{Z}$, $E_f=\mathrm{Z}^+$; **в)** $D_f=[-1;-\frac{1}{2})\bigcup[0;1)$, $E_f=[0;\frac{1}{2})$; **г)** $D_f=[-2;2)$, $E_f=[0;1]$; $E_f=[0;\frac{1}{2})$; **д)** $D_f=[-5;-4]\bigcup[4;5]$, $E_f=[0;1)\bigcup\{4;5\}$; **е)** $D_f=\mathrm{Z}$, $E_f=\mathrm{Z}^+$; **є)** $D_f=\mathrm{Q}$, $E_f=([0;1]\bigcap\mathrm{Q})\bigcup\mathrm{N}$; **ж)** $D_f=\{\frac{3}{2}n \mid n\in\mathrm{Z}\}$, $E_f=\{0;\frac{1}{2}\}\bigcup\mathrm{N}\bigcup\{3n-1 \mid n\in\mathrm{N}\}$; **8) а)** $D_f=\mathrm{R}\setminus\{2n-1 \mid n\in N\}$, $E_f=\mathrm{R}$; **б)** $D_f=(-\infty;0)\bigcup(1:2)$, $E_f=(-\infty;0)$; **в)** $D_f=[-\mathrm{tg}1;\frac{1}{2}]\bigcup[\frac{3}{2}:2]$, $E_f=[-1;1]$; **г)** $D_f=\mathrm{R}^-\bigcup(\bigcup\limits_{n\in\mathrm{N}}(2n-1;\ 2n])$, $E_f=R^-$; **д)** $D_f=(-3;1)\bigcup(1;3)$, $E_f=R$; **е)** $D_f=(-\mathrm{tg}1;0)\bigcup(\bigcup\limits_{n\in\mathrm{N}}(2n-\frac{1}{2};\ 2n))$, $E_f=(-1;0)$; **є)** $D_f=\{2n \mid n\in\mathrm{Z}^+\}$, $E_f=\{0\}$; **ж)** $D_f=\{-\mathrm{tg}1\}\bigcup\{2n \mid n\in\mathrm{Z}^+\}\bigcup\{\frac{1}{2}+n \mid n\in\mathrm{Z}^+\}$, $E_f=\{-1;0;1\}$;

9) а) $D_f=E_f=\mathrm{R}$; **б)** $D_f=E_f=[-2;-\frac{1}{2}]\bigcup[\frac{1}{2};2]\bigcup\Big((-\frac{1}{2};\frac{1}{2})\bigcap(\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q})\Big)$; **в)** $D_f=\big((-1;+\infty)\bigcap\mathrm{Q}\big)\bigcup\{\frac{1}{\sqrt{2}}\}$, $E_f=\big((-1;+\infty)\bigcap\mathrm{Q}\big)\bigcup\{\sqrt{2}\}$; **г)** $D_f=E_f=[-1;1]\bigcap\mathrm{Q}$; **д)**, **е)** $D_f=E_f=\mathrm{Q}$; **є)** $D_f=E_f=\varnothing$; **ж)** $D_f=E_f=[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]\bigcap\mathrm{Q}$; **з)** $D_f=\big((0;1)\bigcap\mathrm{Q}\big)\bigcup\big((1;+\infty)\bigcap(\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q})\big)$, $E_f=(0;1)$; **и)** $D_f=\big((-2;-1)\bigcap(\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q})\big)\bigcup\big((-1;-\frac{1}{4})\bigcap\mathrm{Q})\big)$, $E_f=(0;1)$; **10) а)** $D_f=\mathrm{R}$, $E_f=[-2;+\infty)$; **б)** $D_f=\mathrm{Z}$, $E_f=\mathrm{Z}\bigcup\{-2;-1\}$; **в)** $D_f=(0;1]\bigcup\{-1\}$, $E_f=\{-1;0;1\}$;

г) $D_f=[-2;2]$, $E_f=[-2;0]\bigcup\{1\}$; **д)** $D_f=\mathrm{Q}$, $E_f=[-2;+\infty]\bigcap\mathrm{Q}$; **е)** $D_f=\mathrm{R}^+\bigcup\mathrm{Q}^-$, $E_f=[-2;+\infty]\bigcap\mathrm{Q}$; **є)** $D_f=\mathrm{R}\backslash\mathrm{Q}$, $E_f=[-2;+\infty]\bigcap(\mathrm{R}\backslash\mathrm{Q})\bigcup\{0\}$; **ж)** $D_f=[0;\frac{1}{2}]\bigcap(\mathrm{R}\backslash\mathrm{Q})$, $E_f=\{0\}$; **з)** $D_f=(-3;-1)\bigcup\big((0;4)\bigcap(\mathrm{R}\backslash\mathrm{Q})\big)$, $E_f=(-1;1)$; **и)** $D_f=\mathrm{R}^+\bigcup\{-4;-3;-2;-1\}$, $E_f=\{-2;-1;0;1;2\}$; **11) а)** $D_f=\mathrm{R}$, $E_f=\{-1;0;1\}\bigcup[\frac{\pi}{2};\pi)$; **б)**, **в)** $D_f=(0;1]$, $E_f=\{0;1\}$; **г)** $D_f=E_f=\varnothing$, **д)** $D_f=\{\mathrm{ctg}2;\mathrm{ctg}3\}\bigcup(0;+\infty)$, $E_f=\{-1;0;1;2;3\}$; **е)** $D_f=(-3;3]$, $E_f=\{-1;0;1\}\bigcup[\frac{\pi}{2};\mathrm{arcctg}(-3)]$; **є)** $D_f=\{2n|\,n\in\mathrm{N}\}$, $E_f=\{0\}$; **ж)** $D_f=\overline{(}-\infty;2]$, $E_f=[\frac{\pi}{2};\pi)\bigcup\{0;1\}$; **з)** $D_f=\overline{(}-\infty;2]$, $E_f=[\frac{\pi}{2};\pi)\bigcup\{0;1\}$; **12) а)** $D_f=\mathrm{R}\backslash\Big(\{0\}\bigcup\{\frac{2n-1}{2}\pi|\,n\in\mathrm{N}\}\Big)$, $E_f=(-\infty;\frac{\pi}{2})$; **б)** $D_f=(-\infty;-1]\bigcup\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\pi n-1;\pi n+1\}\right)$, $E_f=[-1;1]$; **в)** $D_f=\{\pi n;\pi n+1;\pi n-1|\,n\in\mathrm{N}\}$, $E_f=\{-1;0;1\}$; **г)** $D_f=\mathrm{Q}\backslash\{0\}$, $E_f=\mathrm{Q}\bigcap(-\infty;\frac{\pi}{2})$; **д)** $D_f=(-\infty;-1)\bigcup(0;\frac{\pi}{2})\bigcup\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\pi n-1;\frac{3}{2}\pi n)\right)$, $E_f=(-1;\frac{\pi}{2})$; **е)** $D_f=(-\infty;0)\bigcup\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(\pi n+\frac{\pi}{2};\pi n+\pi)\right)$, $E_f=(-\infty;0]$;

13) а) $D_f=E_f=\exp(\mathrm{R})$; **б)** $D_f=E_f=\exp(\mathrm{R}^+)$;
в) $D_f=\{(0;+\infty),[0;+\infty)\}$, $E_f=\{(-\infty;0),(-\infty;0]\}$;
г) $D_f=\{(0;+\infty)\bigcup M|\,M\subset(-\infty;0]\}$, $E_f=\exp(\mathrm{R}^-)$; **14) а)** $D_f=\mathrm{R}$, $E_f=\{0;1\}$; **б)** $D_f=\mathrm{Z}$, $E_f=\{1\}$; **в)** $D_f=\mathrm{R}$, $E_f=\{1\}$;
г) $D_f=\mathrm{R}$, $E_f=\{0;1\}$.

20. **1) а)** "в"; **б)** "на"; **в)**, **г)** жодного типу; **д)**, **е)** "в"; **є)** жодного типу; **ж)** "на"; **з)**, **и)** жодного типу; **2) а)** "в"; **б)** жодного типу; **в)** "на"; **г)-е)** жодного типу; **є)** бієкція;

ж) жодного типу; **3) а)** бієкція; **б)**, **в)** жодного типу; **г)** "в"; **д)**, **е)** бієкція; **є)** "в"; **ж)** жодного типу; **4) а)** "в"; **б)**, **в)** бієкція; **г)** жодного типу; **д)**, **е)** "в"; **5) а)** жодного типу; **б)-г)** "в"; **д)-и)** жодного типу; **6) а)-и)** жодного типу; **7) а)** "в"; **б)-г)** жодного типу; **д)-ж)** "в"; **8) а)-и)** жодного типу; **9) а)** бієкція; **б)-д)** жодного типу; **е)** "в"; **є)**, **ж)** жодного типу; **10) а)-в)** жодного типу; **г)** бієкція; **д)** "в"; **е)-и)** жодного типу; **11) а)** "в"; **б)-ж)** жодного типу; **12) а)-е)** жодного типу; **13) а)** бієкція; **б)-г)** жодного типу; **14) а)** "в"; **б)** жодного типу; **в)**, **г)** жодного типу.

21. 1) а) ін'єкція, існує; **б)** не ін'єкція, не існує; **в)** ін'єкція, існує; **г)** не ін'єкція, не існує; **д)** ін'єкція, існує; **е)** не ін'єкція, не існує; **2) а)-г)** не ін'єкція, не існує; **д)**, **е)** ін'єкція, існує; **3) а)** ін'єкція, існує; **б)** не ін'єкція, не існує; **в)** ін'єкція, існує; **г)**, **д)** не ін'єкція, не існує; **е)** ін'єкція, існує; **4) а)** ін'єкція, існує; **б)**, **в)** не ін'єкція, не існує; **г)** не існує звуження; **д)**, **е)** ін'єкція, існує; **є)**, **ж)** не існує звуження; **з)** ін'єкція, існує; **5) а)-в)** не ін'єкція, не існує; **г)**, **д)** ін'єкція, існує; **е)** ін'єкція, існує; **6) а)** ін'єкція, існує; **б)** не ін'єкція, не існує; **в)**, **г)** ін'єкція, існує; **д)** не ін'єкція, не існує; **е)** ін'єкція, існує; **7) а)** не ін'єкція, не існує; **б)** ін'єкція, існує; **в)** не ін'єкція, не існує; **г)** ін'єкція, існує; **8) а)-в)** ін'єкція, існує; **г)** не ін'єкція, не існує.

22. 1) а) не вірно; **б)** вірно; **2) а)** не вірно; **б)** вірно; **в)** не вірно; **3) а)** вірно; **б)** не вірно; **в)** вірно; **4) а)** не вірно; **б)** не вірно; **5) а)** вірно; **б)-г)** не вірно; **д)** вірно; **6) а)**, **б)** вірно.

24. 1) а), **б)** $(-\infty;4]$; **в)** $[3;4]$; **г)** $(0;4]$; **д)** $(0;3)$; **е)** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$; **є)** $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$; **ж)** $(-2;-1)\cup(1;2)$; **з)**, **и)** не визначений; **і)** $(-2;0)\cup(0;2)$; **ї)** $\{-2;2\}$; **2) а)** $\{1;2;...;8\}$; **б)** $\{2;3;...;8\}$; **в)** $\{1;2;...;5\}$; **г)** $\{1\}$; **д)** $\{2;3;5;7\}$; **е)** $\{4;9\}$; **7)** $\{4;6;8;9;10;11\}$; **є)** не визначений; **3) а)** $(-1;1)$; **б)** $(0;1]$; **в)** $\{-1;1\}$; **г)** $[-1;1]$; **д)** $R\setminus\{\pi n|\ n\in Z\}$; **е)** $\bigcup\limits_{n\in Z}\Big((-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\cup(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n)\Big)$; **є)** не визначений; **є)** $\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n|\ n\in Z\}$; **ж)** $\{\frac{\pi n}{2}|\ n\in Z\}$; **4) а)** Z^+; **б)**, **в)** Z; **г)** $\{0;1\}$; **д)** $[1;2)$; **е)** $[1;+\infty)$; **є)** $(-\infty;1)$; **ж)** не визначений;

з) $(-\infty;0)\bigcup[1;+\infty)$; **5) а)** $[0;1)$; **б)** не визначений; **в)** $(0;1)$; **г)** $\{0\}$; **д)** Z^+; **е)** не визначений; **є)** $\bigcup\limits_{n\in Z^+}[n;n+\frac{1}{2}]$; **ж)** $R^+\setminus Z$; **з)** $\{\frac{1}{4}+n|\,n\in Z^+\}$; **6) а)** Z^+; **б)** $[0;1]$; **в)** $[0;1]\bigcup\{2;3\}$; **г)** $\{0;4;5\}$; **д)** $(0;1)\bigcup\{5\}$; **е)** $\{-\frac{1}{2}-n|\,n\in Z^+\}$; **є)** $(-\infty;2)$; **ж)** не визначений; **з)** $\bigcup\limits_{n\in Z^+}(-\frac{2}{3}-n;-\frac{1}{3}-n)$; **и)** не визначений; **і)** $R^+\setminus Z$; **7) а)** не визначений; **б)** $(-\frac{\pi}{2};0]$; **в)** $(-\frac{\pi}{2};+\infty)$; **г)** R; **5)** $\{2n\,|\,n\in Z^+\}$; **д)** $(-1;\frac{2}{\pi})\bigcup\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}+2n;\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}+2n)\right)$; **е)** $\{\frac{1}{2}+2n\,|\,n\in Z^+\}$; **є)** $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}+2n;\frac{2}{3}+2n)$; **ж)** $(-\infty;0]\bigcup\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}(1+2n;2+2n)\right)$; **8) а)** не визначений; **б), в)** P – множина простих чисел; **г)** $\{19;20;21;22\}$; **д)** не визначений; **е)** $\{7;8;9;...;18\}$.

25. 1) а), б) не оборотне; **в), г)** $x=\operatorname{arctg}y,\ y\in R$; **д)** не оборотне; **е)** $x=\begin{cases}\operatorname{arctg}y, & y>0,\\ \operatorname{arctg}y+\pi, & y<0,\end{cases}$ **є), ж)** $x=\operatorname{arctg}y,\ y\geq 0$; **з)** не оборотне; **и)** $x=\operatorname{arctg}y,\ y\in Z$; **2) а), б)** не оборотне; **в), г)** $x=y,\ y\in[0;1)$; **д)** $x=\begin{cases}y, & y\in(0;1),\\ 0, & y=1,\end{cases}$ **е)** $x=\begin{cases}y+1, & y\in(0;\frac{1}{2}),\\ \frac{1}{2}, & y=\frac{1}{2},\end{cases}$ **є)** $x=y=0$, **ж)** не оборотне; **3) а)** не оборотне; **б)** $x=\sqrt{y},\ y\in R^+$; **в)** не оборотне; **г)** $x=\sqrt{y},\ y\in\{n^2|n\in N\}$; **д)** $x=\begin{cases}\sqrt{y}, & y\in(4;9),\\ -\sqrt{y}, & y\in(0;1),\end{cases}$ **е)** $x=\sqrt{y},\ y\in[10;11]$; **4) а)** не оборотне; **б), в)** $x=-y,\ y\in(0;+\infty)$; **г)-е)** не оборотне; **є)** $x=y+1,\ y\in N$;

ж) не оборотне; **з)** $x=y+1,\ y>0$; **5) а)**, **б)** не оборотне; **в)** $x=y,\ y\in Z$; **г)** $x=y-\frac{1}{2},\ y\in N$; **6) а)** не оборотне; **б)** $x=\arcsin y,\ y\in[-1;\,1]$; **в)** не оборотне; **г)** $x=\arcsin y,\ y\in[0;\,\sin 1]$; **7) а)** $x=\operatorname{tg} y,\ y\in(-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2})$; **б)** $x=\operatorname{tg} y,\ y\in[0;\,\frac{\pi}{4}]$; **в)** $x=\operatorname{tg} y,\ y\in(0;\,\frac{\pi}{2})$;

8) а) $x=\begin{cases} y, & y\in R\setminus Q, \\ -y, & y\in Q, \end{cases}$; **б)** $x=-y,\ y\in Q$; **в)** $x=y,\ y\in R\setminus Q$;

г) $x=\begin{cases} y, & y\in R\setminus Q\bigcap[-1;\,1], \\ -y, & y\in Q\bigcap[-1;\,1], \end{cases}$ **д)** $x=y,\ y\in R\setminus Q\bigcap[0;\,1]$;

е) $x=\begin{cases} y, & y\in R\setminus Q\bigcap[-1;\,2], \\ -y, & y\in Q\bigcap[-1;\,1], \end{cases}$ **9) а)** $x=2y-2,\ y\in R$;

б) $x=-y,\ y\in[0;\,5]$; **10) а)** $x=\frac{2-3y}{y+1},\ y\in R$; **б)** $x=\frac{2-3y}{y+1},\ y<-1$;

11) а) $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}\,),\ y\in R$; **б)** $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}\,),\ y\in R^+$;

12) а) не оборотне; **б)** $x=\sqrt{y},\ y\in[1;\,2]$; **в)** $x=\begin{cases} \sqrt{y}, & 0\le y\le 16, \\ \log_2 y, & y>16, \end{cases}$

г) $x=y,\ y<-1$; **д)** $x=\begin{cases} y, & y<-1, \\ -\sqrt{y}, & -1\le y\le 0, \end{cases}$; **е)** не оборотне;

13) а) $x=\frac{y+1}{y-1},\ y\in R$; **б)** не оборотне; **в)** $x=y^2-1,\ y\ge 0$;

г) $x=\begin{cases} \sqrt{y}, & y\ge 0, \\ -\sqrt{-y}, & y<0, \end{cases}$; **д)** не оборотне; **е)** $x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y},\ y\in R$.

26. 1) а) $D_h=R\setminus\{0\}$, $E_h=\{-1;\,1\}$; **б)** $D_h=R$, $E_h=\{1\}$; **в)** $D_h=R$, $E_h=\{-1;\,0;\,1\}$; **2) а)** $D_h=R$, $E_h=\{1;\,2\}$; **б)** $D_h=R$, $E_h=\{0\}$; **в)** $D_h=R$, $E_h=\{-1;\,1\}$; **3)** $D_h=E_h=R$; **4)** $D_h=E_h=(0;+\infty)$; **5)** $D_h=E_h=[-1;\,1]$; **6)** $D_h=E_h=[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}]$; **7)** $D_h=E_h=R$; **8)** $D_h=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi n\mid n\in Z\}$, $E_h=(-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2})$; **9)** $D_h=R$, $E_h=\{-1;\,0;\,1\}$; **10)** $D_h=(-1;\,1]$, $E_h=[0;\,+\infty)$; **11), 12)** $D_h=R$, $E_h=R^+$; **13)** $D_h=E_h=R$.

27. **1) а)**, **б)** ні; **в)** так; **2)** ні; **2) а)-г)** ні; **д)** так; **3) а)-г)** ні; **д)** так; **е)**, **є)** ні; **4) а)-в)** ні; **4)** **5) а)-в)** так; **г)** ні; **6) а)** так; **б)** ні; **7) а)**, **б)** так; **в)** ні; **г)** так; **8) а)**, **б)** так; **в)**, **г)** ні; **9)** так; **10)** ні.

28. **1) а)** $X_1 = Y_1 = \{0\}$; **б)** не існує; **в)** $X_1 = [-1;\ 1]$, $Y_1 = [0;\ 1]$; **г)** $X_1 = (-2;\ 0)$, $Y_1 = (0;\ 2)$; **2) а)** $X_1 = Y_1 = \mathrm{R}^+$; **б)** $X_1 = Y_1 = \{-1\}$; **в)** $X_1 = \mathrm{R}$, $Y_1 = \mathrm{R}^+$; **г)** $X_1 = Y_1 = [0;\ 1]$; **д)** $X_1 = Y_1 = [2;\ 3]$; **3) а)**, **б)** $X_1 = Y_1 = \mathrm{R}$; **4) а)** $X_1 = [0;\ +\infty)$, $Y_1 = [1;\ +\infty)$; **б)** $X_1 = [-2;\ +\infty)$, $Y_1 = (-\infty;\ -1]$; **в)** $X_1 = [-1;\ +\infty)$, $Y_1 = [1;\ +\infty)$; **г)** $X_1 = [-1;\ 0]$, $Y_1 = [0;\ 1]$; **5) а)** $X_1 = Y_1 = \{0\}$; **б)** $X_1 = Y_1 = [0;\ 1]$; **в)** $X_1 = Y_1 = [0;\ 2]$; **г)** $X_1 = Y_1 = [1;\ 4]$; **6) а)** $X_1 = Y_1 = [-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$; **б)** $X_1 = Y_1 = [0;\ \frac{\pi}{2}]$; **в)** $X_1 = Y_1 = [-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$; **г)** $X_1 = [0; \frac{\pi}{2}]$, $Y_1 = [-\frac{\pi}{2}; 0]$; **7) а)** $X_1 = Y_1 = [0;\ 1]$; **б)** $X_1 = Y_1 = [-2;\ 0]$.

29. 1) а) $y = f(x) = \frac{7}{2}\pi - x$, $x \in [\pi;\ 2\pi]$; **б)** $y = f(x) = x - \frac{1}{2}\pi$, $x \in [\pi;\ 2\pi]$; **2)** $y = f(x) = \frac{13}{2}\pi - x$, $x \in [\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}]$; **3)** $y = f(x) = 4 - \sqrt{16 + 6x - x^2}$, $x \in [-2;\ 8]$; **4)** $y = f(x) = 1$, $x \in (1;\ +\infty)$.

Розділ 4. Упорядковані простори

30. 1) а) ні; **б)** так; **в)** ні; **г)** так; **д), е)** ні, **є), ж)** так; **2) а)-в)** так; **г)** ні; **3) а), б)** ні; **в)-д)** так; **4) 1) б)** так; **г)** так; **є), ж)** так; **2) а)-в)** ні; **3)** ; **в),г)** так; **д)** ні.

31. 1) а) ЛУП; **б)** ні; **в)** ЧУП, 1 та 2; **г)** ЛУП; **д), е)** ні; **2) а)** ні; **б)** ЧУП, $(0;1)$ та $(1;0)$; **в)** ЧУП, $(0;1)$ та $(1;2)$; **г)** ні; **д)** ЛУП; е)–з) ні; **3) а)** ЧУП, 2 та 3; **б)** ні; **в)** ЧУП, 24 та 42; **г)** ні; **д)** ЧУП, 10 та 12; **4) а), б)** ні; **в)** ЛУП; **5) а)** ЧУП, $a, b: \exists x \in a \setminus b$ та $\exists y \in b \setminus a$; **б)** ЧУП, $a \neq b$; **в), г)** ні; **6) а)-г)** ні; **7) а)** ЧУП, $(1, 3)$ та $(2, 4)$; **б), в)** ЛУП.

32. I, II – обмежені зверху, знизу, III, IV – $x_{\max}$, $x_{\min}$ (не існує), V, VI – мажоранта, міноранта, VII, VIII – супремум, інфімум.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1 а)	Так	Так	–	–	1	-1	1	0
1 б)	Так	Так	–	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
1 в)	Так	Так	$\frac{1}{4}$	–	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
1 г)	Так	Так	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1 д)	Так	Так	–	-1	1	-1	1	-1
1 е)	Так	Так	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1 є)	Так	Так	1	–	1	$-\frac{1}{2}$	1	0
1 ж)	Так	Так	1	-1	1	-1	1	-1
1 з)	Так	Так	–	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
1 и)	Так	Так	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
1 і)	Так	Так	–	–	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
2 а)	Так	Ні	1	–	$\frac{3}{2}$	–	1	–

2 б)	Так	Так	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
2 в)	Так	Ні	1	–	$\frac{3}{2}$	–	1	–
2 г)	Так	Так	–	–	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
2 д)	Так	Так	–	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{1}{10}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
2 е)	Так	Так	–	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
2 є)	Ні	Так	–	1	–	1	–	1
2 ж)	Так	Так	1	1	1	1	1	1
3 а)	Ні	Так	–	–	–	0	–	0
3 б)	Ні	Так	–	1	–	0	–	1
3 в)	Так	Так	1	–	1	0	1	0
3 г)	Ні	Так	–	1	–	1	–	1
3 д)	Так	Так	4	–	5	1	4	1
3 е)	Так	Так	–	–	11	0	10	0
3 є)	Так	Так	10	5	11	5	10	5
3 ж)	Так	Так	3	–	11	1	3	2
3 з)	Так	Так	6	0	11	0	6	0
4 а)	Так	Ні	0	–	1	–	0	–
4 б)	Так	Так	–	–	5	-4	–	–
4 в)	Так	Ні	–	–	2	–	–	–
5 а)	Так	Так	–	1	$10!$	1	2520	1
5 б)	Ні	Так	–	1	–	1	–	1
5 в)	Ні	Так	–	6	–	1	–	6
5 г)	Так	Так	16	2	32	1	16	2
5 д)	Так	Так	$2^5 \cdot 5^{10}$	1	10^{10}	1	$2^5 \cdot 5^{10}$	1
5 е)	Так	Так	–	–	720	1	60	1
5 є)	Ні	Так	–	–	–	1	–	1
6 а)	Так	Так	X	X	X	X	X	X
6 б)	Так	Так	–	–	A	$\varnothing$	B	$\varnothing$
6 в)	Так	Так	A	$\{1\}$	A	$\{1\}$	A	$\{1\}$
6 г)	Так	Так	C	D	B	$\{1\}$	C	D

6 д)	Так	Так	$\{5;\ 6;\ 7\}$	$\{6\}$	B	$\varnothing$	$\{5;6;7\}$	$\{6\}$
6 е)	Так	Так	A	$\varnothing$	A	$\varnothing$	A	$\varnothing$
де $A=\{1;\ 2;\ \ldots;10\}$, $B=\{1;\ 2;\ \ldots;\ 9\}$; $C=\{4;\ 5;\ 6\}$; $D=\{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$								
7 а)	Так	Так	$(1;\ 4)$	$(0;\ 3)$	$(4;\ 4)$	$(0;\ 0)$	$(1;\ 4)$	$(0;\ 3)$
7 б)	Так	Так	–	–	$(4;\ 4)$	$(0;\ 0)$	$(1;\ 4)$	$(0;\ 3)$
7 в)	Так	Так	–	$(0;\ 3)$	$(4;\ 4)$	$(0;\ 0)$	$(1;\ 4)$	$(0;\ 3)$
7 г)	Так	Так	–	–	$(2;\ 2)$	$(0;\ 0)$	$(2;\ 2)$	$(1;\ 1)$
7 д)	Так	Так	–	$(0;\ 0)$	$(9;\ 9)$	$(0;\ 0)$	$(3;\ 8)$	$(0;\ 0)$
8 а)	Так	Так	$(2;\ 6)$	$(0;\ 3)$	$(2;\ 6)$	$(0;\ 0)$	$(2;\ 6)$	$(0;\ 3)$
8 б)	Так	Так	–	–	$(2;\ 6)$	$(0;\ 0)$	$(2;\ 6)$	$(0;\ 3)$
8 в)	Так	Так	$(1;\ 0)$	$(0;\ 0)$	$(1;\ 1)$	$(0;\ 0)$	$(1;\ 0)$	$(0;\ 0)$
8 г)	Так	Так	$(2;\ 0)$	$(-2;\ 0)$	$(2;\ 2)$	$(-2;-2)$	$(2;\ 0)$	$(-2;0)$
8 д)	Так	Так	$(2;\ 0)$	$(-2;\ 0)$	$(2;\ 2)$	$(-2;-2)$	$(2;\ 0)$	$(-2;0)$
8 е)	Ні	Так	–	–	–	–	–	–
9 а)	Так	Ні	$[1;+\infty)$	–	$[0;+\infty)$	–	$[1;+\infty)$	–
9 б)	Так	Так	–	$[1;+\infty)$	$[0;+\infty)$	$[2;+\infty)$	$[0;+\infty)$	$[1;+\infty)$
9 в)	Ні	Ні	–	–	–	–	–	–
10 а)	Так	Так	–	–	2	0	$\sqrt{3}$	0
10 б)	порожня множина							
10 в)	Так	Так	–	–	2	–2	1	$\frac{1}{9}$
10 г)	Так	Так	$\frac{1}{3}$	–	1	0	$\frac{1}{3}$	0
10 д)	Ні	Так	–	$\frac{1}{2}$	–	0	$+\infty$	$\frac{1}{2}$
10 е)	Так	Так	1	0	1	0	1	0
10 є)	Так	Так	1	–	1	-1	1	-1
10 ж)	Так	Так	–	–	1	-1	1	-1
10 з)	Так	Так	1	1	1	1	1	1
10 и)	Так	Так	1	–	1	-1	1	-1
10 і)	Так	так	–	$4\sqrt{2}$	10	1	2π	$4\sqrt{2}$
10 ї)	Так	так	$6\sqrt{3}$	–	20	1	$6\sqrt{3}$	2π

33. 1) а)-в) повний; **г)**, **д)** неповний; **е)** повний; **є)** неповний; **2) а)-в)** повний; **г)**, **д)** це невпорядкований простір.

34. У відповіді наводимо множину $[p, q]$, з якої відкиданням відповідних точок q чи/та p отримуємо множини $[p, q)$, $(p, q]$, (p, q), так само наводимо множини $(-\infty, q]$ та $[p, +\infty)$, з яких не важко отримати множини $(-\infty, q)$ та $(p, +\infty)$.

1) а) $[p, q] = \{x \in \mathrm{R} \mid \frac{1}{4} \le x \le \frac{4}{5}\}$, $(-\infty, q] = \{x \in \mathrm{R} \mid x \le \frac{4}{5}\}$, $[p, +\infty) = \{x \in \mathrm{R} \mid x \ge \frac{1}{4}\}$; **б)** $[p, q] = \{x \in \mathrm{R} \mid \frac{1}{4} \le x \le \frac{4}{5}\}$, $(-\infty, q] = \{x \in \mathrm{R} \mid 0 \le x \le \frac{4}{5}\}$, $[p, +\infty) = \{x \in \mathrm{R} \mid \frac{1}{4} \le x \le 1\}$;

в) $[p, q] = \{x \in \mathrm{R} \mid \frac{1}{4} \le x \le \frac{4}{5}\}$, $(-\infty, q] = \{x \in \mathrm{R} \mid 0 < x \le \frac{4}{5}\}$, $[p, +\infty) = \{x \in \mathrm{R} \mid \frac{1}{4} \le x < 1\}$; **2) а)** $[p, q] = \{4; 8; 16; 32\}$, $(-\infty, q] = \{1; 2\}$, $[p; +\infty) = \{2^n \mid n \in \mathrm{N} \wedge n \ge 6\}$;

б) $[p, q] = \{4; 8; 16; 32\}$, $(-\infty, q] = \{2\}$, $[p; +\infty) = \{2^6; 2^7; 2^8; 2^9; 2^{10}\}$;

3) а) $[p, q] = \{1\} \times [3; +\infty) \bigcup (0; 1) \times \mathrm{R} \bigcup \{2\} \times (-\infty; 4]$,
$(-\infty, q] = (-\infty; 2) \times \mathrm{R} \bigcup \{2\} \times (-\infty; 4]$;
$[p, +\infty) = \{1\} \times [3; +\infty) \bigcup (1; +\infty) \times \mathrm{R}$;

3) б) $[p, q] = \{1\} \times [3; 9] \bigcup (0; 1) \times [0; 7] \bigcup \{2\} \times [0; 4]$,
$(-\infty, q] = [0; 2) \times [0; 7] \bigcup \{2\} \times [0; 4]$;
$[p, +\infty) = \{1\} \times [3; 7] \bigcup (1; 9] \times [0; 7]$.

36. 1) а) відкрита та замкнена, $\mathrm{int} X = \mathrm{cl} X = X$, $O(4) = \{2; 4; 8\}$, $O(128) = \{32; 64; 128; 256\}$; **б)** відкрита та замкнена, $\mathrm{int} X = \mathrm{cl} X = X$, $O(1) = \{1; 2\}$, $O(2) = \{2\}$; **2) а)** замкнена, $\mathrm{int} X = (0; 4) \times (2; 9)$, $\mathrm{cl} X = X$, $O\big((0;2)\big) = (-1; 2) \times (1; 3)$, $O\big((1; 3)\big) = (0; 2) \times (2; 4)$; **б)** відкрита, $\mathrm{int} X = X$, $\mathrm{cl} X = [-1; 1] \times \mathrm{R}$, $O\big((0;2)\big) = (-1; 2) \times (1; 3)$, $O\big((1; 3)\big) = (0; 2) \times (2; 4)$;

Розділ 5. Властивості дійсної осі

37. 1)-5) а) окіл $0, \frac{1}{2}, -\infty$; $\mathrm{cl}\,A = A$, $\mathrm{int}\,A = (-\infty; 1)$; замкнена; не скрізь щільна та ніде не щільна; **б)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A = A$, $\mathrm{int}\,A = \varnothing$; замкнена; ніде не щільна; **в)** окіл $\frac{1}{2}$; $\mathrm{cl}\,A = A$, $\mathrm{int}\,A = (0; 1)$; замкнена; не скрізь щільна та ніде не щільна; **г)** окіл $\frac{1}{2}, 1$; $\mathrm{cl}\,A = [0; \frac{3}{2}]$, $\mathrm{int}\,A = (0; \frac{3}{2})$; не замкнена, не відкрита; не скрізь щільна та ніде не щільна; **д)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A = \mathrm{R}$; $\mathrm{int}\,A = \varnothing$; не замкнена, не відкрита; скрізь щільна; **е)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A = \mathrm{R}$, $\mathrm{int}\,A = \varnothing$; не замкнена, не відкрита; скрізь щільна; **є)** окіл $1, +\infty$; $\mathrm{cl}\,A = [\frac{1}{2}; +\infty)$, $\mathrm{int}\,A = A$; відкрита; не скрізь щільна, не ніде не щільна; **ж)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A = A \bigcup \{0\}$, $\mathrm{int}\,A = \varnothing$; не замкнена, не відкрита; ніде не щільна; **з)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A = A \bigcup \{0\}$, $\mathrm{int}\,A = \varnothing$; не замкнена, не відкрита; ніде не щільна; **и)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A = A \bigcup \{0\}$, $\mathrm{int}\,A = A \setminus \{0\}$; не замкнена, не відкрита; не скрізь щільна, не ніде не щільна; **і)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A = A$, $\mathrm{int}\,A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (2n-1; 2n)$; замкнена; не скрізь щільна, не ніде не щільна; **ї)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A = \mathrm{int}\,A = A$; замкнена та відкрита, ніде не щільна; **й)** окіл $0, \frac{1}{2}, 1$; $\mathrm{cl}\,A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} [n - \frac{1}{3^n}; n+1+\frac{1}{4^n}]$, $\mathrm{int}\,A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{3^n}; n+1+\frac{1}{4^n})$; не замкнена; не відкрита; не скрізь щільна, не ніде не щільна; **к)** окіл $0, 1, -\infty, +\infty$; $\mathrm{cl}\,A = \mathrm{R}$, $\mathrm{int}\,A = A \setminus \{\frac{1}{2}\}$; не замкнена, не відкрита; скрізь щільна; **л)** окіл $\frac{1}{2}$; $\mathrm{cl}\,A = A$, $\mathrm{int}\,A = (0; 1)$;

замкнена; не скрізь щільна, не ніде не щільна; **м)** окіл $\frac{1}{2}, 1, +\infty$; $\mathrm{cl}\,A=A$, $\mathrm{int}\,A=(0;+\infty)$; замкнена; не скрізь щільна, не ніде не щільна; **н)** окіл $\frac{1}{2}, -\infty$; $\mathrm{cl}\,A=\mathrm{R}$, $\mathrm{int}\,A=A$; відкрита; скрізь щільна; **о)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A=\mathrm{R}$, $\mathrm{int}\,A=\mathrm{R}^{-}\setminus\mathrm{Z}$; не замкнена, не відкрита; скрізь щільна; **п)** окіл $0, \frac{1}{2}, 1$; $\mathrm{cl}\,A=\mathrm{R}$, $\mathrm{int}\,A=A$; відкрита; скрізь щільна; **р)** окіл $0, \frac{1}{2}, 1, -\infty, +\infty$; $\mathrm{cl}\,A=\mathrm{int}\,A=\mathrm{R}$; замкнена та відкрита; не скрізь щільна, не ніде не щільна; **с)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{2n-2}{2n-1};\frac{2n-1}{2n}]\bigcup\{1\}$, $\mathrm{int}\,A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{2n-2}{2n-1};\frac{2n-1}{2n})$; не замкнена, не відкрита; не скрізь щільна, не ніде не щільна; **т)** окіл $0, \frac{1}{2}, 1$; $\mathrm{cl}\,A=[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}]$, $\mathrm{int}\,A=(-\frac{3}{2};\frac{3}{2})$; не замкнена, не відкрита; не скрізь щільна, не ніде не щільна; **у)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A=\mathrm{R}$, $\mathrm{int}\,A=\varnothing$; не замкнена, не відкрита; скрізь щільна; **ф)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A=A$, $\mathrm{int}\,A=\varnothing$; замкнена, ніде не щільна; **х)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A=[-1;1]$, $\mathrm{int}\,A=\varnothing$; не замкнена, не відкрита; не скрізь щільна, не ніде не щільна; **ц)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A=[0;1]$, $\mathrm{int}\,A=\varnothing$; не замкнена, не відкрита; не скрізь щільна, не ніде не щільна; **ч)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A=\mathrm{R}$, $\mathrm{int}\,A=\varnothing$; не замкнена, не відкрита; скрізь щільна; **ш)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A=A\bigcup\{\frac{\pi}{2}\}$, $\mathrm{int}\,A=\varnothing$; не замкнена, не відкрита; не скрізь щільна, не ніде не щільна; **щ)** окіл $0, \frac{1}{2}, 1$; $\mathrm{cl}\,A=[-1;1]$, $\mathrm{int}\,A=(-1;1)$; не замкнена, не відкрита; не скрізь щільна, не ніде не щільна; **ю)** не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A=A$, $\mathrm{int}\,A=\varnothing$; замкнена; ніде не щільна; **я)** (видаляємо 5-й проміжок) не є околом жодної точки; $\mathrm{cl}\,A=\mathrm{R}$, $\mathrm{int}\,A=A$; відкрита; скрізь щільна.

38. 1) а) K_{10}: у для десятковій системі числення на n-му кроці викидаються проміжки $(0,a_1...a_{n-1}5;\ 0,b_1...b_{n-1}6)$, де серед цифр $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ немає цифр 5, K_3: у трійковій системі числення на n-му кроці викидаються проміжки $(0,a_1...a_{n-1}1;\ 0,b_1...b_{n-1}2)$, де серед цифр $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ немає цифр 1; **2) а), б)** обом; **в)** K_{10}; **г)** жодному; **д), е)** K_{10}; **є)** обом; **ж), з)** жодному; **3) а)** 1; **б)** $a = 0,a_1...a_{n-1}a_n 99...9 a_m a_{m+1}...$, $b=0,a_1..a_{n-1}b_n b_{n+1}..b_m b_{m+1}...$, $a_n < b_n$, $a_m < 9$, $\alpha = 0,\underbrace{a_1..a_{n-1}a_n 99..99}_{m\ цифр}500..$,

$\beta = 0,\underbrace{a_1...a_{n-1}a_n 99...99}_{m\ цифр}600...$; **в)** $a = 0,a_1...a_{n-1}a_n 22...2 a_m a_{m+1}...$,

$b=0,a_1..a_{n-1}b_n b_{n+1}..b_m b_{m+1}...$, $a_n < b_n$, $a_m < 2$, $\alpha = 0,\underbrace{a_1..a_{n-1}a_n 22..22}_{m\ цифр}100..$,

$\beta = 0,\underbrace{a_1...a_{n-1}a_n 22...22}_{m\ цифр}100...$.

39. 1) а)-б) не відкрите, не замкнене; **в)** відкрита; **г)** замкнена; **2) а)-г)** вірно; **д)** невірно; **3) а), б)** вірно; **в)** невірно; **г), д)** вірно; **4)** вірно; **5) а), б)** вірно; **в)** $\mathrm{cl}A$ містить цю множину; **5) а)** вірно; **б)** $\mathrm{int}\,A$ міститься в цій множині; **в)** вірно; **6) а), б)** вірно; **в), г)** невірно; **7) а)** невірно; **б)** вірно; **8) а), б)** вірно; **9) а), б), 9) а), б), 10), 11)** невірно; **12)-18)** вірно.

40. 1) $X = Y$; **2)** $X \supset Y$; **3)** $X \subset Y$; **4)** $X = Y$; **5)** $X \subset Y$; **6), 7) а)** $X \supset Y$; **б)** $X \subset Y$; **8) а)** $X \supset Y$; **б)** $X \subset Y$; **9)** $X \supset Y$; **10)** $X \subset Y$; **11)–14)** $X = Y$.

41. 1) а) $A_n = [a; b]$; **б)** $A_1 = \{a; b\}$, якщо $(\alpha; \beta)$ один із проміжків, що не потрапив у об'єднання $\coprod_{k=1}^{n-1} A_k$, тоді A_n – об'єднання проміжків вигляду $(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}; \beta - \frac{\beta-\alpha}{n})$; **в)** $A_n = [a + \frac{b-a}{n+1}; b - \frac{b-a}{n+1}]$; **г)** приклад аналогічний п. **а)** при $A_1 = \varnothing$; **д)** $A_n = [a; b - \frac{b-a}{n}]$; **е)** приклад аналогічний п. **а)** при

$A_1=\{a\}$; **є)** $A_n=[a+\frac{1}{n};+\infty)$; **ж)** приклад аналогічний п. **а)** при $A_1=[b;+\infty)$; **з)** $A_n=[a;b]$; **и)**, **і)** таких множин не існує; **ї)** якщо $(\alpha_n;\beta_n)$ – найправіший проміжок, що вилучається на n-му кроці побудови K_3, то позначимо $\gamma_n=\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}$, тоді $A_1=\{1\}$, $A_2=K_3\bigcap[0;\gamma_1]$, $A_{n+1}=K_3\bigcap[\gamma_n;\gamma_{n+1}]$; **2) а)** таких множин не існує; **б)** $A_n=(0;\frac{1}{n})$; **в)** $A_n=[n;+\infty)$; **г)** $A_n=[n;+\infty)\bigcup[a;b]$; **д)** $A_n=[-\frac{1}{n};+\infty)$; **3) а)-в)** таких множин не існує; **г)** $A_n=(0;\frac{1}{n})$; **4) а)** $A=\varnothing$ або $A=\mathrm{R}$; **б)** $A=\varnothing$; **в)** $A=\mathrm{Z}$; **5) а)**, **б)** $A=[0;1)\bigcup\{2\}$; **в)** $A=(0;1)$; **г)** $A=(0;1)\bigcup(1;2)$; **д)** $A=[0;1)\bigcup\{2\}$; **е)** $A=\mathrm{Q}$; **є)** $A=(0;1)\bigcup(1;2)$; **ж)** $A=[0;1]$; **6) а)**, **б)** $A=(-\infty;0]$, $A=(0;+\infty)$; **в)** таких множин не існує; **7)** A, $\mathrm{cl}\,A$, $\mathrm{int}\,A$, $\mathrm{cl}(\mathrm{int}\,A)$, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}\,A)$, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}\,A))$, $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}\,A))$ та їх доповнення.

Розділ 6. Властивості числових функцій та їх графіки

42. 1) непарна; **2)**, **3)** парна; **4)**, **5)** непарна; **6)** ніяка; **7)** непарна; **8)** парна; **9)** непарна; **10)**, **11)**, **12)**, **13)**, **14)** парна; **15)**, **16)**, **17)** ніяка; **18)** парна; **19)** непарна; **20)** ніяка; **21)**, **22)** непарна; **23)** ніяка; **24)** парна; **25)** непарна; **26)** парна; **27)** непарна; **28)** ніяка.

43. 1), **2)**, **3)**, **4)** ніяка; **5)**, **6)** непарна; **7)** ніяка; **8)** непарна й парна одночасно; **9)** парна; **10)**, **11)**, **12)**, **13)** непарна; **14)** ніяка; **15)** непарна; **16)** ніяка.

44. 1) а)-д) парна; **2) а)**, **б)** непарна; **в)**, **г)** парна; **д)** непарна; **3) а)**, **б)** ніяка; в**)-д)** непарна; **е)-и)** парна; **і)** непарна.

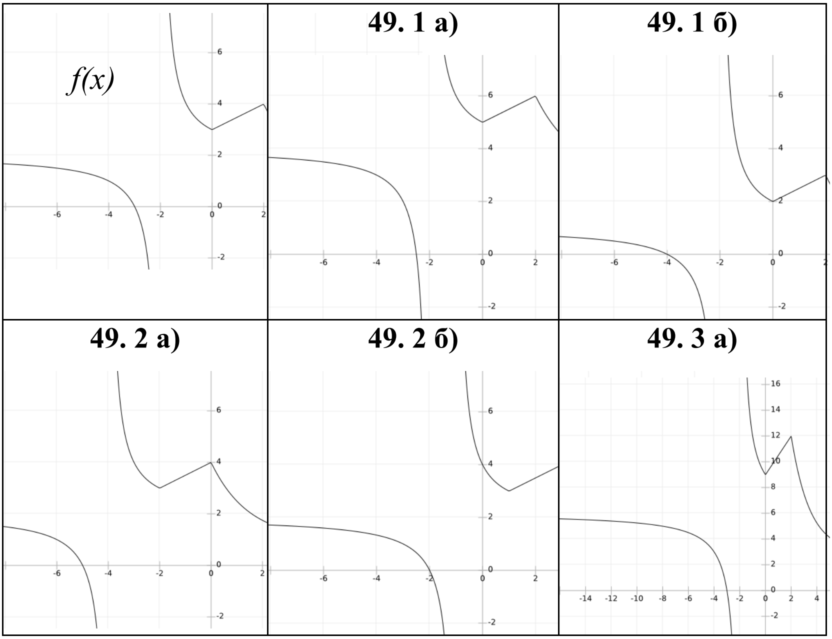
45. 1) $T=\frac{2\pi}{\alpha}$; **2)** $T=\pi$; **3)** $T=2\pi$; **4)** не періодична; **5)** $T=\pi$; **6)**, **7)** не періодична; **8)** $T=\pi$; **9)** $T=\sqrt{2}\pi$; **10)** $T=\pi$; **11)**, **12)**, **13)**, **14)**, **15)** не періодична; **16)** $T=2\pi$; **17)** не періодична; **18)** $T=2\pi$; **19)** не періодична; **20)**, **21)** $T=\pi$; **22)**, **23)** $T=2\pi$; **24)** не періодична; **25)**, **26)** $T=1$; **27)** не періодична; **28)** $T=2\pi$.

46. 1) а) зростаюча (не спадна); **б)** спадна (не зростаюча); **в)** з'ясувати неможливо; **2) а)** спадна (не зростаюча); **б)** зростаюча (не спадна); **3) а)** зростаюча (не спадна); **б)** спадна (не зростаюча); **в)**, **г)** з'ясувати неможливо; **д)** спадна (не зростаюча); **е)** зростаюча (не спадна); **є)-и)** з'ясувати неможливо; **і)** спадна (не зростаюча); **4) а)**, **б)** спадна (не зростаюча); **в)**, **г)** зростаюча (не спадна); **5) а)** зростаюча; **б)** спадна; **6) а)** зростаюча (не спадна); **б)**, **в)** спадна (не зростаюча); **г)** зростаюча (не спадна).

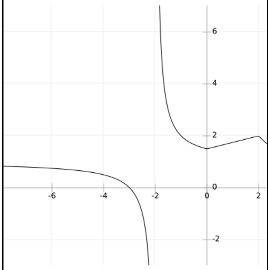
47. 1), **2)** зростаюча на R; **3)** зростаюча на проміжках $[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n]$, $n\in \mathrm{Z}$, спадна на проміжках $[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n]$, $n\in \mathrm{Z}$; **4)** зростаюча на проміжках $[-\pi+2\pi n; 2\pi n]$, $n\in \mathrm{Z}$, спадна на проміжках $[2\pi n; \pi+2\pi n]$, $n\in \mathrm{Z}$; **5)** зростаюча на проміжках $[-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n]$, $n\in \mathrm{Z}$; **6)** спадна на проміжках $[2\pi n; \pi+2\pi n]$, $n\in \mathrm{Z}$; **7)** спадна на $[-1; 1]$; **8)** зростаюча на проміжках $[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+2\pi n)$ та

$(-\pi+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n]$, $n \in Z$, спадна на проміжках $(2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n]$ та $[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; 2\pi n)$, $n \in Z$; **9)** спадна на проміжку $(-\infty; -\frac{p}{2}]$, зростаюча на проміжку $[-\frac{p}{2}; +\infty)$; **10)** спадна на проміжках $(-\infty; -b)$ та $(-b; +\infty)$; **11)** спадна на проміжках $[-1; 0)$ та $(0; 1]$, зростаюча на проміжках $(-\infty; -1]$ та $[1; +\infty)$; **12)** зростаюча на проміжках $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$; **13)** спадна на проміжку $(-\infty; 0]$, зростаюча на проміжку $[0; +\infty)$; **14)**, **15)** не спадна на R; **л)** зростаюча на проміжках $[n; n+1)$, $n \in Z$.

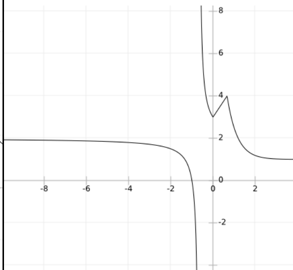
49. Графіки зображені на рисунках, ескіз графіка $y = f(x)$, $x \in R$ використовується для п. **1)-7)** та **9)-18)**, ескіз графіка $y = g(x)$, $x \in R$ – для п. **8)**.



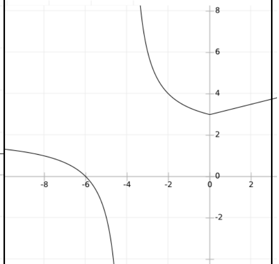
49. 3 б)



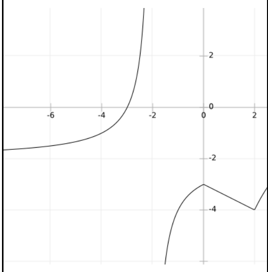
49. 4 а)



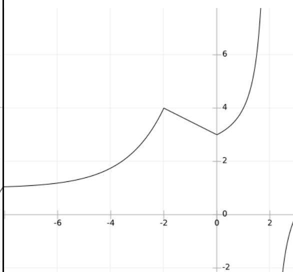
49. 4 б)



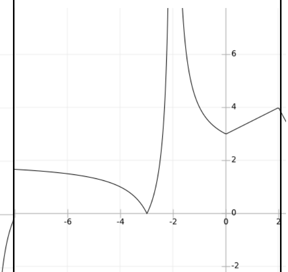
49. 5)



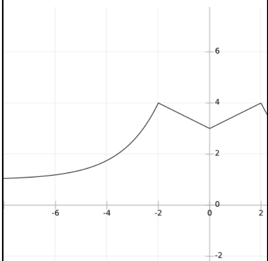
49. 6)

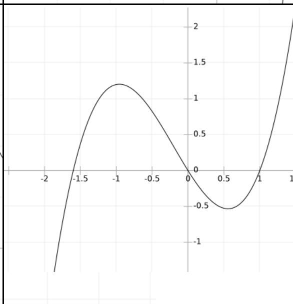


49. 7)

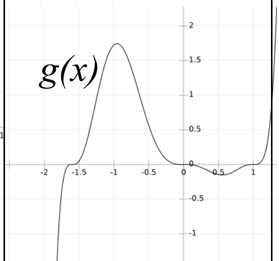


49. 8)

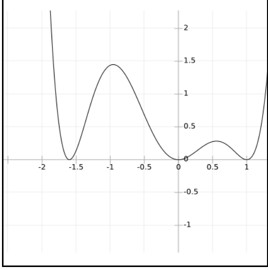




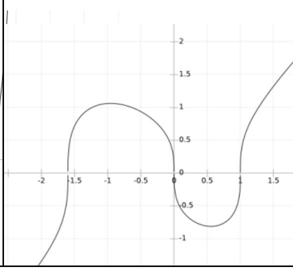
49. 9 а)



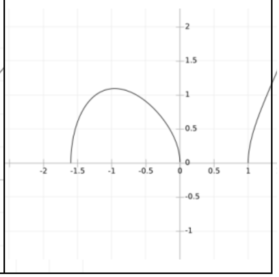
49. 9 б)

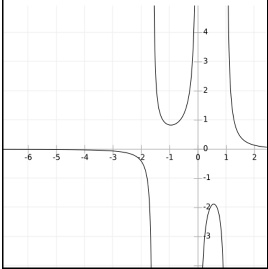
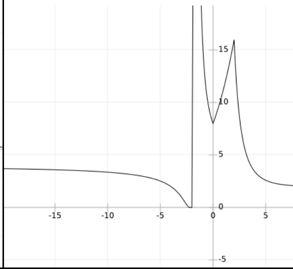
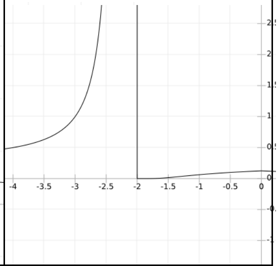


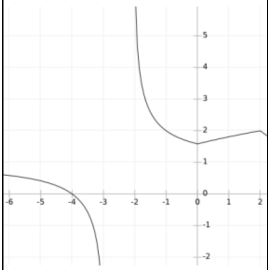
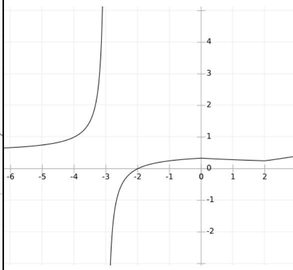
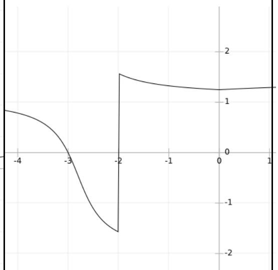
49. 9 в)

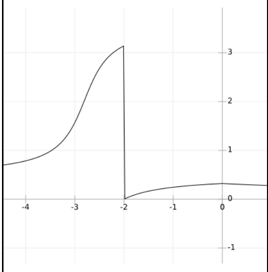
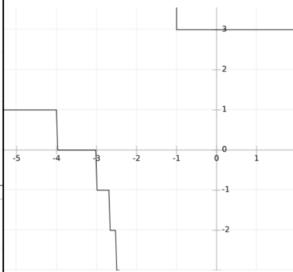
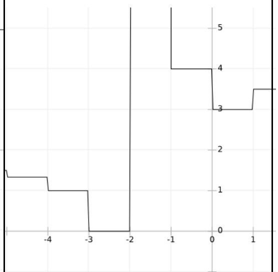


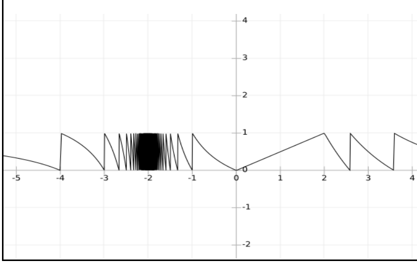
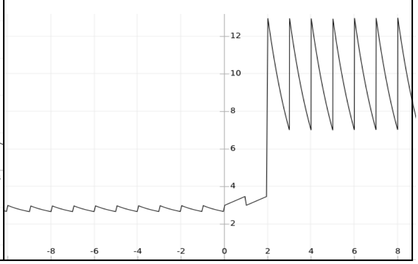
49. 9 г)



49. 9 д)	49. 10)	49. 11)
		

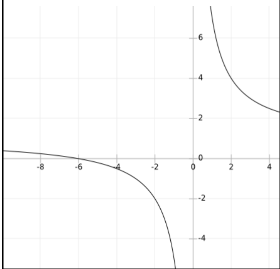
49. 12)	49. 13)	49. 14)
		

49. 15)	49. 16)	49. 17)
		

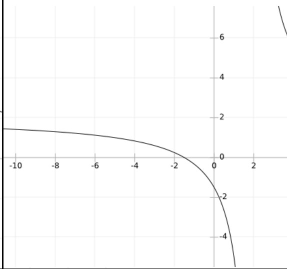
49. 18)	49. 19)
	

50–56.

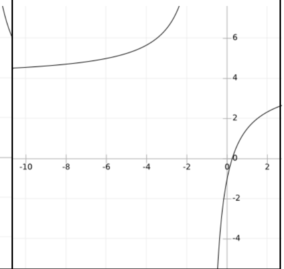
50. 1)



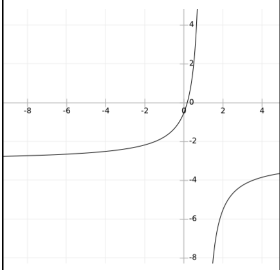
50. 2)



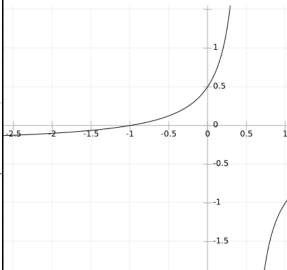
50. 3)



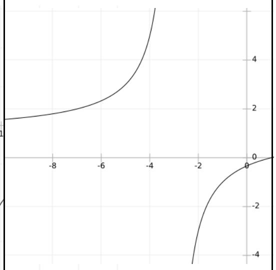
50. 4)



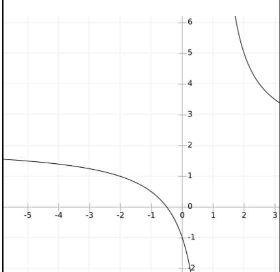
50. 5)



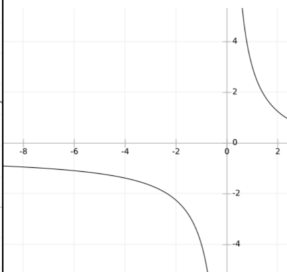
50. 6)



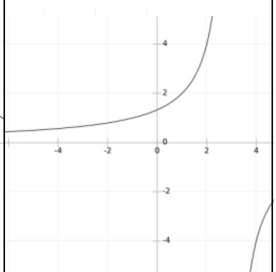
50. 7)



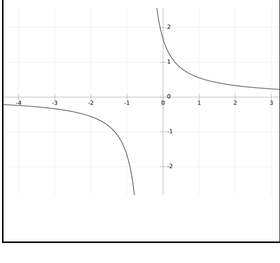
50. 8)



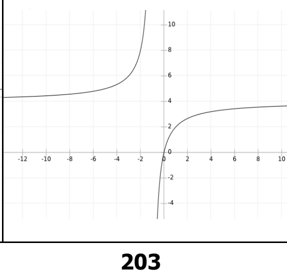
50. 9)



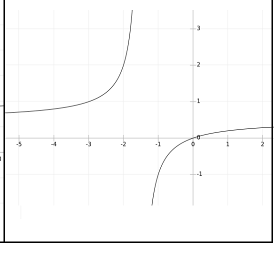
50. 10)



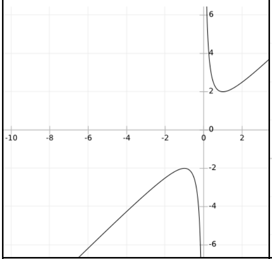
50. 11)



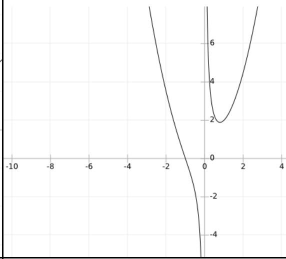
50. 12)



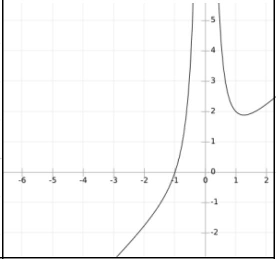
51. 1)



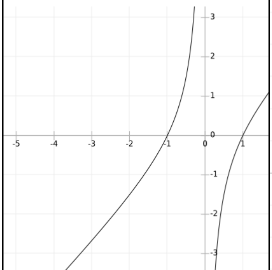
51. 2)



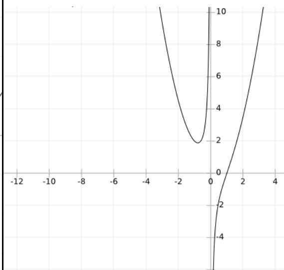
51. 3)



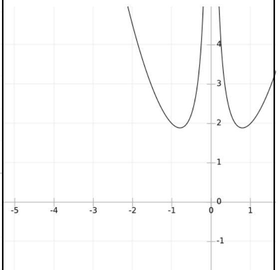
51. 4)



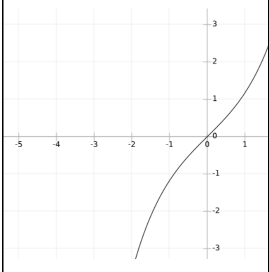
51. 5)



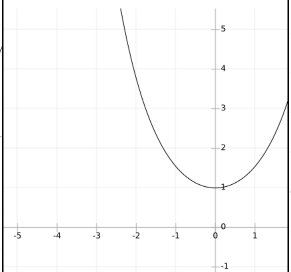
51. 6)



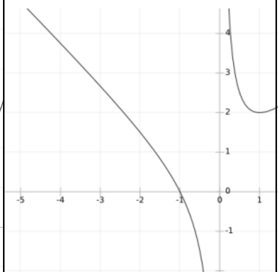
51. 7)



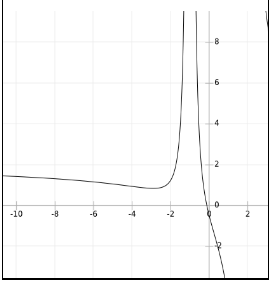
51. 8)



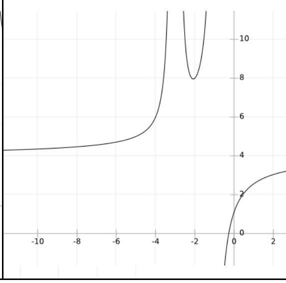
51. 9)



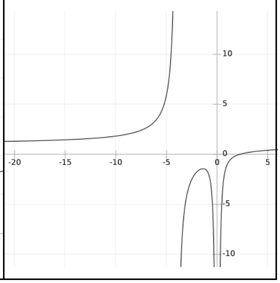
51. 10)



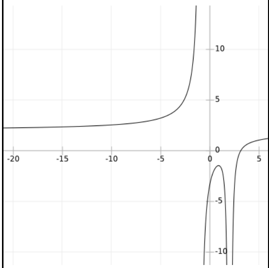
51. 11)



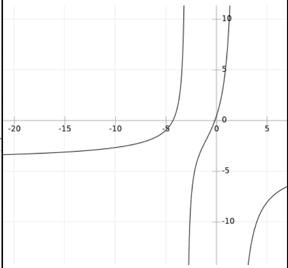
51. 12)



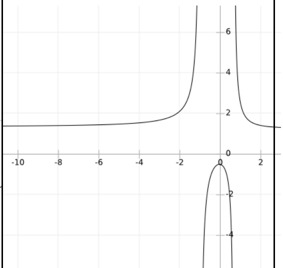
51. 13)



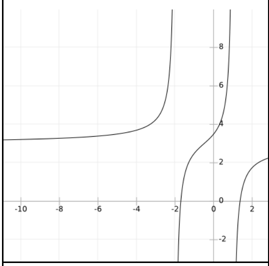
51. 14)



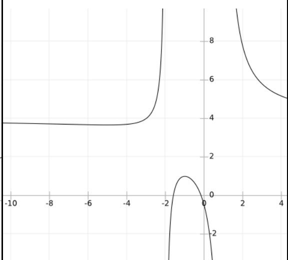
51. 15)



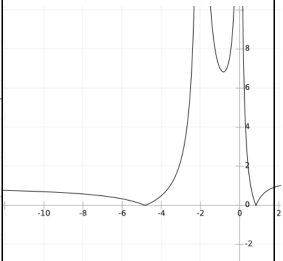
51. 16)



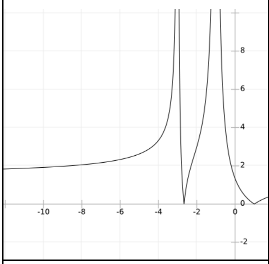
51. 17)



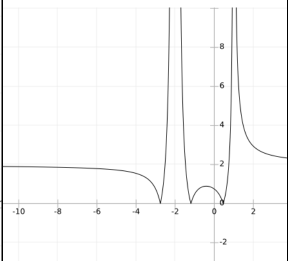
51. 18)



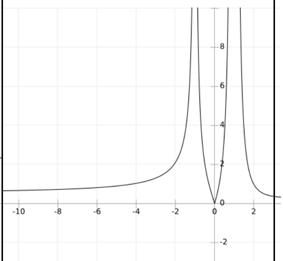
51. 19)



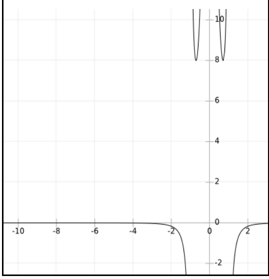
51. 20)



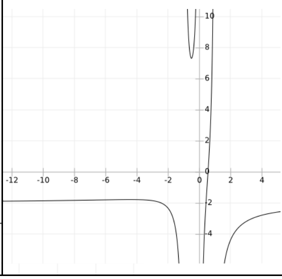
51. 21)



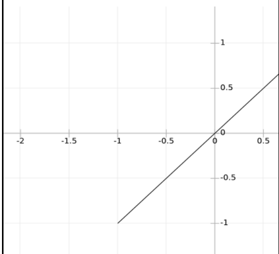
51. 22)



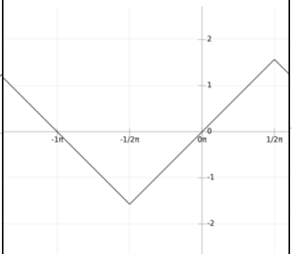
51. 23)



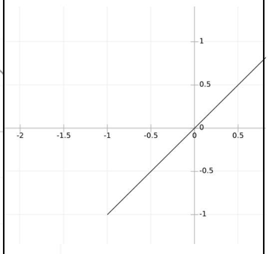
52. 1)



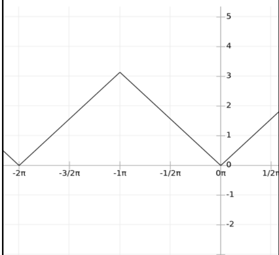
52. 2)



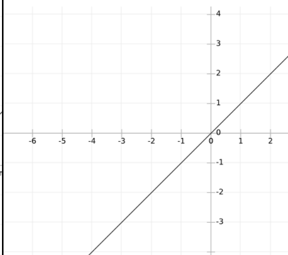
52. 3)



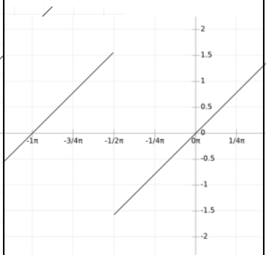
52. 4)



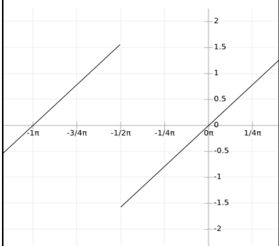
52. 5)



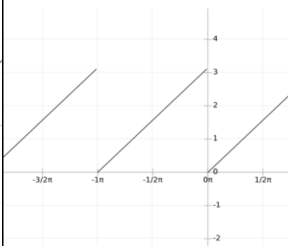
52. 6)



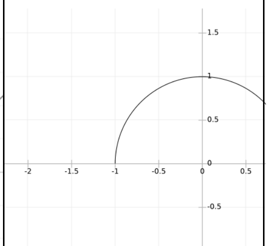
52. 7)



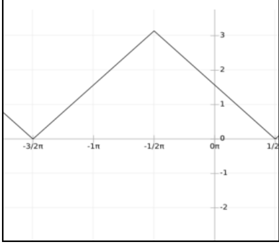
52. 8)



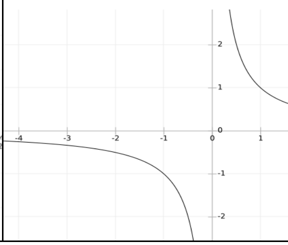
52. 9)



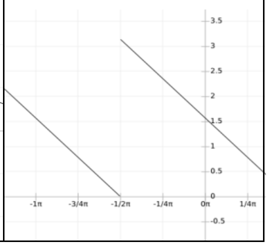
52. 10)



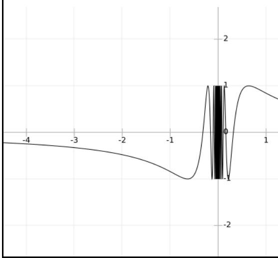
52. 11)



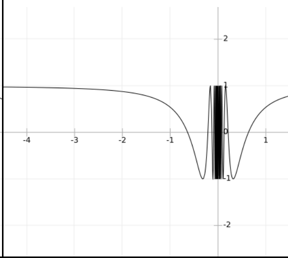
52. 12)



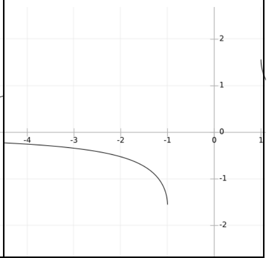
52. 13)



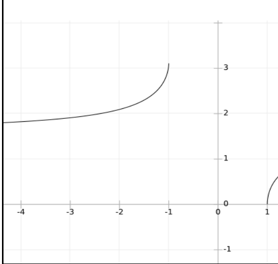
52. 14)



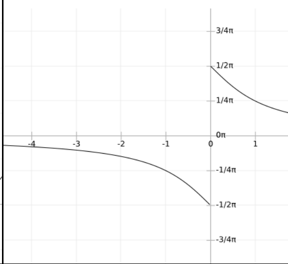
52. 15)



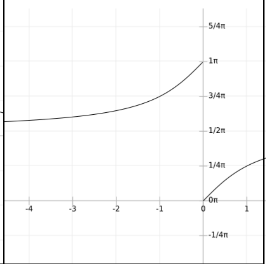
52. 16)



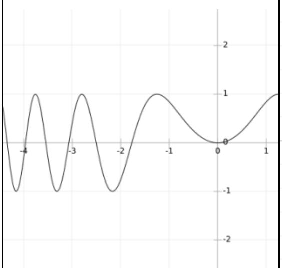
52. 17)



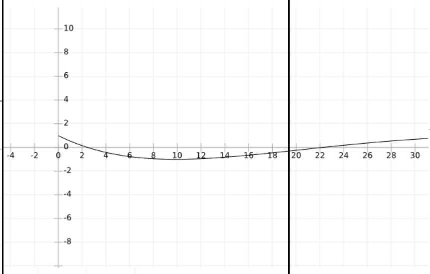
52. 18)



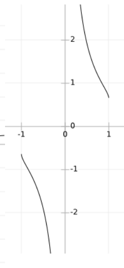
52. 19)



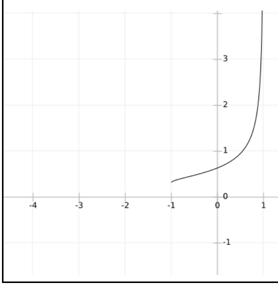
52. 20)



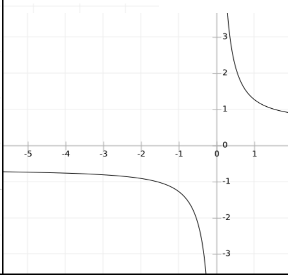
52. 21)



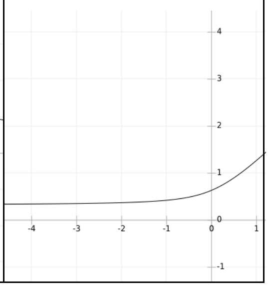
52. 22)



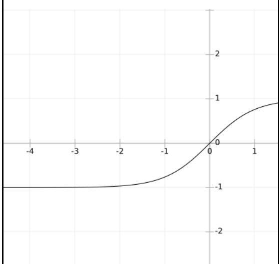
52. 23)



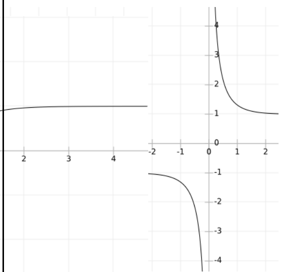
52. 24)



52. 25)

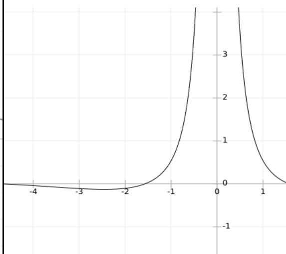


52. 26)

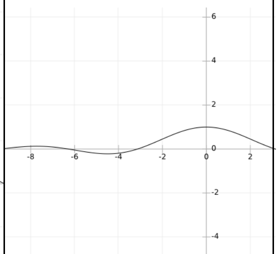


53. 1)

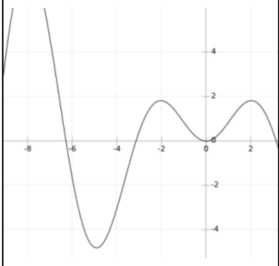
53. 2)



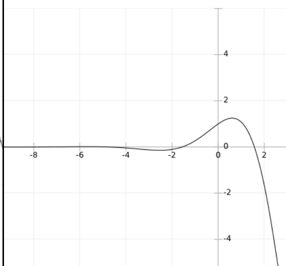
53. 3)



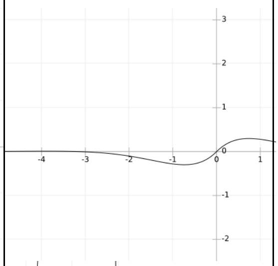
53. 4)



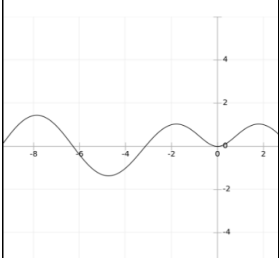
53. 5)



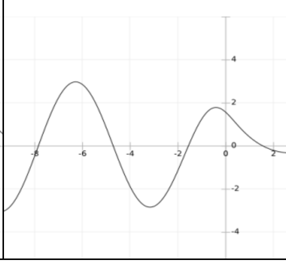
53. 6)



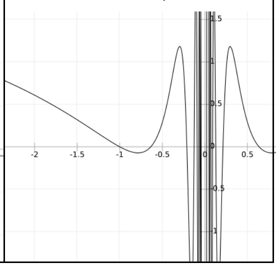
53. 7)



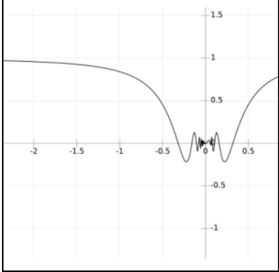
53. 8)



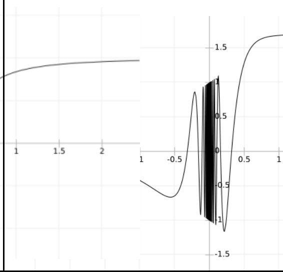
53. 9)



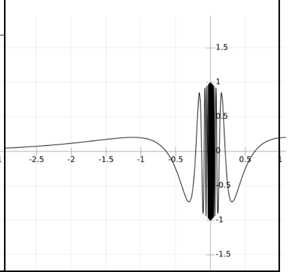
53. 10)



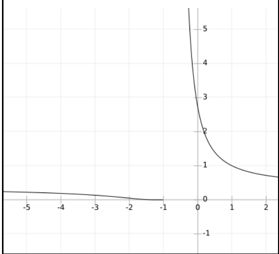
53. 11)



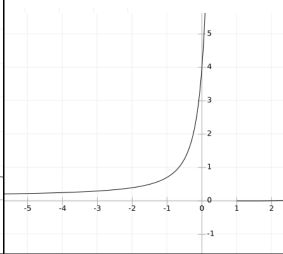
53. 12)



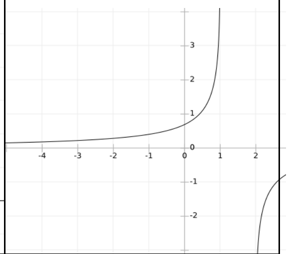
54. 1)



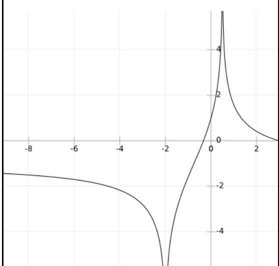
54. 2)



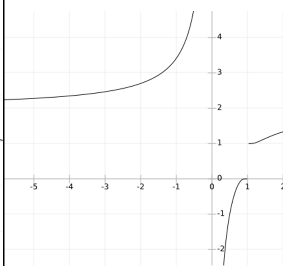
54. 3)



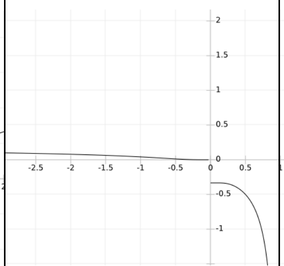
54. 4)



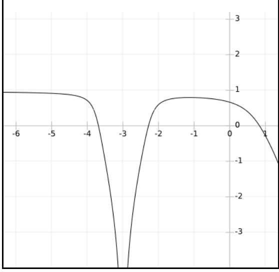
54. 5)



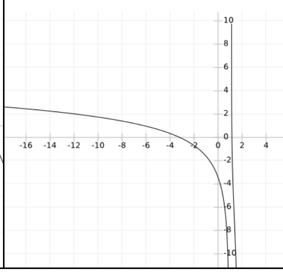
54. 6)



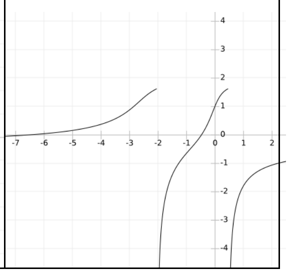
54. 7)



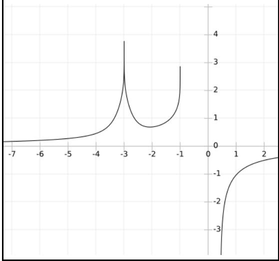
54. 8)



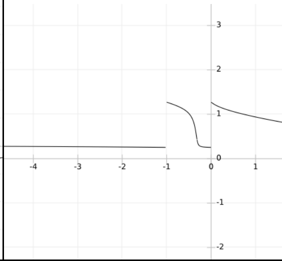
54. 9)



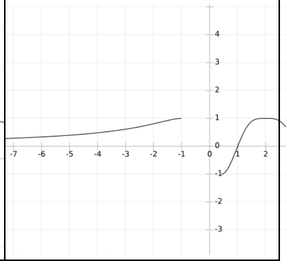
54. 10)



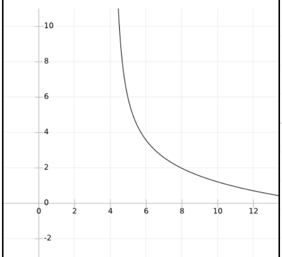
54. 11)



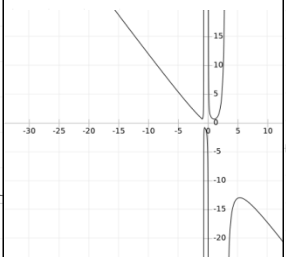
54. 12)



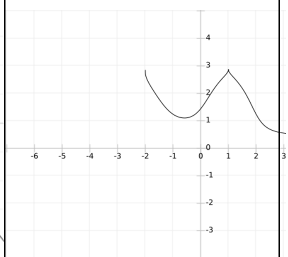
54. 13)



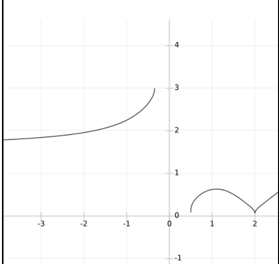
54. 14)



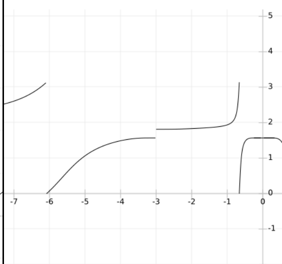
54. 15)



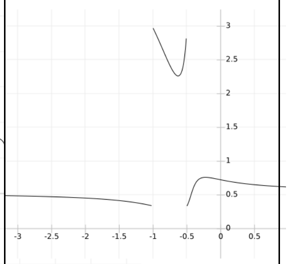
54. 16)



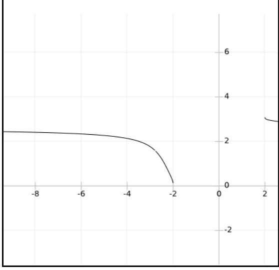
54. 17)



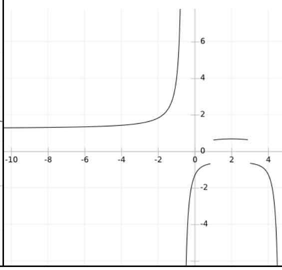
54. 18)



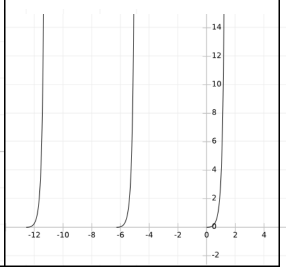
54. 19)



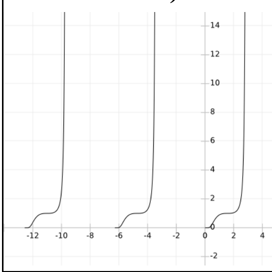
54. 20)



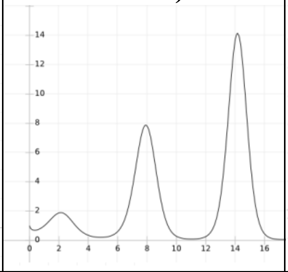
54. 21)



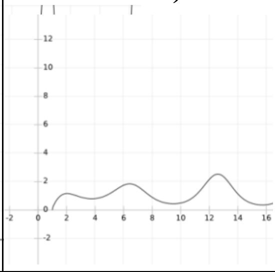
54. 22)



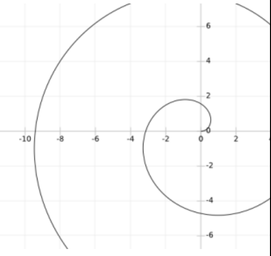
54. 23)



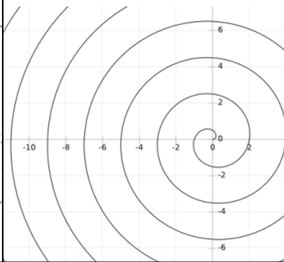
54. 24)



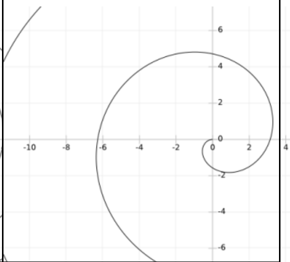
55. 1)



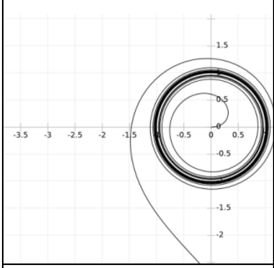
55. 2)



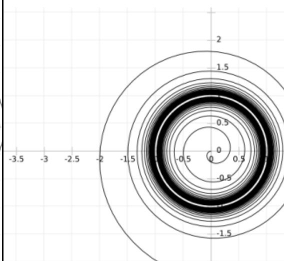
55. 3)



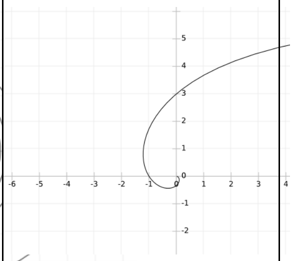
55. 4)



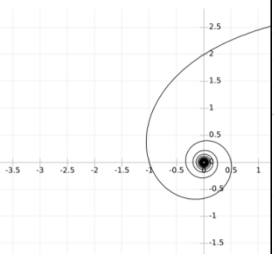
55. 5)



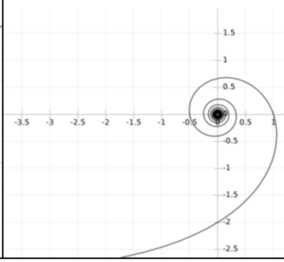
55. 6)



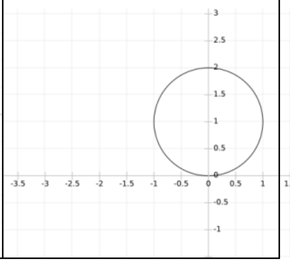
55. 7)

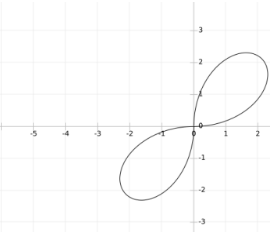
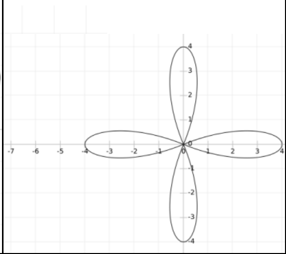
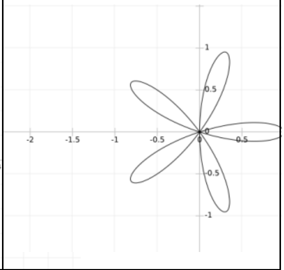
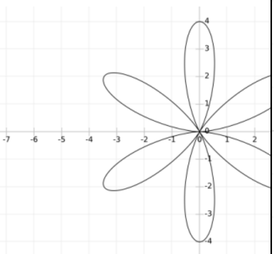
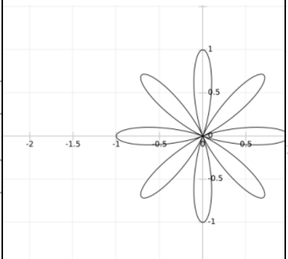
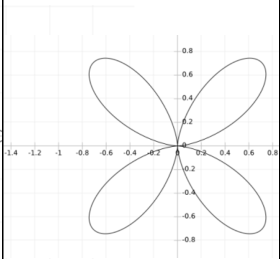
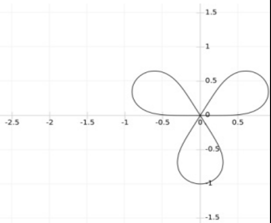
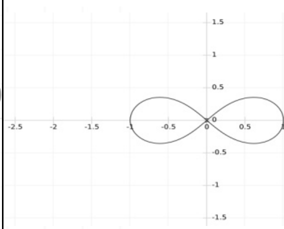
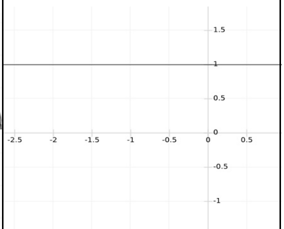
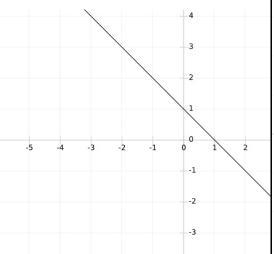
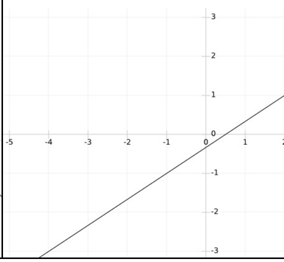
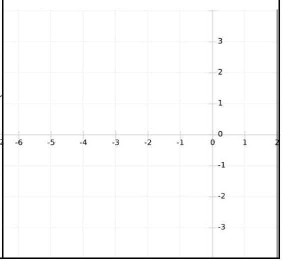


55. 8)

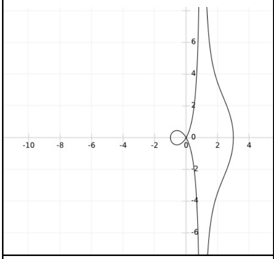


55. 9)

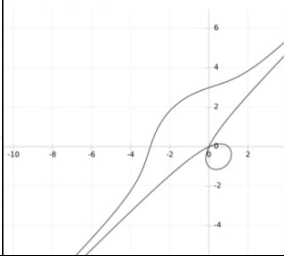


55. 10) 	**55. 11)** 	**55. 12)** 
55. 13) 	**55. 14)** 	**55. 15)** 
55. 16) 	**55. 17)** 	**55. 18)** 
55. 19) 	**55. 20)** 	**55. 21)** 

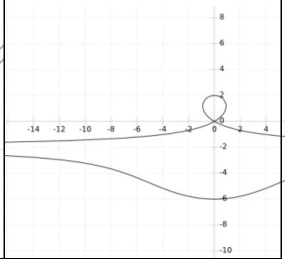
55. 22)



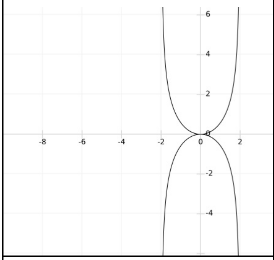
55. 23)



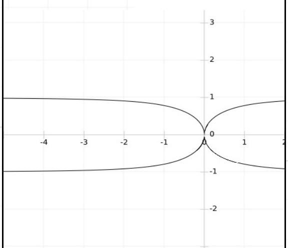
55. 24)



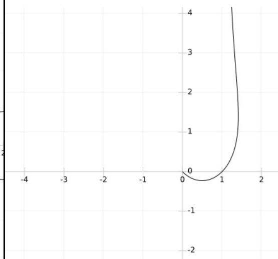
55. 25)



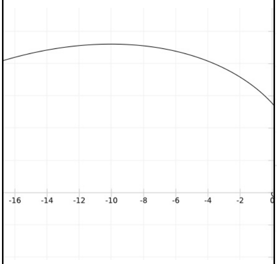
55. 26)



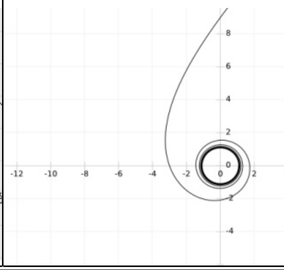
55. 27)



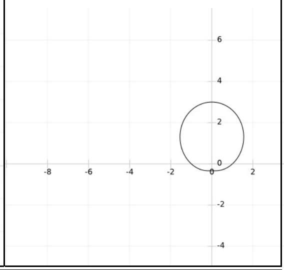
55. 28)



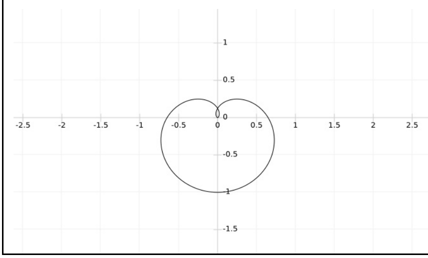
55. 29)



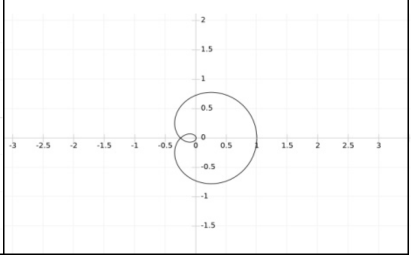
55. 30)

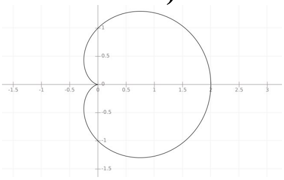
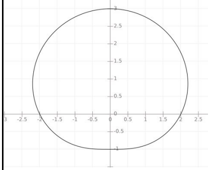
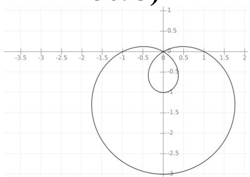


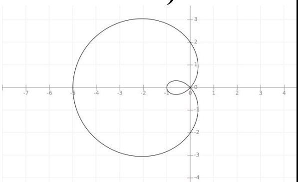
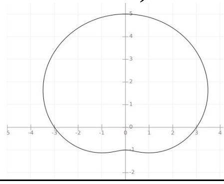
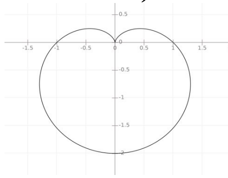
55. 31)

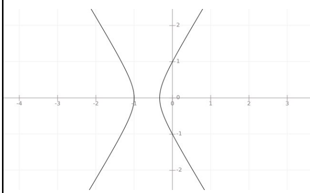
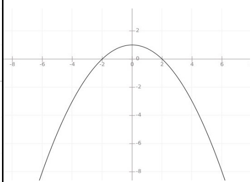
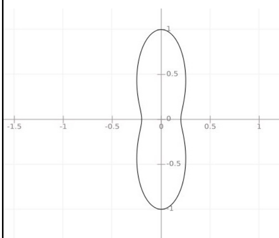


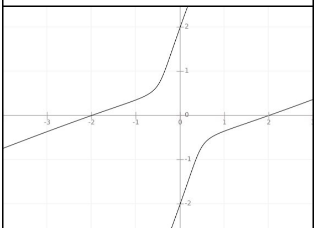
55. 32)



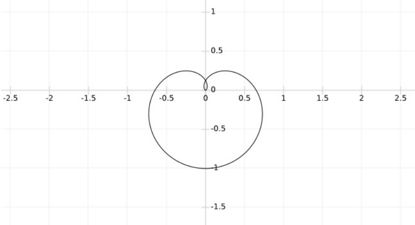
56. 1)	56. 2)	56. 3)
		

56. 4)	56. 5)	56. 6)
		

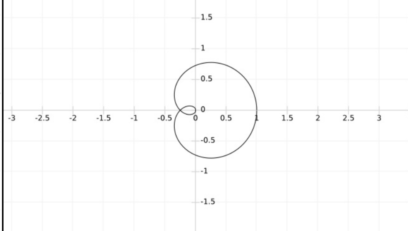
56. 7)	56. 8)	56. 9)
		



56. 10)

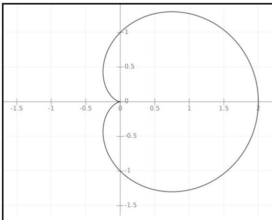


31)

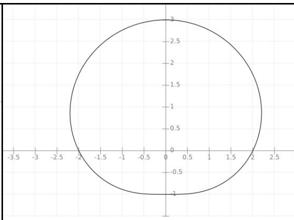


32)

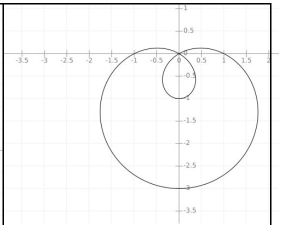
56.



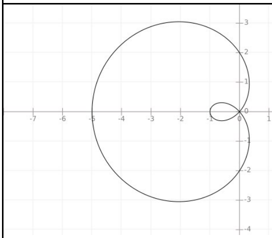
1)



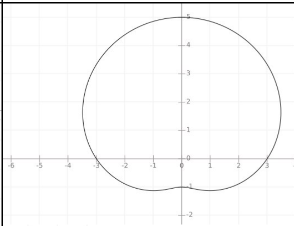
2)



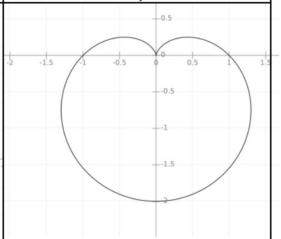
3)



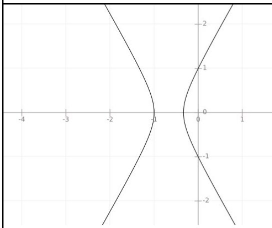
4)



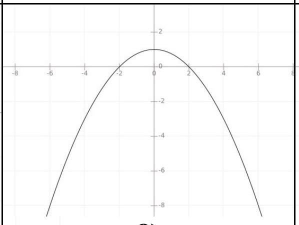
5)



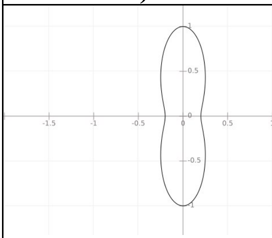
6)



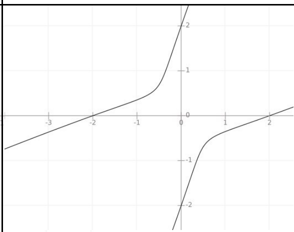
7)



8)



9)



10)

Розділ 7. Числові послідовності

57. 1) 0; **2)** 0; **3)** 2; **4)** $+\infty$; **5)** 0; **6)** 1; **7)** 0; **8)** 0; **9)** $\frac{3}{5}$; **10)** $+\infty$; **11)** 0; **12)** 0; **13)** $\frac{1}{2}$; **14)** 0; **15)** 0; **16)** 1; **17)** -1; **18)** 0; **19)** 0; **20)** 0; **21)** 1; **22)** 0; **23)** 3; **24)** 0; **25)** $-\infty$; **26)** -2.

58. 1)–3) 0; **4), 5)** 1; **6)–8)** 0; **9)** 3; **10), 11)** 0; **12)** 2; **13)** 1; **14)** -1; **15)** 0.

63. 1) обмежена знизу $x_{\min} = x_1 = \frac{1000000}{1001}$, зверху – числом 1000000, найбільшого елемента немає; **2)** обмежена знизу $x_{\min} = x_k = x_{k+1} = \dfrac{k!}{10^{50k}}$, де $k = 10^{50} - 1$, не обмежена зверху, нескінченно велика; **3)** не обмежена ні знизу, ні зверху, не є нескінченно великою; **4)** обмежена, $x_{\max} = x_{\min} = x_n = 0$, $\forall n \in N$; **5)** не обмежена ні знизу, ні зверху, не є нескінченно великою; **6)** обмежена зверху $x_{\max} = x_2 = \frac{3}{2}$, знизу $x_{\min} = x_1 = \frac{1}{2}$; **7)** обмежена зверху $x_{\max} = x_8 = \frac{1}{189}$, знизу – числом 0, мінімального елемента немає; **8)** обмежена зверху $x_{\max} = x_1 = \dfrac{\pi^2}{6}$, знизу – числом 0, мінімального елемента немає; **9)** обмежена зверху $x_{\max} = x_6 = \dfrac{39^3}{6!}$, знизу – числом 0, мінімального елемента немає; **10)** обмежена зверху $x_{\max} = x_{4k-3} = 1$, знизу – числом $x_{\min} = x_{4k-1} = -1$, $\forall k \in \mathrm{N}$; **11)** обмежена зверху $x_{\max} = x_1 = \frac{9}{\sqrt{2}}$, знизу – числом –1, мінімального елемента немає; **12)** не обмежена зверху, обмежена знизу нулем, не має найменшого елемента, не є нескінченно великою; **13)** обмежена зверху $x_{\max} = x_4 = 6$, необмежена знизу, нескінченно велика; **14)** обмежена зверху $x_{\max} = x_3 = \frac{1}{6}$, знизу – числом 0, мінімального елемента немає; **15)** не обмежена зверху, обмежена знизу $x_{\min} = x_2 = \frac{9}{2}$, нескінченно велика; **16)** обмежена знизу $x_{\min}=x_1=1$, зверху – числом 2, максимального елемента немає; **17)** обмежена зверху числом –5, знизу $x_{\min}=x_1=-\frac{127}{24}$, найбільшого елемента немає; **18)** обмежена знизу $x_{\min}=x_1=1$, зверху – числом 3, максимального елемента немає; **19)** не обмежена зверху, обмежена знизу $x_{\min}=x_{2k-1}=0$, не є нескінченно великою; **20)** не обмежена зверху, обмежена знизу $x_{\min}=x_1=\sqrt{3}-1$, нескінченно велика; **21)** не обмежена зверху, обмежена знизу $x_{\min}=x_1=1$, не є нескінченно великою; **22)** не обмежена зверху, обмежена знизу $x_{\min}=x_1=2$, нескінченно велика; **23)** не обмежена зверху, не обмежена знизу, нескінченно велика; **24)** обмежена знизу –1, зверху – числом 1, максимального та мінімального елементів немає; **25)** обмежена знизу –1, зверху – числом 1, максимального та мінімального елементів немає; **26)** не обмежена знизу, не обмежена зверху, не є нескінченно великою; **27)** обмежена зверху $\frac{\pi}{2}$, обмежена знизу $x_{\min}=x_1=\frac{\pi}{4}$, максимального елемента немає; **28)** обмежена знизу $x_{\min}=x_1=1$, необмежена зверху, нескінченно велика.

64. **1)** 1; **2)** $\frac{1}{8}$; **3)** $\frac{1}{12}$; **4)** $\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{m}\right)$; **5)** 1; **6)** $\frac{1}{m \cdot m!}$; **7)** $\frac{1}{2}$; **8)** $\frac{5}{3}$; **9)** $\frac{2}{3}$; **10)** $\frac{3}{2}$; **11)** $\frac{1}{168}$; **12)** 1; **13)** $\frac{1}{2}$; **14)** $\frac{4}{3}$; **15)** $\frac{1}{2}$; **16)** 1; **17)** $\frac{1}{2}\sin 1$; **18)** $\frac{1}{2}(1-\cos 1)$.

65. **1)** невизначеність; **2)** збігається до нескінченності; **3)** невизначеність; **4)** збігається до нуля; **5)** невизначеність; **6)** збігається до нуля; **7)** невизначеність; **8)** збігається до не скінченності; **9)** невизначеність; **10)** збігається до 1; **11)** невизначеність; **12)** збігається до нуля; **13)** невизначеність; **14)** невизначеність; **15)** збігається до нескінченності; **16)** збігається до нескінченності; **17)** збігається до нуля; **18)** збігається до мінус нескінченності; **19)** збігається до 1.

66. Відповіді в таблиці (тут "–" означає, що такої послідовності не існує, "**Н**" – невизначеність), де **1)** a_n+b_n, **2)** a_n-b_n,

3) $b_n - a_n$, **4)** $a_n b_n$, **5)** $\frac{a_n}{b_n}$, **6)** $\frac{b_n}{a_n}$, **7)** $(a_n)^{b_n}$, **8)** $(b_n)^{a_n}$, **9)** $\log_{a_n} b_n$, **10)** $\log_{b_n} a_n$:

	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)
а)	$-\infty$	Н	Н	$+\infty$	Н	Н	–	–	–	–
б)	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	–	–	–	–
в)	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Н	∞	0	–	–	–	–
г)	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	–	–	–	–
д)	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	–	–	–	–
е)	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	–	–	–	–
є)	Н	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Н	Н	–	–	–	–
ж)	–2	0	0	1	1	1	–	–	–	–
з)	–1	–1	1	0	∞	0	–	$+\infty$	–	–
и)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	–	2	–	–
і)	0	–2	2	–1	–1	–1	–	1	–	–
ї)	3	–5	5	–4	$-\frac{1}{4}$	-4	–	$\frac{1}{4}$	–	–
й)	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	–	0	–	–
к)	0	0	0	0	Н	Н	Н	Н	Н	Н
л)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	∞	0	1	0	$+\infty$
м)	1	–1	1	0	0	∞	0	1	0	∞
н)	4	–4	4	0	0	∞	0	1	0	$-\infty$
о)	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Н	0	∞	0	Н	Н	Н
	$a_n + b_n$	$a_n - b_n$	$b_n - a_n$	$a_n \cdot b_n$	$\frac{a_n}{b_n}$	$\frac{b_n}{a_n}$	$(a_n)^{b_n}$	$(b_n)^{a_n}$	$\frac{\ln b_n}{\ln a_n}$	$\frac{\ln a_n}{\ln b_n}$
п)	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	2
р)	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{1}{4}$	1	0	∞

с)	$\frac{17}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	**1**	$\frac{1}{16}$	16	$\frac{1}{256}$	$\sqrt{2}$	**–1**	**–1**
т)	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**0**	$+\infty$	**0**	$+\infty$	**Н**	**Н**
у)	**2**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**Н**	**Н**
ф)	**5**	**3**	**-3**	**4**	$\frac{1}{4}$	**4**	**1**	**4**	∞	∞
х)	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**0**	$+\infty$	**Н**	$+\infty$	$+\infty$	**0**
ц)	**13**	**5**	**–5**	**36**	$\frac{9}{4}$	$\frac{4}{9}$	9^4	4^9	$\log_3 2$	$\log_2 3$
ч)	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**0**	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**0**
ш)	$+\infty$	**Н**	**Н**	$+\infty$	**Н**	**Н**	$+\infty$	$+\infty$	**Н**	**Н**

67. $1-a_n^{(2)}$, $2-a_n^{(3)}$, $3-a_n^{(1)}$, $4-a_n^{(6)}$, $5-a_n^{(8)}$, $6-a_n^{(7)}$, $7-a_n^{(9)}$, $8-a_n^{(10)}$, $9-a_n^{(5)}$, $10-a_n^{(16)}$, $11-a_n^{(15)}$, $12-a_n^{(14)}$, $13-a_n^{(17)}$, $a_n^{(22)}$, $a_n^{(23)}$, $a_n^{(24)}$, $a_n^{(26)}$, $14-a_n^{(18)}$, $a_n^{(21)}$, $a_n^{(25)}$, $a_n^{(27)}$, $a_n^{(30)}$, $15-a_n^{(29)}$, $16-a_n^{(11)}$, $17-a_n^{(28)}$, $18-a_n^{(20)}$, $19-a_n^{(19)}$, $20-a_n^{(12)}$, $21-a_n^{(13)}$, $22-a_n^{(4)}$.

68. 1) $\frac{a_m}{b_m}$, якщо $m=l$, 0, якщо $m<l$, ∞, якщо $m>l$; **2)** $\frac{1}{2}$; **3)** $\frac{2}{3}$; **4)** $\frac{4}{3}$; **5)** $\frac{1}{3}$; **6)** $-\frac{1}{4}$; **7)** 1; **8)** 0; **9)** 2; **10)** 0; **11)** $-\frac{1}{2}$; **12)** 0; **13)** 0; **14)** a; **15)** 0; **16)** 0; **17)** 1; **18)** 0; **19)** $+\infty$; **20)** -1; **21)** 1, якщо $|a|>1$, 0, якщо $|a|\in[0,1)$, $\frac{1}{2}$, якщо $a=1$; **22)** $\frac{\ln 2+\lg 3}{3}$; **23)** $-\infty$; **24)** $-\infty$; **25)** $-\infty$; **26)** $-\infty$; **27)** 0; **28)** 0; **29)** -1.

69. 1) 1; **2)** 1; **3)** 3; **4)** 1; **5)** 1; **6)** 1; **7)** 0; **8)** 0; **9)** 1; **10)** 0; **11)** $\max\limits_{k=\overline{1,m}}|a_k|$; **12)** $\dfrac{1}{\min\limits_{k=\overline{1,m}} a_k}$; **13)** 0; **14)** 0.

70. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=|a|$; **2)** при $a\neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\min\{a;\frac{1}{a}\}$, при $a=0$ (b_n) може бути розбіжною; **3)** при $a\in R\backslash Z$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=[a]$, при $a\in Z$ (b_n) може бути розбіжною, при $a=\pm\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\pm\infty$; **4)** при $a\in R\backslash Z$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\{a\}$, при $a\in Z$ або при $a=\pm\infty$ (b_n) може бути розбіжною; **5)** при $a \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \operatorname{sgn} a$, при $a = 0$ (b_n) може бути розбіжною; **6)** якщо послідовність (b_n) визначена, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = |a|$; **7)** якщо послідовність (b_n) визначена, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ при $a \neq 0$ та $a \neq \pm\infty$, при $a = 0$ або $a = \pm\infty$ послідовність (b_n) може бути розбіжною; **8)** якщо послідовність (b_n) визначена, то при $a > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt[a]{a}$, при $a = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, при $a = +\infty$ послідовність (b_n) може бути розбіжною; **9)** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \max\{a;\, a^2\}$.

71. 1), **2)** послідовність може бути розбіжною; **3)** при $a \neq 0$ послідовність збігається до a, при $a = 0$ послідовність може бути розбіжною; **4)** послідовність може бути розбіжною.

72. 1) а)-в) послідовності збіжні; **2)-6)** послідовності збіжні; **7)-17)** послідовності розбіжні; **18)** послідовність збіжна; **19)** послідовність розбіжна.

75. 1) якщо $c = 0$, $d \neq 0$, то при $a = 0$ (x_n) стаціонарна, при $\frac{a}{d} > 0$ (x_n) зростає, при $\frac{a}{d} < 0$ (x_n) спадає; якщо $c \neq 0$, $\frac{d}{c} > 0$, то при $ad - bc = 0$ (x_n) стаціонарна, при $ad - bc > 0$ (x_n) зростає, при $ad - bc < 0$ (x_n) спадає; якщо $c \neq 0$, $\frac{d}{c} < 0$, то при $ad - bc = 0$ (x_n) стаціонарна, при $ad - bc > 0$ (x_n) зростає, починаючи з деякого номера, при $ad - bc < 0$ (x_n) спадає, починаючи з деякого номера; **2)** монотонно спадає, починаючи з x_3; **3)** зростаюча; **4)-6)** не монотонна; **7)** не спадна; **8)**, **9)** не монотонна; **10)** монотонно спадає, починаючи з x_3; **11)** не монотонна; **12)** спадна; **13)** при $a \leq -1$ (x_n) не монотонна; при $-1 < a < 0$ (x_n) зростає, починаючи з деякого номера; при $a = 0$ (x_n) зростає; при $0 < a < 1$ (x_n) спадає, починаючи з деякого номера; при $a = 1$ (x_n) стаціонарна; при $a > 1$ (x_n) зростає, починаючи з деякого номера; **14)** монотонно спадає, починаючи з x_2; **15)** зростає; **16)** спадає; **17)** не монотонна; **18)** спадна; **19 а)** не монотонна; **б)** зростаюча; **20)** монотонна, характер монотонності збігається з характером монотонності послідовності (y_n).

76. 1) $\frac{\sqrt{21}+1}{2}$; **2)** $1-\sqrt{1-a}$; **3)** $\frac{1}{2}$; **4)** 2; **5)** $\frac{1}{2}$; **6)** $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$; **7)** 3; **8)** 1; **9) а)-в)** $\frac{1}{3}$; **10)** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; **11)** $+\infty$; **12)** $1-\sqrt{3}$; **13)** 4; **14)** 1; **15)** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; **16)** $2+\sqrt{5}$; **17)** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; **18)** 1; **19)** $\frac{5-\sqrt{5}}{20}$; **20)** $\sqrt{2}$; **21)** 2; **22)** c; **23) а)** 3; **б)** 4; **в)** 3; **г)** 4; **д)** $+\infty$; **е)** $+\infty$; **є)** $+\infty$.

77. 1) $\frac{1}{3}$; **2)** 1; **3)** 0; **4)** $\frac{1}{a-1}$, при $a>1$; $+\infty$ при $a\in(0,1]$; **5)** $\frac{2}{3}$; **6)** 2; **7)** $\frac{a}{a-1}$, при $a>1$; $+\infty$ при $a\in(0,1]$; **8)** 1; **9)** $\frac{2}{5}$; **10)** 0; **11)** $+\infty$; **12)** 1; **13)** 0; **14)** $\frac{2^m}{m+1}$; **15)** 0; **16)** $\frac{1}{m+1}$; **17)** $+\infty$; **18)** $-\infty$; **19)** $\frac{1}{2}$; **20)** 2; **21)** $\frac{2}{3}$; **22)** $+\infty$; **23)** $\frac{2}{5}$; **24)** $\frac{1}{m+1}$.

78. 1) C – стала Ейлера; **2)** C; **3)** $\frac{\ln 2}{2}$; **4)** 1; **5)** 2; **6)** $\frac{1}{2}$; **7)** $\ln 2$; **8)** $\frac{1}{4}$; **9)** $\frac{1}{4}$; **10)** $m-k$; **11)** $+\infty$.

79. $\left(\inf\limits_{n\in N} x_n;\ \sup\limits_{n\in N} x_n;\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n;\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\right)$: **1)** $(0;\,2;\,0;\,2)$; **2)** $\left(-1;\,\frac{3}{2};\,0;\,1\right)$; **3)** $\left(-\frac{1}{2};\,1;\,-\frac{1}{2};\,1\right)$; **4)** $(-\infty;+\infty;-\infty;+\infty)$; **5)** $\left(-\frac{10}{3};\,\frac{10}{7};\,1;\,1\right)$; **6)** $\left(1;\,\sqrt{5};\,1;\,2\right)$; **7)** $(-\infty;+\infty;-\infty;+\infty)$; **8)** $\left(-e-\frac{1}{2};\,e+1;\,-e-\frac{1}{2};\,e+1\right)$; **9)** $\left(-\frac{1}{2};\,1;\,0;\,0\right)$; **10)** $\left(\frac{1}{4};\,1;\,\frac{1}{2};\,1\right)$; **11)** $(-\infty;\,-1;\,-\infty;\,-\infty)$; **12)** $\left(0;\,e;\,\frac{1}{e};\,e\right)$; **13)** $(0;\,0;\,0;\,0)$ при $\alpha\in Z$; $\left(0;\,\frac{q-1}{q};\,0;\,\frac{q-1}{q}\right)$ при $\alpha=\frac{p}{q}\in Q\backslash Z$, $p\in Z$, $q\in N$; $(0;\,1;\,0;\,1)$ при $\alpha\in R\backslash Q$; **14)** $(0;\,0;\,0;\,0)$, якщо $\alpha=k\pi$, $k\in Z$;

$\left(0;\ \sin^2\frac{q-1}{q}\pi;\ 0;\ \sin^2\frac{q-1}{q}\pi\right)$ при $\alpha=\frac{p}{q}\pi$, де $\frac{p}{q}\in Q\backslash Z$, $p\in Z$, $q\in N$; $(0;\ 1;\ 0;\ 1)$ при $\alpha=\beta\pi$, де $\beta\in R\backslash Q$; **15)–17)** $(-1;\ 1;\ -1;\ 1)$; **18)** $(-\infty;\ +\infty;\ -\infty;\ +\infty)$; **19)** $\left(\frac{3\pi}{4};\ \pi;\ \pi;\ \pi\right)$; **20), 21)** $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

80. 1) $\{0;\ 1\}$; **2)** $[0;\ 1]$; **3)** $\left\{0;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ ...\right\}$; **4)** $\overline{R}$; **5)** $\left\{0;\ \pm\sin\frac{\pi}{q};\ \pm\sin\frac{2\pi}{q};\ ...;\ \pm\sin\frac{(q-1)\pi}{q}\right\}$; **6)** $\overline{R}$; **7)** $[-1;\ 1]$; **8)** $\{0;\ \pm\sin 1°;\ \pm\sin 2°;...;\ \pm\sin 89°;\ \pm 1\}$; **9)** $\{0\}$ при $\alpha\in Z$; $\left\{0;\ \frac{1}{q};\ \frac{2}{q};\ ...,\ \frac{q-1}{q}\right\}$ при $\alpha=\frac{p}{q}\in Q\backslash Z$, $p\in Z$, $q\in N$; $[0;\ 1]$ при $\alpha\in R\backslash Q$; **10)** $\{+\infty\}$; **11)** $\{0,\ +\infty\}$; **12)** $\{1\}$; **13)** $\{0;\ 1\}$; **14)** $\{-\infty;\ +\infty\}$; **15)** $(N\setminus\{1\})\bigcup\{+\infty\}$; **16)** $\{+\infty\}$; **17)** $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$.

81. 1) $\left(1-\frac{1}{n}\right),\ n\in N$; **2)** $(1;\ 2;\ ...;\ n;\ 1;\ 2;\ ...;\ n;\ 1;\ 2;\ ...;\ n;\ ..)$; **3)** $(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ .;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ ...;\ \frac{n-1}{n};\ ...)$; **4), 5)** не існує; **6)** послідовність усіх раціональних чисел проміжку $[0;\ 1]$; **7), 8)** не існує; **9)** $(1;\ 1;\ 2;\ 1;\ 2;\ 3;\ 1;\ 2;\ ...;\ n;\ ..)$; **10)–12)** не існує; **13)** послідовність усіх раціональних чисел дійсної осі; **14)** на парних місцях послідовність усіх раціональних чисел проміжку $[0;1]$, на непарних – числа 2; **15)** не існує; **16)** на парних місцях послідовність усіх раціональних чисел проміжку $[0;1]$, на непарних – послідовність усіх раціональних чисел проміжку $[2;\ 3]$; **17)** не існує.

83. 1) 1; **2)** e^{-2}; **3)** e^3; **4)** 0; **5)** $\frac{4}{e}$; **6)** 0.

85. 1) $(1;-1;1;1;-1;-1;1;1;1;-1;-1;-1;1;1;1;1;...)$; **2 а)** $(1;\ 2;\ 1;\ 3;\ 1;\ 4;\ ...)$, $(2;\ 1;\ 3;\ 1;\ 4;\ 1;\ ...)$; **б)** $\{\frac{1}{n}|\ n\in N\}$, $\{\frac{1}{n}|\ n\in N\}$; **в)** $(1;\ 2;\ 2;\ 1;\ 3;\ 3;\ 1;\ 4;\ 4;\ ...)$, $(1;\ -2;\ 2;\ 1;\ -3;\ 3;\ 1;\ -4;\ 4;\ ...)$; **г)** $(1;\ 2;\ 2;\ 2;\ 2;\ 1;\ 3;\ 3;\ 3;\ 3;\ 1;\ 4;\ 4;\ 4;\ 4;\ ...)$, $(1;\ -2;\ -3;\ -4;\ -5;\ 1;\ -3;\ -4;\ -5;\ -6;\ 1;\ -4;\ -5;\ -6;\ -7;\ ...)$; **3)** $(1;\ 2;\ 3;\ 1;\ 2;\ 3;\ 1;\ 2;\ 3;\ ...)$, $(2;\ 3;\ 1;\ 2;\ 3;\ 1;\ 2;\ 3;\ 1;\ ...)$; **4)** $\left(2;\ \frac{1}{4};\ 3;\ \frac{1}{9};\ 4;\ \frac{1}{16};\ ...\right)$, $\left(\frac{1}{4};\ 2;\ \frac{1}{9};\ 3;\ \frac{1}{16};\ 4;\ ...\right)$.

86. 1) при $a \neq -2$ збігається до ∞, при $a = -2$ збігається до $\frac{2}{3}$; **2)** збігається до $-\frac{24}{9}$; **3)** при $b = -1$ розбігається, при $|b| < 1$ або $a = \dfrac{1}{1-b}$ збігається до $\dfrac{1}{1-b}$, при $|b| > 1$ або $b = 1$ збігається до ∞; **4)** при $a \neq 0$ збігається до ∞, при $a = 0$ збігається до 0; **5)** при $5a - 2b \neq 0$ збігається до ∞, при $5a - 2b = 0$ збігається до $4b - 8a$; **6)** збігається до 0; **7 а)** збігається до $\frac{7}{3}$; **б)** збігається до $\frac{2}{3}$; **8)** збігається до 0; **9)** збігається до 0 при $a = 27$, інакше розбігається; **10 а)** збігається до $\frac{87}{36}$; **б)** збігається до $\frac{19}{12}$; **11 а)** збігається до $\dfrac{a+2b}{3}$; **б)** збігається до $\sqrt{\dfrac{a^2+2b^2}{3}}$; **в)** 0; **12 а)–в)** послідовності збігаються до спільної границі; **13)** збігається до 0; **14)** 0; **15)** збігається до $\sqrt{\alpha}$; **16)** збігається до $\sqrt[3]{\alpha}$; **17)** збігається до $\sqrt{\alpha}$; **18)** збігається до $\frac{1}{\alpha}$.

88. Після набуття явного вигляду функцій побудова самих графіків очевидна, а тому їхній вигляд не наводимо. **1)** $f(x) = 0$ при $x \in [0; 1)$; $f(1) = \frac{1}{2}$; $f(x) = 1$ при $x > 1$; **2)** $f(x) = 1$ при $|x| > 1$; $f(x) = -1$ при $|x| < 1$; не визначена при $x = \pm 1$; **3)** $f(x) = 1$ при $x > 0$; $f(0) = 0$; $f(x) = -1$ при $x < 0$; **4)**, **5)** $f(x) = 1$ при $x \in [0; 1]$; $f(x) = x$ при $x > 1$; **6)** $f(x) = 1$ при $x \in [0; 1]$; $f(x) = x$ при $x \in (1; 2]$; $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ при $x > 2$; **7)** $f(x) = 0$ при $x \in [0; 2)$; $f(2) = 2\sqrt{2}$; $f(x) = x^2$ при $x > 2$; **8)** $f(x) = \ln 2$ при $x \in [0; 2]$; $f(x) = \ln x$ при $x > 2$; **9)** $f(x) = \log_4 5$ при $x \in [0; 3]$; $f(x) = \log_{x+1} 5$ при $x \in (3; 5]$; $f(x) = \log_{x+1} x$ при $x > 5$; **10)** $f(x) = 1$ при $x \in [0,1]$; $f(x) = x$ при $x \in (1; \frac{1+\sqrt{17}}{2}]$; $f(x) = (2x^2 - 2)$ при $x \in (\frac{1+\sqrt{17}}{2}; +\infty)$; **11)** $f(x) = \frac{1}{2}$ при $|x| \in [0;1)$; $f(x) = \frac{2}{3}$ при $|x| = 1$; $f(x) = 0$ при $|x| > 1$;

12) $f(x)=\sin^2 x$ при $|\sin x|\ge|\cos x|$; $f(x)=\cos^2 x$ при $|\sin x|<|\cos x|$; **13)** $f(x)=1$ при $x\in\mathrm{N}$; $f(x)=0$ при $x<0$; за інших x значення $f(x)$ не визначено; **14)** $f(x)=\frac{1}{2}$ при $x\in[0;\sqrt{2}\,]$; $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ при $x\in(\sqrt{2};3)$; $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ при $x>3$; **15)** $f(x)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x$; **16)** не визначена; **17)** $f(x)=\mathrm{e}^x$; **18)** $f(x)=\log_4 3$ при $x\in[0;2]$; $f(x)=\frac{1}{2}\log_x(x+1)$ при $x>2$; **19)** $f(x)=1$ при $x>0$; $f(0)=0$; $f(x)=x$ при $x<0$; **20)** $f(x)=-\frac{\ln x}{2}$ при $x\in(0;\frac{1}{5}]$; $f(x)=\frac{\ln 5}{2}$ при $x\in(\frac{1}{5};5)$; $f(x)=\frac{\ln x}{2}$ при $x\ge 5$; **21)** $f(x)=\frac{\pi}{2}(x-1)\operatorname{sgn}x$ при $|\,x>1$; $f(x)=0$ при $x\in(-1;1]$; $f(-1)$ не визначено; **22)** $f(x)=\log_x 3$ при $x\in(0;\frac{1}{3})$; $f(x)=\log_x 3$ при $x\in(\frac{1}{3};+\infty)\setminus\{1\}$; $f(1)$ не визначена; **23)** $f(x)=1$ при $x=2\pi k$; $f(x)=0$ при $x\ne\pi k$; $f(x)$ не визначено при $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$; **24)** $f(x)=\dfrac{1}{x}$ при $x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$; $f(x)=2$ при $x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$; $f(x)=x$ при $x>2$; **25)** $f(x)=\dfrac{\pi}{2}x\cdot\operatorname{sgn}(ctgx)$ при $x\ne k\pi$; $f(x)$ не визначено при $x=k\pi$, $k\in Z$; **26)** $f(x)=\dfrac{1}{x}$ при $x\in\left(0;\dfrac{1}{6}\right)$; $f(x)=6$ при $x\in\left[\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{2}\right]$; $f(x)=\dfrac{3}{x}$ при $x\in(\dfrac{1}{2};\sqrt{3}]$; $f(x)=x$ при $x>\sqrt{3}$; **27)** $f(x)=x^2$ при $x>0$; $f(0)=0$; $f(x)=x$ при $x<0$; **28)** $f(x)=\log_2 e$ при $x\in[0;1]$; $f(x)=\log_{x+1}e$ при $x\in\left(1;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; $f(x)=\dfrac{1}{2}\log_x e$ при

$x \ge \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; **29)** $f(x)=1$ при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $f(x)=0$ при $x \ne \frac{\pi}{2}+\pi k$; $f(x)$ не визначено при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$.

89. 1) 0, якщо $x \in Q$, x, якщо $x \in R \setminus Q$; **2)** $D(x)$ – функція Діріхле; **3)** $1-D(x)$; **4)** 2π; **5)** 0; **6)** 0; **7)** $\frac{1}{1-x}$; **8)** $\frac{\sin x}{x}$ при $x \ne 0$; 1 при $x=0$; **9)** 0; **10)** 1.

90. 1) стаціонарна послідовність**; 2)** усі члени послідовності нескінченності; **3)** a є частковою границею послідовності; **4)** $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |x_n| = +\infty$; **5)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; **6)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; **7)** a є точкою дотикання множини значень послідовності; **8)** послідовність необмежена; **9)** послідовність обмежена; **10)** a не є точкою дотикання множини значень послідовності; **11)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; **12)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne a$; **13)** $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |x_n| = R$; **14)** a не є частковою границею послідовності; **15)** існує скінченний член послідовності; **16)** нестаціонарна послідовно сіть.

91. 1) а) обидві обмежені; **б)** u_n необмежена, v_n невизначена; **в)** обидві невизначені; **2) а)** обидві фундаментальні; **б)** u_n не фундаментальна, v_n невизначена; **в)** обидві невизначені; **3) а)** обидві збіжні; **б)** u_n не збігається до дійсного числа, v_n невизначена; **в)** обидві невизначені; **4) а)** u_n невизначена, v_n збігається до дійсного ненульового числа; **б)**, **в)** обидві невизначені; **5) а)** обидві збігаються до $+\infty$; **б)**, **в)** обидві невизначені; **6) а)** u_n невизначена, v_n збігається до нескінченності; **б)**, **в)** обидві невизначені; **7) а)** u_n зростає, v_n невизначена; **б)**, **в)** обидві невизначені; **8) а)** обидві зростають; **б)**, **в)** обидві невизначені; **9) а)-в)** обидві невизначені.

Розділ 8. Границя функції

93. **а)** $\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right)$, $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$, $\left(\frac{9}{10};\frac{11}{10}\right)$, $\left(\frac{1}{10};+\infty\right)$; **б)** $(-1;1)$, $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, $(0;2)$, $(1;+\infty)$; **в)** $(-10;10)$, $\left(-\frac{19}{2};\frac{21}{2}\right)$, $(-9;11)$, $(10;+\infty)$; **1) а)** $\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right)$, $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$, $(\frac{9}{10};1]$, $(\frac{1}{10};1]$; **б)** $(-1;1)$, $(0;1)$, $\varnothing$ **3)а)** $\left[0;\frac{1}{10}\right)$, $\left[\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$, $\left(\frac{9}{10};\frac{11}{10}\right)$, $\left(\frac{1}{10};+\infty\right)$; **б)** $[0;1)$, $\left[0;\frac{3}{2}\right)$, $(0;2)$, $(1;+\infty)$; **в)** $[0;10)$, $\left[0;\frac{21}{2}\right)$, $[0;11)$, $(10;+\infty)$;

4) а) $X=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in N\wedge n>10\right\}$, $\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\{1\}$, $\left\{1;\frac{1}{2};...;\frac{1}{9}\right\}$;

б) $X=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in N\wedge n>1\right\}$, $X=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in N\right\}$, $X=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in N\right\}$, $\varnothing$;

в) $X=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in N\right\}$, $X=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in N\right\}$, $X=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in N\right\}$, $\varnothing$; **5) а)** $\{0\}$, $\varnothing$, $\{1\}$, $\mathbf{N}$; **б)** $\{0\}$, $\{1\}$, $\{1\}$, $N\setminus\{1\}$; **в)** $\{1;2;...;10\}$, $\{1;2;...;10\}$, $\{1;2;...;10\}$, $N\setminus\{1;2;...;10\}$.

94. 1) а) не гранична; **б)–є)** гранична; **ж)** не гранична; **з)–й)** гранична; **2) а)** не гранична; **б)–г)** гранична; **д)** не гранична; **е)** гранична; **є)**, **ж)** не гранична; **з)-и)** гранична; **і)** не гранична; **ї)**, **й)** гранична; **к)** не гранична; **3) а)-г)** гранична; **д)–и)** не гранична; **і)** гранична; **ї)** не гранична; **й)** гранична; **к)** не гранична.

95. 1) $[-1;1]$; **2)** $[0;1]$; **3)** $\{0\}$; **4)** R^{+}; **5)** R; **6)** $[-1;1]$; **7), 8)** R; **9)** $\varnothing$; **10)** $\{\cos n^{\circ}\mid n\in N\}$; **11)** $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n;n+\frac{1}{n}\right]$; **12)** $\{0\}\bigcup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^3};\frac{1}{n^2}\right]$;

13) $\left\{-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right\}$; **14)** $[0;1]$; **15)** $\{e\}$; **16)** R^{+};

17) $\{1\} \bigcup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n-1}{2n-1};\frac{2n-1}{2n}\right]$; **18)** $[0;1]$.

96. 1) $X^{(n)}=[-1;1]\ \ \forall n\in N$; **2)** $X^{(n)}=[0;1]\ \ \forall n\in N$; **3)** $X'=\{0\}$, $X^{(n)}=\varnothing\ \ \forall n\geq 2$; **4)** $X'=\left\{\frac{\Pi}{2}\right\}, X^{(n)}=\varnothing\ \ \forall n\geq 2$; **5)** $X^{(n)}=R\ \ \forall n\in N$; **6)** $X^{(n)}=[-1;1]\ \ \forall n\in N$; **7), 8)** $X^{(n)}=R\ \ \forall n\in N$; **9)** $X^{(n)}=\varnothing\ \ \forall n\in N$; **10)** $X^{(n)}=\{\cos n^{\circ}\mid n\in N\}, \forall n\in N$; **11)** $X'=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in N\right\}\bigcup\{0\}$, $X''=\{0\}$, $X^{(n)}=\varnothing\ \ \forall n\geq 3$.

97. 1) якщо X' зліченна, то X також зліченна, навпаки не обов'язково; **2)**, **3)** справджується; **4) а)** справджується, **б)**, **в)** не обов'язково, **4)** справджується; **5) а)** справджується, **б)** не обов'язково; **6)**, **7)** справджується.

98. 1), **2)** не існує; **3)** $X=\left\{n+\frac{1}{k}\mid n,k\in N\right\}$; **4)** $X=K_3$; **5)** не існує; **6)** $X^{(n)}=\{\sin n^{\circ}\mid n\in N\}$; **7)** $X=\{1\}$; **8)** $X=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in N\right\}$;

9) $X=\left\{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_{n-1}}\mid k_1,k_2\ldots k_{n-1}\in N\right\}$;

10) $X=\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\mid n\in N\right\}$; **11)** $X=(0;1)\bigcup\{2\}$; **12)** $X=(0;1)\bigcup\{2\}$;

13) $X=(0;1)$; **14)** $X=[0;1]\bigcup\{2\}$.

99. 1) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : a - \delta < x < a \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon;$

2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : a < x < a + \delta \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon;$

3) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : \left| \;\; x \;\; \right| > \delta \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon;$

4) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : x > \delta \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon;$

5) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : x < -\delta \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon;$

6) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : 0 < \left| \;\; x - a \;\; \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) \;\; \right| > \varepsilon;$

7) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : 0 < \left| \;\; x - a \;\; \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) \;\; \right| > \varepsilon;$

8) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : 0 < \left| \;\; x - a \;\; \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) \;\; \right| < -\varepsilon;$

9) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : a - \delta < x < a \Rightarrow \left| f(x) \;\; \right| > \varepsilon;$

10) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : a - \delta < x < a \Rightarrow \left| f(x) \;\; \right| > \varepsilon;$

11) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : a - \delta < x < a \Rightarrow < f(x) < -\varepsilon;$

12) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : a < x < a + \delta \Rightarrow \left| f(x) \;\; \right| > \varepsilon;$

13) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : a < x < a + \delta \Rightarrow \left| f(x) \;\; \right| > \varepsilon;$

14) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon;$

15) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : \left| \;\; x \;\; \right| > \delta \Rightarrow \left| f(x) \;\; \right| > \varepsilon;$

16) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : \left| \;\; x \;\; \right| > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon;$

17) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : \left| \;\; x \;\; \right| > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon;$

18) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f : x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon;$

19) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f : x>\delta \Rightarrow f(x)>\varepsilon;$

20) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f : x>\delta \Rightarrow f(x)<-\varepsilon;$

21) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f : x<-\delta \Rightarrow |f(x)|>\varepsilon;$

22) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f : x<-\delta \Rightarrow f(x)>\varepsilon;$

23) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f : x>-\delta \Rightarrow f(x)<-\varepsilon.$

100. 1)а) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f : 0<|\ x-a\ |<\delta \Rightarrow b-\varepsilon<f(x)<b;$

б) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f : a-\delta<x<a \Rightarrow b-\varepsilon<f(x)<b;$

в) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f : a<x<a+\delta \Rightarrow b-\varepsilon<f(x)<b;$

г) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f : |x|>\delta \Rightarrow b-\varepsilon<f(x)<b;$

д) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f : x>\delta \Rightarrow b-\varepsilon<f(x)<b;$

е) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f : x<-\delta \Rightarrow b-\varepsilon<f(x)<b;$

2) а) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f : 0<|\ x-a\ |<\delta \Rightarrow b<f(x)<b+\varepsilon;$

б) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f : a-\delta<x<a \Rightarrow b<f(x)<b+\varepsilon;$

в) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D_f : a<x<a+\delta \Rightarrow b<f(x)<b+\varepsilon;$

г) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D_f : |\,x\,|>\delta \Rightarrow b<f(x)<b+\varepsilon;$

д) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D_f : x>\delta \Rightarrow b<f(x)<b+\varepsilon;$

е) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D_f : x<-\delta \Rightarrow b<f(x)<b+\varepsilon.$

101. 1) не справджується; **2) а)-в)**, **3) а)**, **б)** справджується; **3) в)-е)** не справджується.

102. 1) $b=8$: **а)** $\delta=0{,}14$, **б)** $\delta=0{,}014$, **в)** $\delta=0{,}0014$; **2)** $b=\dfrac{3}{5}$:

а) $\delta=0{,}1$, **б)** $\delta=0{,}01$, **в)** $\delta=0{,}001$; **3)** $b=\dfrac{1}{4}$, **а)** $\delta=0{,}0125$, **б)** $\delta=0{,}00125$, **в)** $\delta=0{,}000125$; **4)** $b=1$, $\delta=0{,}01$; **5)** $b=1$, $\delta=0{,}018$; **6)** $b=0$, $\delta=0{,}01$; **7)** $b=0$, $\delta=0{,}01$; **8)** $b=1$, $\delta=0{,}001$; **9)** $b=\dfrac{1}{2}$, $\delta=0{,}1$; **10)** $b=9$, $\delta=0{,}0025$; **11)** $b=0$, $\delta=2$; **12)** $b=0$, $\delta=2$; **13)** $b=0$, $\delta=100$; **14)** $b=0$, $\delta=10$; **15)** $b=-1$, $\delta=1$.

104. Відповідь аналогічна відповідям п. **1)-8)**, **а)-ч)** задачі **65**.

107. 1) $x-3x^2+3x^3+x^4+o(x^4)$, **2)** $2x+3x^3+o(x^3)$; **3)** $2x-x^2-x^3+o(x^3)$; **4) а)** $x+x^2+o(x^2)$, **б)** $x+x^2-x^3+o(x^3)$, **в)** $x+x^2-x^3+x^4+o(x^4)$; **5) а)** $-2x^3+o(x^3)$, **б)** $x^2-2x^3+o(x^3)$; **в)** $o(x^3)$; **6) а)** $o(x^2)$, **б)** $-x^3+o(x^3)$; **в)** $-x^3-x^4+o(x^4)$; **7) а)** $x^2+o(x^4)$, **б)** $x^2+o(x^3)$; **в)** $o(x^3)$.

108. 1) $-\dfrac{1}{2}$, **2)** $\dfrac{1}{3}$; **3)** 0; **4)** -6; **5)** ∞, **6)** 0; **7)** невизначеність; **8)** невизначеність; **9)** 0; **10)** $-\dfrac{1}{3}$; **11)** ∞, **12)** 0; **13)** невизначеність; **14)** $-\dfrac{1}{3}$; **15)** 0; **16)** ∞; **17)** $\dfrac{3}{2}$, **18)** 0.

110. 1) $-\dfrac{1}{4}$; **2)** $-\dfrac{1}{4}$; **3)** $-\dfrac{1}{257}$; **4)** $-\dfrac{1}{16\sqrt{3}}$; **5)** $\dfrac{12}{7}$, **6)** 10; **7)** $\dfrac{283}{280}$; **8)** $\dfrac{m}{n}$; **9)** 0; **10)** $\dfrac{n^2-m^2}{2}$; **11)** $C_n^2a^{n-2}$; **12)** $\dfrac{n(n+1)}{2}$; **13)** $\dfrac{1}{3}$; **14)** $-\dfrac{10}{4}$; **15)** $-\dfrac{1}{16}$; **16)** $\dfrac{1}{4}$; **17)** $-\dfrac{1}{5}$; **18)** $\dfrac{2}{27}$; **19)** 0; **20)** $\dfrac{1}{4}$; **21)** $-\dfrac{1}{2}$;

22) $\frac{1}{4}$; **23)** -1; **24)** 1; **25)** $2n$; **26)** $C_n^2 - m$; **27)** 0; **28)** $+\infty$; **29)** n^2; **30)** $+\infty$. **31)** 0; **32)** $+\infty$.

111. 1) 1; **2)** 0; **3)** $\cos\alpha$; **4)** $-\sin\alpha$; **5)** $\frac{1}{\cos^2\alpha}$, **6)** $-\frac{1}{\sin^2\alpha}$; **7)** $\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$; **8)** $-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$; **9)** $\frac{3}{2}$; **10)** -1; **11)** $-\sin\alpha$; **12)** 4; **13)** 21; **14)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$; **15)** -1; **16)** 1; **17)** $-1-tg^4 1$; **18)** $\frac{1}{2}$; **19)** 0; **20)** $\frac{1}{3}$; **21)** 1; **22)** 6; **23)** $\frac{3}{2}$; **24)** $\frac{1}{6}$; **25)** 0; **26)** $3\sin\alpha\cos\alpha$; **27)** $\frac{\sqrt{2}}{8}$; **28)** $\frac{1}{4}$; **29)** $\frac{4}{3}$; **30)** $\frac{1}{24}$; **31)** 0; **32)** 0.

112. 1) $\sqrt{2}$; **2)** 0; **3)** $\frac{m-n}{2}$; **4)** $+\infty$; **5)** 0, **6)** $-\frac{1}{2}$; **7)** 2; **8)** 0; **9)** 0; **10)** $-\frac{7}{6}$; **11)** $\frac{\pi}{2\cos 1}$; **12)** $\frac{5}{4}$; **13)** $+\infty$; **14)** $+\infty$; **15)** 2; **16)** 0; **17)** 0; **18)** $\frac{1}{4}$; **19)** $\frac{1}{2}$; **20)** $-\frac{1}{2}$.

113. 1) e^a; **2)** $\frac{1}{b}$; **3)** $-\frac{1}{2}$; **4)** 1; **5)** $b^b \ln\frac{b}{e}$, **6)** $b^b \ln be$; **7)** $b^{b^b} b^b \ln\frac{b}{e}$; **8)** $b^{b^b-1} b^b (b\ln^2 b - 1)$; **9)** $b^{b^b} b^b \ln b \ln\frac{e}{b}$; **10)** $b^{b^b-1} b^b (1 - b\ln^2 b)$; **11)** $-\frac{3}{8}$; **12)** 1; **13)** 0; **14)** $-3e$; **15)** $\frac{2}{e} - 1$; **16)** $-\frac{1}{2}$; **17)** $\frac{5}{3}$; **18)** $-\frac{13}{81}$; **19)** $-\frac{805}{864}$; **20)** $4\ln\frac{e}{2}$; **21)** $\frac{1}{12}$; **22)** $-\frac{3}{\ln 3}$; **23)** 0; **24)** $-\infty$; **25)** $\frac{c}{b}$; **26)** $\frac{m-n}{\alpha-\beta}$; **27)** $\ln^{-1}\frac{c}{b}$; **28)** -2; **29)** $ch\alpha$; **30)** $sh\alpha$; **31)** $\frac{1}{ch^2\alpha}$; **32)** $\frac{1}{sh^2\alpha}$.

114. **1)** 0; **2)** 1; **3)** 1; **4)** $-\frac{1}{2}$; **5)** $2sh\frac{1}{2}$, **6)** -4; **7)** $-\infty$; **8)** -2; **9)** $-\infty$; **10)** $-\frac{a^2}{b^2}$; **11)** 0; **12)** n^2; **13)** $+\infty$; **14)** $+\infty$; **15)** 0; **16)** $-\frac{3}{\ln 3}$; **17)** $e^{-\frac{3}{2}}$; **18)** -1; **19)** $\frac{5}{3}$; **20)** 2.

115. **1) а)** $\frac{1}{2}$; **б)** $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; **в)** 1; **2) а)** 1; **б)** $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{\pi}{2}}$; **в)** 0; **3) а)** 1; **б)** 9; **в)** 0; **4) а)** $+\infty$; **б)** $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1}\right)^{\frac{3}{5}}$; **в)** 1; **5) а)–в)** $+\infty$; **6) а)** 0; **б)** 1; **в)** $\frac{2}{5}$; **7)** $e^{-\frac{1}{2}}$; **8)** e^2; **9)** $e^{-\frac{1}{2}}$; **10)** 0; **11)** 1; **12)** $e^{\frac{3}{2}}$; **13)** $e^{-\frac{1}{2}}$; **14)** $e^{\frac{1}{8}}$; **15)** e; **16)** e^{-2}; **17)** $\sqrt[3]{bcd}$; **18)** $\sqrt[b+c+d]{b^b c^c d^d}$; **19)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{e}}$; **20)** 1; **21)** e; **22)** $e^{-\frac{1}{2}}$; **23)** 0; **24)** $e^{\frac{5}{2}}$; **25)** 1; **26)** 0; **27)** 1; **28)** -1; **29)** 2; **30)** 1; **31)** 1; **32)** e.

116. **1)** 2; **2)** 2; **3)** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; **4)** 1; **5)** $\frac{1}{2}$; **6)** $-\frac{4}{5}$; **7)** $\sqrt{2}$; **8)** $-36\log_2 3$; **9)** $+\infty$; **10)** e; **11)** 0; **12)** 0; **13) а)** 0; **б)** 1; **14) а)** 1; **б)** 1; **15)** 1; **16)** $e^{-\frac{7}{2}}$; **17)** $e^{\frac{1}{2}}$; **18)** $e^{-\frac{3}{2}}$.

117. **1)** 1; **2)** 0; **3)** -1; **4)** 0; **5)** 0; **6)** 0; **7) а)** $\sin 1$; **б)** 0; **8) а)** $+\infty$; **б)** 0; **9)** $\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sin 1}$; **10)** $\ln 2$; **11)** 0; **12)** 0; **13)** 0; **14)** -1; **15) а)** $\frac{1}{2}$; **б)** 0; **16)** 0; **17)** 1; **18)** 0; **19)** 1; **20) а)** 0; **б), в)** не існує; **21) а)** 1; **б), в)** не існує; **22) а)** 0; **б)** 1; **в)** 0; **23) а)** 0; **б)** -1; **в)** не існує; **24) а)** 0; **б)** не існує; **25) а)** не існує; **б), в)** 0; **26) а)** не існує; **б)** $\frac{\pi}{4}$; **в)** $\frac{\pi}{2}$;

27) а) не існує; **б)** $\frac{4}{5}$; **в)** не існує; **г)** $\frac{3}{\pi}$; **д)** 1; **28) а)** не існує; **б)** 0; **в)** не існує; **г)** $4(\pi-3)$; **д)** не існує; **29) а)** не існує; **б)** -1; **в)** 0; **30) а)** -1; **б)-д)** не існує.

118. 1) а) $\{0\}$; **б)** $\{1\}$; **2) а)** $[-1;\ 1]$; **б)** $\{0\}$; **3) а), б)** $\{0;\ 1\}$; **4) а)–в)** $\{0;\ +\infty\}$; **г)** Z^+; **5) а)** $\{0\}$; **б)** $\{0\}$; **в)** $\{0;\ +\infty\}$; **г)** $\{\frac{1}{n}\,|\,n\in N\}\bigcup\{0\}$; **5) а)** $\overline{R}$; **б)** $\{-\infty;\ +\infty\}$; **6) а)** $[\frac{1}{e};\ e]$; **б)** e; **7) а)** $\{-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\}$; **б)** $\{0\};\ e;$ **8) а)** $\{-\infty;\ \frac{1}{2}\}$; **б)** $\{\sqrt{2}+1\}$; **9) а), б)** $[0;1]$; **в)** $\{\pi-3\}$; **г)** $\{0;1\}$; **10) а)** $\{1\}$; **б)** $\{0\}$; **11) а)** $\{-\infty;+\infty\}$; **б)** $\{0\}$; **12) а)** $\{2\}$; **б)** $\{e\}$; **13) а)** $\{-1;0\}$; **б)** $\{1\}$; **в)** $\{3\}$; **г)** $\{+\infty\}$; **14) а)** $\{-1;1\}$; **б)** $\{0\}$; **15) а)** $\{-1;0\}$; **б)** $\{0\}$; **в)** $\{-2;0\}$; **г)** $\overline{R}$; **16) а)** $\{0\}$; **б)** $\{1\}$; **в)** $\{1;2\}$; **г)** $\{+\infty\}$.

119. 1) а) $0;\ 1$; **б)** $1;\ 1$; **в)** $3;\ 3$; **2) а)** $1;\ 0$; **б)** $\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}$; **в)** $\sqrt{2}-1;\sqrt{2}-1$; **3) а)** $-1;\ 1$; **б)** $-1;-1$; **в)** $1;\ 1$; **4) а)** $-\infty;\ +\infty$; **б)** $\ln 2;\ln 2$; **5) а)** $-\infty;+\infty$; **б)** $\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}$; **в)** $\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}$; **6) а)** $1;0$; **б)** $\frac{1}{1+e};\frac{1}{1+e}$; **7) а)** $1;1$; **б)** $1;0$; **в)** $1;2$; **8) а)** $1;1$; **б)** $-\infty;+\infty$; **9) а)** $+\infty;+\infty$; **б)** $\frac{7}{3};\frac{7}{3}$; **10) а)** $\frac{1}{e-1};\ -\infty$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{e}-1};\ \frac{1}{\sqrt{e}-1}$; **11) а)** $\frac{1}{1-e};\frac{1}{1-e}$; **б)** $0;1$; **в)** $1;0$; **12) а)** $0;0$; **б)** $-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}$; **в)** $-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}$; **13) а)** $-1;1$; **б)** $\sin 1;\ \sin 1$; **14) а)** $+\infty;-\infty$; **б)** $0;1$; **в)** $2+\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2}$; **15) а)** $-\infty;+\infty$; **б)** $0;0$; **в)** $+\infty;-\infty$; **16) а)** $-1;1$; **б)** $1;1$; **в)** $1;-1$; **17) а)** не існують обидві; **б)** не існують обидві; **18) а)** $0;0$; **б)** не існують обидві; **19) а)** $-1;1$; **б)** $th1;\ th1$; **20) а)** $\frac{3}{2};\frac{3}{2}$; **б)** $\frac{3}{2};\frac{1}{4}$; **21) а)** $1;1$; **б)** $1;-1$; **22) а)** $0;0$; **б)** $\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}$; **23) а)** $3;3$; **б)** $-\infty;+\infty$; **в)** $0;1$; **24) а)** $0;0$; **б)** $0;1$; **в)** $1;1$; **25) а)** $\frac{1}{e};e$; **б)** $2;2$; **26) а)** $-\sqrt{2};\sqrt{2}$; **б)** $\frac{4}{\pi};\frac{4}{\pi}$.

120. 1) $-\infty;+\infty$; **2)** обидві не існують; **3)** $-1;1$; **4)** $-\infty$ не є граничною D_f; 0; **5) а)** $0;0$; **6)** $\frac{1}{2};\frac{1}{2}$; **7)** $+\infty;0$; **8)** обидві не існують; **9)** $2;2$; **10)** обидві не існують; **11)** $+\infty;+\infty$; **12), 13)** $0;0$; **14)** $2;2$; **15)** $+\infty;+\infty$; **16)-18)** обидві не існують; **19)** $0;0$; **20)** $\frac{1}{4};\frac{1}{4}$; **21), 22)** обидві не існують; **23)** $0;0$; **24)** $-\infty$ не є граничною D_f; 1; **25)** $\frac{1}{e};e$; **26)** $0;0$.

121. 1) а) не обмежена; **б)** не є; **в)** не існує; **г)** існує; **2) б)** обмежена; **б)** не є; **в), г)** не існує; **3) а)** обмежена знизу; **б)** не є; **в)** не існує; **г)** існує; **4) а)** не обмежена; **б)** не є; **в)** не існує; **г)** існує; **5) а)** не обмежена; **б)** є нескінченно великою при $x\to\pm\infty$; **в)** не існує; **г)** існує; **6) а)** обмежена; **б)** не є; **в), г)** не існує; **7) а)** не обмежена; **б)** є нескінченно великою при $x\to\pm\infty$; **в)** існує; **г)** не існує; **8) а)** не обмежена; **б)** є нескінченно великою при $x\to\pm\infty$; **в)** не існує; **г)** не існує; **9) а)** обмежена знизу; **б)** є нескінченно великою при $x\to+\infty$; **в)** не існує; **г)** не існує; **10) а)** не обмежена; **б)** не є; **в)** не існує; **г)** не існує; **11) а)** не обмежена; **б)** є нескінченно великою при $x\to\pm\infty$; **в)** не існує; **г)** не існує; **12) а)** обмежена зверху; **б)** не є; **в)** існує; **г)** не існує; **13) а)** обмежена знизу; **б)** не є; **в)** не існує; **г)** не існує; **14) а)** не обмежена; **б)** є нескінченно великою при $x\to\pm\infty$; **в)** не існує; **г)** не існує; **15) а)** не обмежена; **б)** не є; **в)** не існує; **г)** не існує; **16) а)** не обмежена; **б)** є нескінченно великою при

$x \to \pm\infty$; **в)** не існує; **г)** не існує; **17) а)** не обмежена; **б)** не є; **в)** існує; **г)** не існує.

122. 1) а) $\frac{1}{2};0$; **б)** $1;0$; **2) а)** $+\infty;\frac{5}{2}$; **б)** $+\infty;2$; **в)** $-2;-\infty$; **3) а)** $1;-1$; **б)** $1;0$; **4) а)** $9;0$; **б)** $1;-1$; **в)** $4;4$; **5) а)-в)** $1;0$; **6) а)** $+\infty;-\infty$; **б)** $10;0$; **в)** $0;-2$; **г)** $0;0$; **д)** $10;1$; **7) а)** $0;0$; **б)** $-1;-\infty$; **в)** $+\infty;1$.

123. !) одного порядку; **2)** $f \sim 2g$; **3)** не порівнянні; **4)** $f \sim -\frac{1}{2}g$; **5)** $f \sim g$; **6) а)** не порівнянні; **б)** $f = o(g)$; **в)** $f \sim -g$; **7) а)** не порівнянні; **б)** $f = o(g)$; **в)** $g = o(f)$; **8) а)** $g = O(f)$; **б)** $f \sim g$; **в)** $g = o(f)$; **9)** $f = o(g)$; **10)** $g = o(f)$; **11)** $g = O(f)$; **12) а)** не порівнянні; **б)** $g = o(f)$; **в)** $f = o(g)$; **13) а)-в)** $f \sim g$; **14)** $f = o(g)$; **15) а)** не порівнянні; **б)** $f = o(g)$; **в)** $g = o(f)$; **16) а)** не порівнянні; **б)** $f = o(g)$; **в)** $g = o(f)$; **17)** $g = O(f)$; **18)** $f \sim 100g$; **19)** не порівнянні; **20)** $f = O(g)$; **21), 22)** $f \sim g$; **23)** одного порядку; **24)** $f = o(g)$.

124. 1) $-2x^{\frac{2}{3}}$; **2)** x; **3)** $\frac{1}{2}x$; **4)** $x^{\frac{3}{2}}$; **5)** $x^{\frac{1}{8}}$; **6)** $\frac{\pi}{2}$; **7), 8)** x; **9)** $\frac{1}{2}x^2$; **10)** $x^{\frac{1}{3}}$; **11)** $x^{\frac{5}{12}}$; **12)** $-x^2$; **13)** $-x$; **14)** $-\frac{x}{2}$; **15)** $\cos 1 - 1$; **16)** $\sin 1 - 1$; **17)** шуканої функції не існує; **18)** x^2; **19)** x; **20)** $\frac{7}{54}x$; **21)** $-\frac{1}{2}x^3$; **22)** $2x^{\frac{1}{2}}$; **23)** $-x$; **24)** $\ln\cos 1$; **25)** $-\frac{1}{2}x^2$; **26)** $-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$; **27)** ex; **28)** $-x^{-1}$; **29)** $x^{\frac{1}{3}}$; **30)** $\sqrt{2}x^{-\frac{1}{2}}$; **31)** x.

125. 1), 2) $a > 0, b \in R$ або $a \le 0, a + b > 0$; **3)** $b > 0, a > -b$ або $b \le 0, a > 0$; **4)** $a > 0$ або $b = 0$; **5)** $a > 0, b \in R$; **6)** $a > 0, b = 1$ або

$a \le 0, b = 0$; **7) а)** $a = 1, b = -\frac{1}{3}$, **б)** $b = 0, a \in R$; **8) а)** не існують, **б)** $b = 0, a \in R$; **9)** $a = 1, b = -1$; **10)** $a = -1, b = 0$; **11) а)** не існують, **б)** $a = b = 0$; **12) а)** $a = 1; b = 0$, **б)** $a = b = 0$; **13) а)** $a = 3; b = 0$, **б)** $b = \ln 2, a \in R$, **в)** $a = b = 0$; **14)** $a = \frac{9}{4}, b = 4$; **15)** $a = 1, b = 2$; **16)** $a = 1, b = \frac{1}{2}$; **17)** $a = 0, b = 1$; **18)** $a = \sin 1 - 1, b = \frac{1}{2}(1 - \cos 1)$; **19) а)** не існують, **б)** $a = 1, b = \frac{5}{2}$.

Розділ 9. Неперервність функції

126. 1) а) $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in D_f \quad 0\le x_0-x<\delta \quad \Rightarrow$ $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$; **б)** $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in D_f \quad 0\le x-x_0<\delta \quad \Rightarrow$ $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$; **2)** $\exists\varepsilon>0 \quad \forall\delta>0 \quad \exists x\in O_\delta(x_0)\bigcap D_f \quad \Rightarrow$ $0|f(x)-f(x_0)|\ge\varepsilon$; **3) а)** $\exists\varepsilon>0 \quad \forall\delta>0 \quad \exists x\in D_f: \ 0\le x_0-x<\delta$ $\Rightarrow \ |f(x)-f(x_0)|\ge\varepsilon$; **б)** $\exists\varepsilon>0 \quad \forall\delta>0 \quad \exists x\in D_f: \ 0\le x_0-x<\delta$ $\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\ge\varepsilon$.

127. 1) f – стала функція, обов'язково неперервна в кожній точці D_f; **2)** таких функцій не існує, оскільки D_f складається із однієї точки, що суперечить умові задачі; **3)** D_f обмежена або $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $f(x)=\begin{cases} x+1, x\ge 0, \\ x, x<-1; \end{cases}$ **4)**, **5)** функція f обмежена, $f(x)=\begin{cases} arctgx+1, x\ge 0, \\ arctgx, x<-1; \end{cases}$ **6)** якщо існує обернена функція, то вона неперервна, $f(x)=\begin{cases} x+1, x\ge 0, \\ x, x<-1; \end{cases}$ **7)** $f(x_0)$ – ізольована точка E_f, $f(x)=\operatorname{sgn} x$; **8)** f – неперервна в деякому околі точки x_0; **9)** D_f – обмежена, розривної функції $R\xrightarrow{f}R$ не існує, $f(x)=\begin{cases} x+1, x\ge 0, \\ x, x<-1; \end{cases}$; **10)** f – обмежена в точці x_0, $f(x)=\begin{cases} x+1, x\ge 0, \\ x, x<-1; \end{cases}$; **11)** існує окіл точки $f(x_0)$, прообраз якого обмежений.

128. 1) а), **б)** не справджується, **в)**, **г)** справджується; **2) а)** не справджується, **б)** справджується; **3) а)**, **б)** не справджується; **4) а)-в)** не справджується; **5) а)**, б) справджується; **6) а)**, **б)** справджується, **в)-е)** не справджується, **є)-і)** справджується.

130. 1) а) $f \circ g$ неперервна, $g \circ f$ розривна при $x = 0$, **б)** $f \circ g$ розривна при $x \in \{-1;0;1\}$, $g \circ f$ розривна при $x = 0$, **в)** $f \circ g$ та $g \circ f$ неперервні, **г)** $f \circ g$ розривна при $x = 0$, $g \circ f$ розривна при $x = k\pi$, $k \in Z$; **2) а)** $f \circ g$ та $g \circ f$ розривні $\forall x \neq 0$, **б)** $f \circ g$ та $g \circ f$ розривні при $x = 0$, **в)** $f \circ g$ та $g \circ f$ неперервні, **г)** $f \circ g$ та $g \circ f$ розривна в кожній точці; **3)** $f \circ g$ розривна при $x = -1$, $g \circ f$ розривна при $x = 1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ляшко И. И. Основы классического и современного математического анализа / И. И. Ляшко, В. Ф. Емельянов, А. К. Боярчук. – К. : Вища школа, 1988.

2. Ляшко І. І. Математичний аналіз : підручник : у 2 ч. / І. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук. – К. : Вища школа, 1992; 1993. – Ч. 1, 2.

3. Математический анализ : в 3 ч. / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. – К. : Вища школа, 1983–1985. – Ч. 1–3.

4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.

5. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев и др. Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. Т. 2. Интегралы. Ряды. – М. : Наука, 1984, 1986.

6. Полия Г. Задачи и теоремы из анализа / Г. Полия, Г. Сеге. – М. : Наука, 1978. – Ч. 1, 2.

7. Дороговцев А. Я. Математический анализ : сб. задач / А. Я. Дороговцев. – К. : Вища школа, 1987.

8. Гелбаум Б. Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. – М. : Мир, 1967.

9. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / С. И. Ляшко, А. К. Боярчук, И. Н. Александрович и др. – М. : Изд. дом "Вильямс", 2001.